УДК 519.622 doi 10.26089/NumMet.v20r210

ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. Б. Арушанян[1], С. Ф. Залеткин[2]

Описан один метод по применению рядов Чебышёва для интегрирования канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Этот метод основан на аппроксимации решения задачи Коши, его первой и второй производных частичными суммами смещенных рядов Чебышёва. Коэффициенты рядов вычисляются итерационным способом с применением соотношений, связывающих коэффициенты Чебышёва решения задачи Коши, а также коэффициенты Чебышёва первой производной решения с коэффициентами Чебышёва правой части системы. Неотъемлемым элементом вычислительной схемы является использование формулы численного интегрирования Маркова для вычисления коэффициентов Чебышёва правой части системы. В статье не только сообщаются результаты, полученные численными расчетами, но и делается упор на высокоточном аналитическом представлении решения в виде частичной суммы ряда на промежутке интегрирования.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, канонические системы обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышёва, квадратурные формулы Маркова, полиномиальная аппроксимация.

1. Введение. Рассматривается задача Коши для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{1}$$

при условии, что функция $f(x, y, y')$ имеет в области определения системы достаточное число непрерывных частных производных. Предполагается также, что на отрезке $[x_0,\, x_0 + X]$ существует единственное решение задачи Коши (1).

Предлагается приближенный метод решения задачи (1), основанный на разложении правой части системы $f(x, y(x), y'(x))$ на элементарном сегменте $x \in [x_0,\, x_0 + h]$, $h \leqslant X$, в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big) = \Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

по смещенным многочленам Чебышёва первого рода $T_i^*(\alpha) = T_i(2\alpha - 1)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Такой ряд будем называть смещенным рядом Чебышёва, а коэффициенты ряда — коэффициентами Чебышёва. Если коэффициенты $a_i^*[\Phi]$ этого разложения известны, то можно выписать следующие простые соотношения, связывающие коэффициенты Чебышёва $a_i^*[y']$ первой производной решения $y'(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, с коэффициентами Чебышёва $a_i^*[y''] = a_i^*[\Phi]$ второй производной решения $y''(x_0 + \alpha h) = \Phi(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$:

$$a_i^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\left(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\right), \quad i > 0,$$

$$\frac{1}{2}\, a_0^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = y_0' + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\, a_1^*[\Phi]\right) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\right) a_j^*[\Phi].$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: arush@srcc.msu.ru

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: iraz@srcc.msu.ru

Имеют место следующие соотношения, связывающие коэффициенты Чебышёва $a_i^*[y]$ самой функции $y(x_0+\alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, с коэффициентами Чебышёва второй производной этой функции:

$$a_i^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = \frac{h^2}{16}\,\frac{(i+1)a_{i-2}^*[\Phi] - 2ia_i^*[\Phi] + (i-1)a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i^2-1)}\,, \qquad i > 2,$$

$$a_2^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = \frac{h^2}{96}\big(3a_0^*[\Phi] - 4a_2^*[\Phi] + a_4^*[\Phi]\big),$$

$$a_1^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = \frac{h}{2}\left[y_0' + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{3}{4}\,a_1^*[\Phi] + \frac{1}{4}a_3^*[\Phi]\right) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\right)a_j^*[\Phi]\right],$$

$$\frac{1}{2}\,a_0^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{2}\,y_0' + \frac{h^2}{32}\big(3a_0^*[\Phi] - 2a_1^*[\Phi] + a_2^*[\Phi]\big) +$$

$$+\frac{h^2}{8}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\right)a_j^*[\Phi] - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j}\right)\frac{a_j^*[\Phi] - a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}\,.$$

Основываясь на выписанных выше соотношениях, решение задачи $y(x)$ и его первую производную $y'(x)$ можно представить на $[x_0,\, x_0+h]$ в виде равномерно сходящихся смещенных рядов Чебышёва

$$y'(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{\infty}}{}' a_i^*[y']T_i^*(\alpha), \qquad y(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{\infty}}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha)$$

(штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$). Замена рядов для $f(x, y(x), y'(x))$, $y'(x)$ и $y(x)$ частичными суммами соответственно k-го, $(k+1)$-го и $(k+2)$-го порядков

$$\Phi(\alpha) \approx {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^*[\Phi]T_i^*(\alpha), \qquad y'(x_0+\alpha h) \approx {\sum_{i=0}^{k+1}}{}' a_i^*[y']T_i^*(\alpha), \qquad y(x_0+\alpha h) \approx {\sum_{i=0}^{k+2}}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha) \tag{2}$$

и применение формулы численного интегрирования Маркова [1, 2] для вычисления коэффициентов Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$

$$a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,T_i^*(\alpha)\,d\alpha \tag{3}$$

приводят к системе конечных уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части $f(x, y(x), y'(x))$, которая решается методом последовательных приближений. Вместе с решением этой системы определяются также приближенные коэффициенты Чебышёва $a_i^*[y]$, $a_i^*[y']$ функций $y(x)$ и $y'(x)$. Вопросам, относящимся к обоснованию этого метода, его тестированию и сравнению с традиционными численными методами интегрирования задачи (1), посвящены работы [3–10].

