УДК 518.1

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТЯХ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

И. О. Арушанян[1]

Задача Дирихле на области с угловыми точками сводится к граничному интегральному уравнению, для численного решения которого предлагается метод, обладающий экспоненциальной скоростью сходимости. Рассматривается способ вычисления нормальной производной решения указанной задачи. Приводятся оценки количества арифметических операций.

Ключевые слова: задача Дирихле, области с угловыми точками, граничные интегральные уравнения, экспоненциальная скорость сходимости, метод квадратур, аппроксимация, системы линейных алгебраических уравнений, разрывы в угловых точках.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^2$ с границей Γ, являющейся замкнутой кривой без самопересечений и допускающей следующее параметрическое представление:

$$\Gamma = \{x = x(s) = \big(x_1(s), x_2(s)\big), \quad s \in [0,T], \quad x(0) = x(T)\}.$$

Здесь s — натуральный параметр (длина дуги).

В дальнейшем будем считать, что

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{J-1} \Gamma_j\,,$$

где Γ_j — прямолинейный отрезок, соединяющий точки P_j и P_{j+1} (предполагаем, что $P_J = P_0$). Величина внутреннего угла области Ω при вершине P_j обозначается через α_j, причем для всех j имеет место неравенство $0 < \alpha_j < 2\pi$.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\Delta U(x) = 0\,, \quad x \in \Omega\,, \\ &U(x) = F(x)\,, x \in \Gamma\,, \end{aligned} \tag{1}$$

где F является непрерывной бесконечно дифференцируемой функцией всюду на Γ, кроме, быть может, угловых точек, где допускаются особенности вида $(x - P_j)^\Theta$, $0 < \Theta < 1$.

Решение задачи (1) будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \Phi(y)\, \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|x-y|\, dl_y$$

с неизвестной плотностью распределения Φ, которая однозначно определяется [2] из граничного интегрального уравнения

$$\Phi(x) + \frac{1}{\pi} \int\limits_\Gamma \Phi(y)\, \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|x-y|\, dl_y = 2F(x)\,, \quad x \in \Gamma \setminus \bigcup_{j=0}^{J-1} \Gamma_j\,.$$

Учитывая параметризацию кривой Γ, обозначим $\varphi(s) = \Phi(x(s))$ и $f(s) = 2F(x(s))$. В этих обозначениях граничное интегральное уравнение запишем в виде

$$\varphi(s) + \int\limits_0^T K(s,t)\, \varphi(t)\, dt = f(s)\,, \quad s \in [0,T]\,, \quad x(s) \neq P_j \;\; \forall\, j = 0, \ldots, J-1\,, \tag{2}$$

[1] Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, e-mail: arushan@mech.math.msu.su
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–01–01146)

где

$$K(s,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{x_1'(t)\big(x_2(s)-x_2(t)\big)-x_2'(t)\big(x_1(s)-x_1(t)\big)}{\big(x_1(s)-x_1(t)\big)^2+\big(x_2(s)-x_2(t)\big)^2}, & t\neq s,\\ \dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{x_1'(t)x_2''(t)-x_2'(t)x_1''(t)}{\big(x_1'(t)\big)^2+\big(x_2'(t)\big)^2}, & t=s.\end{cases}$$

Свяжем с вершинами P_j набор чисел $\{s_j\}$, $j=0,\ldots,J$, таких, что

$$x(s_j)=P_j\,,\quad j=0,\ldots,J\,,$$
$$0=s_0<s_1<\ldots<s_{J-1}<s_J=T\,.$$

Для численного решения уравнения (2) будем использовать метод квадратур, состоящий в замене интеграла в левой части (2) квадратурной суммой и переходе к системе линейных алгебраических уравнений. Однако при непосредственном применении метода квадратур к уравнению (2) возникают трудности, связанные с тем, что ядро интегрального уравнения терпит разрыв в угловых точках. Для приведения интегрального уравнения к виду, удобному для аппроксимации, запишем его в эквивалентной форме:

$$2\,\varphi(s)+\int\limits_0^T K(s,t)\big(\varphi(t)-\varphi(s)\big)dt=f(s)\,,\quad s\in[0,T]\,. \tag{3}$$

Основное преимущество такой записи состоит в повышении гладкости подынтегральной функции при $t=s$.

2. Численное решение интегрального уравнения. В [1] построена составная квадратурная формула, аппроксимирующая интеграл в уравнении (3) на решении с экспоненциальной относительно числа узлов точностью.

Вводится конечная система подотрезков отрезка $[0,T]$, которая сгущается к угловым точкам так, что концевые точки элементарных отрезков сгущения в окрестности каждой угловой точки s_j находятся по формуле $s_j+0{,}5\,(s_{j+1}-s_j)\cdot\Theta_j^k$ либо по формуле $s_j-0{,}5\,(s_j-s_{j-1})\cdot\Theta_j^k$, где $0<\Theta_j<1$, $k=0,1,2,\ldots,N$. Здесь N — натуральное число, характеризующее сгущение сетки. На каждом из элементарных подотрезков применяется квадратура Гаусса одного порядка точности по

$$n_{j,k}\geqslant\left[\frac{\lambda_j(N-k)\ln(1+\Theta_j)+\ln N}{4\Theta_j(1+\Theta_j)^{-1}}\right]+1 \tag{4}$$

узлам. Здесь $0<\lambda_j<1$ — число, зависящее только от f и геометрии области и определяющее особенность решения уравнения (3) в угловой точке:

$$\big|\varphi(s)-\varphi(s_j)\big|\leqslant\mathrm{const}\cdot\big|x(s)-x(s_j)\big|^{\lambda_j}.$$

Обозначая

$$n=2\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=1}^{N}n_{j,k}\,,$$

получим квадратурную формулу

$$S_n(s,\varphi)=\sum_{j=1}^{n}A_j^{(n)}K\left(s,t_j^{(n)}\right)\left(\varphi\big(t_j^{(n)}\big)-\varphi(s)\right)\,. \tag{5}$$

Справедлива [1] следующая

Теорема 1. *Если функция φ является решением уравнения* (3), *то для всякого натурального n может быть построена квадратурная формула $S_n(\varphi)$, такая, что*

$$\max_{s\in[0,T]}\left|\int\limits_0^T K(s,t)\big(\varphi(t)-\varphi(s)\big)\,dt-S_n(\varphi)\right|\leqslant b\cdot\exp\big(-c\sqrt{n}\big),$$

где постоянные строго положительны и не зависят от выбора n.

В результате осуществляется переход к системе линейных алгебраических уравнений

$$2\,\Phi_i^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\left(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}\right)\left(\Phi_j^{(n)} - \Phi_i^{(n)}\right) = f\left(t_i^{(n)}\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

аппроксимирующей уравнение (3) на решении.

Наряду с системой (6) рассматривается уравнение

$$\varphi_n + K_n \varphi_n = f, \tag{7}$$

где через K_n обозначен линейный ограниченный оператор на пространстве T–периодических непрерывных функций, такой, что

$$(K_n\, v)\,(s) = v(s) + S_n(s, v)$$

для произвольной функции v из данного пространства.

Решение уравнения (7) сводится к решению системы (6), поскольку $\Phi_i^{(n)} = \varphi_n\left(t_i^{(n)}\right)$. С другой стороны, функция

$$\varphi_n(s) = \left(f(s) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\left(s, t_j^{(n)}\right)\Phi_j^{(n)}\right)\left(2 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\left(s, t_j^{(n)}\right)\right)^{-1} \tag{8}$$

является решением уравнения (7). Доказывается, что при достаточно больших значениях n представление (8) осуществимо для всех $s \in [0, T]$.

Тем самым, вопрос о разрешимости системы (6) сводится к вопросу о существовании и равномерной по n ограниченности последовательности операторов $\left\{(I + K_n)^{-1}\right\}$.

Основной результат [1] формулируется следующим образом:

Теорема 2. *Имеется такое число* $n_1 > 0$, *что при всех целых* $n > n_1$ *существуют операторы* $(I + K_n)^{-1}$ *и выполнено*

$$\left\|(I + K_n)^{-1}\right\|_C \leqslant \mathrm{const}_1\,.$$

Решение φ_n *уравнения*

$$\varphi_n + K_n \varphi_n = f$$

существует и единственно и справедлива оценка

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C \leqslant \mathrm{const}_2 \cdot \exp\bigl(-c\sqrt{n}\bigr),$$

где φ *является решением граничного интегрального уравнения* (3), *а все постоянные строго положительны и не зависят от выбора* n.

3. Численное решение задачи Дирихле. Исследуем теперь вопрос о численном решении исходной краевой задачи (1) на основе полученного приближенного решения граничного интегрального уравнения (3).

Учитывая введенную параметризацию кривой Γ, мы можем представить решение задачи (1) в произвольной внутренней точке $(x_1,\, x_2)$ области Ω в виде

$$U(x) = \frac{1}{2}\int_0^T K(x_1, x_2, t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{9}$$

где

$$K(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x_1'(t)\bigl(x_2 - x_2(t)\bigr) - x_2'(t)\bigl(x_1 - x_1(t)\bigr)}{\bigl(x_1 - x_1(t)\bigr)^2 + \bigl(x_2 - x_2(t)\bigr)^2}\,.$$

Естественно использовать квадратурную формулу (5) для приближенного вычисления интеграла (9). Учитывая, что

$$\int_0^T K(x_1, x_2, t)\,\varphi(t)\,dt = \int_0^T K(x_1, x_2, t)\,\varphi_n(t)\,dt + O\left(e^{-c\sqrt{n}}\right),$$

возьмем в качестве приближенного решения функцию U_n, определенную в каждой точке $x = (x_1, x_2)$ области Ω по формуле

$$U_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\left(x_1, x_2, t_j^{(n)}\right) \Phi_j^{(n)}.$$

Исследуем вопрос о величине погрешности этого представления.

Теорема 3. *Существует число $Q > 1$, такое, что при каждом $x \in \Omega$ выполнено неравенство*

$$\bigl|U(x) - U_n(x)\bigr| \leqslant c(x) \cdot \bigl(Q(x)\bigr)^{-c_1\sqrt{n}},$$

где $0 < c(x) \leqslant c_2/r(x)$, $1 < Q(x) \leqslant 1 + c_2 r(x) \leqslant Q$, $r(x)$ — расстояние от точки x до кривой Γ. Здесь c_1, c_2 строго положительны и не зависят от выбора n.

Доказательство. Нам необходимо оценить при каждом $x \in \Omega$ погрешность $R(x)$ квадратуры

$$\int_0^T K(x_1, x_2, t)\, \varphi_n(t)\, dt = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\left(x_1, x_2, t_j^{(n)}\right) \Phi_j^{(n)} + R(x).$$

Будем использовать методику, предложенную в [1] при доказательстве теоремы 1.

Центральным местом доказательства является оценка при каждом j величины $R_j(x)$:

$$\int_{s_j}^{s_{j+1/2}} K(x_1, x_2, t)\, \varphi_n(t)\, dt = \sum_{t_j^{(n)} \in [s_j, s_{j+1/2}]} A_j^{(n)} K\left(x_1, x_2, t_j^{(n)}\right) \Phi_j^{(n)} + R_j(x),$$

где

$$s_{j+1/2} = s_j + 0{,}5\,(s_{j+1} - s_j).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$x(s_j) = (0, 0), \quad x(s_{j+1/2}) = (1, 0).$$

В [1] при построении составной квадратурной формулы (5) отрезок $[s_j, s_{j+1/2}]$ разбивался на элементарные отрезки следующими $N + 1$ точками:

$$s_j < t_N < \ldots < t_1 < t_0 = s_{j+1/2},$$

где $t_k = s_j + (1 + \Theta_j)^{-k}$, $k = 0, \ldots, N$, $0 < \Theta_j < 1$, $N = O\bigl(\sqrt{n}\bigr)$.

Из результатов, полученных в [1], следует, что при каждом $k = 1, \ldots, N$ построенная выше функция $\varphi_n(t)$ допускает ограниченное постоянной, не зависящей от k, аналитическое продолжение с отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ в круг на комплексной плоскости с центром в точке $\bigl(0{,}5\,(t_{k-1} + t_k), 0\bigr)$ и радиусом

$$r_k = 0{,}5\,\bigl(1 - (1 + \Theta_j)^{-1}\bigr)\,(1 + \Theta_j)^{2-k}.$$

На каждом элементарном отрезке $[t_k, t_{k-1}]$ строилась квадратура Гаусса по $n_{j,k}$ узлам, определяемым из (4). При этом, если подынтегральная функция допускает аналитическое продолжение с отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ вещественной оси в эллипс на комплексной плоскости с фокусами в точках $(t_k, 0)$, $(t_{k-1}, 0)$ и проходящий через точку $\bigl(0{,}5\,(t_{k-1} + t_k) - r_k, 0\bigr)$ и это аналитическое продолжение ограничено в данном эллипсе величиной порядка $O\left((1 + \Theta_j)^{k(1-\lambda_j)}\right)$, то погрешность элементарной квадратуры оценивается сверху величиной

$$R_k = \text{const} \cdot (1 + \Theta_j)^{-k\lambda_j} Q_k^{-2n_{j,k}},$$

где Q_k — сумма полуосей эллипса, полученного из построенного при отображении

$$z \to \frac{2z - (t_{k-1} + t_k)}{t_{k-1} - t_k}.$$

Пусть точка x удалена от отрезка $[t_{k-1}, t_k]$ на расстояние, большее $2(1+\Theta_j)^{k(\lambda_j - 1)}$. Тогда подынтегральная функция $K(x_1, x_2, t)\, \varphi_n(t)$ допускает аналитическое продолжение в эллипс с фокусами в точках $(t_k, 0)$, $(t_{k-1}, 0)$ и проходящий через точку

$$\Bigl(0{,}5\,(t_{k-1} + t_k), (1 + \Theta_j)^{k(\lambda_j - 1)}\Bigr),$$

причем это аналитическое продолжение ограничено в данном эллипсе величиной $\mathrm{const}\cdot(1+\Theta_j)^{k(1-\lambda_j)}$.

Сделанные замечания гарантируют оценку:

$$\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} K(x_1,x_2,t)\,\varphi_n(t)\,dt - \sum_{t_j^{(n)}\in[t_k,t_{k-1}]} A_j^{(n)} K\left(x_1,x_2,t_j^{(n)}\right)\Phi_j^{(n)}\right| = R_{j,k}(x) \leqslant \mathrm{const}\cdot(1+\Theta_j)^{-k\lambda_j}\left(Q_k(x)\right)^{-2n_{j,k}},$$

где $Q_k(x) > Q_k$.

Таким образом, если точка x достаточно удалена от всех элементарных отрезков кривой Γ, определяющих составную квадратурную формулу (5), то выбор чисел $n_{j,k}$ гарантирует, что

$$|R(x)| \leqslant \mathrm{const}\cdot e^{-c\sqrt{n}}\,.$$

Что произойдет, если точка x будет приближаться к границе?

Пусть в сделанных выше обозначениях расстояние от точки x до отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ участка границы Γ_j есть величина $2d$, где d удовлетворяет неравенству $0 < d < (1+\Theta_j)^{k(\lambda_j-1)}$.

Тогда, повторяя сделанные выше выкладки, получим, что

$$|R_{j,k}| \leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{(1+\Theta_j)^k}{d}\left(Q_k(d)\right)^{-2n_{jk}}, \quad 1 < Q_k(d) < 1+\mathrm{const}\cdot d\,,$$

поскольку у эллипса с фокусами $(t_k,0)\,,(t_{k-1},0)$, в который подынтегральная функция может быть аналитически продолжена, сумма полуосей с уменьшением d стремится к $(t_{k-1}-t_k)/2$.

Полученная оценка доказывает теорему.

Таким образом, рассмотренный способ вычисления решения задачи (1) не может быть признан удовлетворительным, поскольку при его применении не удается гарантировать близость точного и приближенного решений в любой внутренней точке области. Однако этот способ допускает следующую простую модификацию.

Рассмотрим случай, когда, в принятых при доказательстве теоремы 3 обозначениях, расстояние от точки x до отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ участка Γ_j границы Γ есть $2d$, где $d < (1+\Theta_j)^{k(\lambda_j-1)}$.

Заменим функцию $\varphi_n(t)$ на отрезке $[t_k, t_{k-1}]$ интерполяционным многочленом $L_{2n_j,k}(t)$ по следующим точкам:

$$\frac{t_k+t_{k-1}}{2}+\frac{t_{k-1}-t_k}{2}\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{4n_{j,k}}\right), \quad m=1,\ldots,2n_{j,k}\,.$$

Так как $n_{j,k}=O(\sqrt{n})$, то для вычисления значений $\varphi_n(t)$ в этих точках потребуется $O(n\sqrt{n})$ арифметических действий. При этом

$$\max_{[t_k,t_{k-1}]}\left|\varphi_n(t)-L_{2n_j,k}(t)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot Q_k^{-2n_{j,k}}\,,$$

где величина $Q_k > 1$ и определена при доказательстве теоремы 3 .

Имеем:

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} K(x_1,x_2,t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} K(x_1,x_2,t)L_{2n_j,k}(t)\,dt + O\left(e^{-c\sqrt{n}}\right).$$

Интеграл в правой части этого представления достаточно вычислить с точностью $O\left(e^{-c\sqrt{n}}\right)$. Для этого можно применить стандартный алгоритм с автоматическим выбором шага интегрирования, построенный на основе более простой квадратурной формулы. Следует отметить, что число отрезков $[t_k, t_{k-1}]$, лежащих на $[0,1]$, таких, что фиксированная точка $x\in\Omega$ находится от каждого из них на расстоянии, меньшем $2(1+\Theta)^{k(\lambda_j-1)}$, конечно и не зависит от n, а только от положения точки x.

Пусть ставится задача вычисления с точностью $\varepsilon > 0$ приближенного решения задачи (1) в m внутренних точках области Ω. Учитывая, что для определения приближенного решения интегрального уравнения (3) надо решить систему линейных алгебраических уравнений с $n \sim \ln^2 1/\varepsilon$ неизвестными, суммарные вычислительные затраты составят $O(\ln^6 1/\varepsilon + m\ln^3 1/\varepsilon)$ операций.

Предложенная оценка является несколько завышенной, так как если точка x достаточно удалена от границы области, то в ней приближенное решение определяется за $O(n)$, а не $O(n\sqrt{n})$ операций.

4. Вычисление нормальной производной решения задачи Дирихле. Существенно более сложным, чем вычисление в фиксированной точке значения решения краевой задачи, является вычисление нормальной производной решения в граничной точке области.

Пусть U — решение задачи (1). Зададимся целью вычислить $\partial U(x)/\partial n_x$ в произвольной фиксированной точке x^0 границы области при условии, что эта точка не является угловой.

Пусть $x^0 = \big(x_1(\xi_0), (x_2(\xi_0)\big)$, $\xi_0 \in (s_j, s_{j+1/2}]$ при некотором $j = 0, \dots, J-1$. С точностью до линейной замены координат будем считать, что $x_2(s) = 0$ при $s \in [s_j, s_{j+1/2}]$, $x^0 = (0,0)$. Будем считать также, что при некотором целом $n > 0$, отвечающем условиям теоремы 2, мы вычислили решение $\big\{\Phi_i^{(n)}\big\}$, $i = 1, \dots, n$, аппроксимирующей системы линейных алгебраических уравнений (6) и, следовательно, можем вычислить в любой точке решение φ_n уравнения (7), являющееся приближенным решением уравнения (3).

Выберем числа δ_1, $\delta_2 > 0$ так, чтобы отрезок $[\xi_0 - \delta_1,\ \xi_0 + \delta_2]$ складывался из элементарного отрезка составной квадратурной формулы (5), на котором лежит точка ξ_0, и двух соседних элементарных отрезков.

Обозначим соответствующий ему участок границы через $\Gamma(x^0)$. Имеем

$$2\pi \cdot \frac{\partial U(x)}{\partial n_x}\bigg|_{x=x^0} = \frac{\partial}{\partial n_x}\left(\int\limits_{\Gamma(x^0)} \left(\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\right)\Phi(y)\,dl_y\right)\Bigg|_{x=x^0} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma(x^0)} \left(\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\right)\Phi(y)\,dl_y\right)\Bigg|_{x=x^0} \equiv (V_0\Phi)\big(x^0\big) + (V_1\Phi)\big(x^0\big).$$

При малом $\tau > 0$ точка $(0,\tau)$ будет внутренней точкой области Ω. Запишем:

$$(V_0\Phi)\big(x^0\big) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\partial}{\partial \tau}\int\limits_{\xi_0-\delta_1}^{\xi_0+\delta_2}\frac{\tau}{(t-\xi_0)^2+\tau^2}\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Пусть $[\alpha,\beta] \subset [\xi_0-\delta_1, \xi_0+\delta_2]$, причем $\xi_0 \notin [\alpha,\beta]$. Тогда

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\tau}{(t-\xi_0)^2+\tau^2}\,\varphi(t)\,dt = \lim_{\tau\to 0}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{(t-\xi_0)^2-\tau^2}{\big((t-\xi_0)^2+\tau^2\big)^2}\,\varphi(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(t)}{(t-\xi_0)^2}\,dt\,.$$

Положим $\delta_0 = 0{,}5\cdot\min(\delta_1,\delta_2)$. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\xi_0-\delta_0}^{\xi_0+\delta_0}\frac{\tau}{(t-\xi_0)^2+\tau^2}\,\varphi(t)\,dt = -\int\limits_{\xi_0-\delta_0}^{\xi_0+\delta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t-\xi_0}{(t-\xi_0)^2+\tau^2}\right)\varphi(t)\,dt\,.$$

Следуя работе [3] , после двукратного интегрирования по частям получим:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\xi_0-\delta_0}^{\xi_0+\delta_0}\frac{\tau}{(t-\xi_0)^2+\tau^2}\,\varphi(t)\,dt = -\int\limits_{\xi_0-\delta_0}^{\xi_0+\delta_0}\ln|t-\xi_0|\,\varphi''(t)\,dt + \left(\varphi'(t)\ln|t-\xi_0| - \frac{\varphi(t)}{t-\xi_0}\right)\Bigg|_{\xi_0-\delta_0}^{\xi_0+\delta_0}. \quad (10)$$

Обозначим $I_0 = [\xi_0-\delta_0,\ \xi_0+\delta_0]$. Учитывая, что в нашей системе координат $\Gamma(x_0) = [\xi_0-\delta_1,\ \xi_0+\delta_2]$, получим:

$$(V_0\Phi)\big(x^0\big) = \int\limits_{\Gamma(x^0)\setminus I_0}\frac{\varphi(t)}{(t-\xi_0)^2}\,dt - \int\limits_{I_0}\ln|t-\xi_0|\,\varphi''(t)\,dt + \left(\varphi'(t)\ln|t-\xi_0| - \frac{\varphi(t)}{t-\xi_0}\right)\Bigg|_{\xi_0-\delta_0}^{\xi_0+\delta_0}.$$

Для проведения дальнейших выкладок необходимо приближенно вычислять значения производных функции φ.

Пусть $\xi \in (s_j, s_{j+1/2}]$. Обозначим

$$K_m(\xi,t) = \left(\frac{\partial^m}{\partial s^m}K(s,t)\right)\bigg|_{s=\xi}, \quad m = 1,\,2,\,\dots\,.$$

Теорема 4. *Для коэффициентов и узлов квадратурной формулы* (5) *при* $\xi \in (s_j, s_{j+1/2}]$ *справедлива оценка:*

$$\left| \frac{d^m}{ds^m}\,\varphi(s)\Big|_{s=\xi} - f^{(m)}(\xi) + \sum_{t_j^{(n)} \notin [s_j, s_{j+1}]} A_j^{(n)} K_m\left(\xi, t_j^{(n)}\right)\left(\varphi(t_j^{(n)}) - \varphi(s_j)\right) \right| \leqslant \frac{\text{const}}{(\xi - s_j)^m} \cdot e^{-c\sqrt{n}}\,.$$

Доказательство. Так как при $s,\, t \in [s_j, s_{j+1}]$ $K(s,t) \equiv 0$, то из уравнения (3) следует, что для каждого $s \in [s_j, s_{j+1}]$

$$\varphi(s) = -\int\limits_{[0,T]\setminus[s_j, s_{j+1}]} K(s,t)\left(\varphi(t) - \varphi(s_j)\right) dt + f(s) - \varphi(s_j).$$

Продифференцируем это равенство m раз по s при $s = \xi$:

$$\frac{d^m}{ds^m}\,\varphi(s)\Big|_{s=\xi} = -\int\limits_{[0,T]\setminus[s_j, s_{j+1}]} K_m(s,t)\left(\varphi(t) - \varphi(s_j)\right) dt + f^{(m)}(\xi)\,.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части этого соотношения, применим составную квадратурную формулу (5), используя только те ее узлы, которые не попадают на отрезок $[s_j, s_{j+1}]$.

Рассмотрим теперь отрезок $[s_{j-1/2}, s_j]$. Анализ производных функции $K(s,t)$, сделанный в [1], показывает, что при всяком целом $k > 0$ подынтегральная функция может быть аналитически продолжена с отрезка

$$\left[s_j - (s_j - s_{j-1/2})(1+\Theta_j)^{-k+1},\; s_j - (s_j - s_{j-1/2})(1+\Theta_j)^{-k}\right]$$

вещественной оси в круг на комплексной плоскости с центром в середине этого отрезка и радиусом

$$r_k = 0{,}5\,(s_j - s_{j-1/2})\big(1 - (1+\Theta_j)^{-1}\big)(1+\Theta_j)^{2-k},$$

причем в этом круге полученная аналитическая функция ограничена величиной

$$\frac{\text{const}}{(\xi - s_j)^{m+1}}\,(1+\Theta_j)^{-k\lambda_j}.$$

Обобщая способ оценки погрешности квадратуры, предложенный в [1], получим утверждение теоремы 4 .

Пусть в обозначениях теоремы 3 точка ξ_0 принадлежит отрезку $[t_k, t_{k-1}]$, лежащему на $[s_j, s_{j+1/2}]$. В соотношении (10) заменим функции $\varphi''(t)$, $\varphi'(t)$ и $\varphi(t)$ на каждом из отрезков $[\xi_0-\delta_1,\, \xi_0-\delta_0]$, $[\xi_0-\delta_0,\, \xi_0+\delta_0]$, $[\xi_0+\delta_0,\, \xi_0+\delta_2]$ интерполяционными многочленами Чебышева по $n_{j,k}$ узлам, используя приближенные значения $\varphi_n(t)$ и значения производных, вычисленных методом, предложенным при доказательстве теоремы 2. После этой замены интегралы, стоящие в правой части (10), могут быть вычислены аналитически. Для вычисления $(V_1\Phi)(x^0)$ используем квадратурную формулу (5), учитывая только узлы, не лежащие на отрезке $[\xi_0 - \delta_1,\, \xi_0 + \delta_2]$.

В результате построен метод, позволяющий вычислить значение нормальной производной решения задачи (1) в произвольной фиксированной точке x^0 границы области с погрешностью порядка $C(x_0)\, e^{-c\sqrt{n}}$, где $C(x^0)$ — постоянная, зависящая только от положения точки x^0 относительно угловых точек границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян И.О.* О численном решении граничных интегральных уравнений второго рода в областях с угловыми точками // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36, № 5. 537–548.
2. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 27. 131–228.
3. *Chandler G.A., Graham I.G.* High-order methods for linear functionals of solutions of second kind integral equations // SIAM J. Numer. Anal. 1988. **25**, N 5. 1118–1137.

Поступила в редакцию
20.01.2000