2. Отличительные особенности данного подхода и других методов решения дифференциальных уравнений, связанных с многочленами Чебышёва. Рассматриваемый в статье подход отличается от распространенного способа построения многочленного приближения для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, известного как τ-метод, или метод Ланцоша [11, 12]. Независимо от того, используется ли τ-метод с каноническими полиномами (однозначно связанными с заданным дифференциальным уравнением) или в чебышевской форме, построение конечного степенного разложения, т.е. многочленного приближения, выполняется без практического вычисления каких-либо определенных интегралов. Однако стремление избежать вычисления интегралов (которыми определяются коэффициенты Чебышёва) безусловно ведет к ограничению вида дифференциального уравнения, а именно: τ-метод непосредственно применим лишь к линейным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых (в том числе и свободный член уравнения) являются полиномами относительно независимой переменной x. Если коэффициенты линейного дифференциального уравнения являются рациональными функциями от x, то такое уравнение можно записать без знаменателя, умножив его на общий знаменатель всех рациональных дробей коэффициентов уравнения, и привести его к виду линейного уравнения с полиномиальными коэффициентами. Для более общих линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых не обязательно являются полиномами, существует обобщение τ-метода, называемое методом коллокации, или методом избранных точек [11].

Аналогичное ограничение на дифференциальное уравнение присуще и другим приближенным методам, которые основаны на вычислении коэффициентов Чебышёва решения по линейным рекуррентным соотношениям и которые позволяют получать аналитическое выражение решения обыкновенных дифференциальных уравнений в виде линейной суперпозиции многочленов Чебышёва (методы Миллера, Олвера, Кленшоу) [13]. Эти методы также обобщены на такие линейные дифференциальные уравнения, в которых коэффициенты хотя и не являются полиномами, но, по предположению, должны иметь известные коэффициенты Чебышёва.

Однако все эти методы непосредственно применимы только для линейных дифференциальных уравнений. В случае нелинейного дифференциального уравнения обязательно нужна линеаризация данного нелинейного уравнения. Она заключается в замене этого уравнения (например, общим методом Ньютона–Канторовича) последовательностью рекуррентно составляемых линейных уравнений и последующем решении каждого линейного уравнения некоторым из таких методов.

Описанный же в данной статье подход значительно отличается от упомянутых здесь методов. По существу, он основан на использовании формулы численного интегрирования Маркова для вычисления коэффициентов Чебышёва (3) правой части дифференциального уравнения. При этом он не накладывает никаких ограничений на вид дифференциального уравнения (1) и применяется в единообразной форме к решению как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому можно сказать, что в предлагаемом подходе расширена область применимости метода рядов Чебышёва.

3. Цель работы. Основное назначение настоящей статьи состоит в том, чтобы сосредоточить внимание на таком интересном и имеющем принципиальное значение свойстве описываемого метода, как способность с его помощью находить приближенное решение задачи Коши для канонических уравнений второго порядка (1) в аналитической форме, а именно в виде частичной суммы смещенного ряда Чебышёва. Это качество убедительно показывается далее результатами, полученными с применением данного метода к интегрированию дифференциальных уравнений второго порядка, решения которых имеют известные коэффициенты Чебышёва. Эти коэффициенты позволяют оценить абсолютные погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y]$, вычисленных с помощью описанного аналитического метода. Чтобы еще раз подчеркнуть отличительную особенность данного метода, о которой говорилось в предыдущем разделе, множество решаемых ниже дифференциальных задач подобрано так, что большинство из них являются нелинейными. Приводимый в статье круг примеров включает в себя уравнения с решениями в виде степенной, тригонометрической, гиперболической, логарифмической, рациональной функций. Во всех задачах приближенное решение строится в виде частичной суммы (2) на заданном промежутке интегрирования. Вычисления проводились с 15–16 значащими цифрами.

Пример 1. Интегрируется дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(x) = (T_n^*(x))'' + 4\,\frac{-y + (x+1)(y'(x) - (T_n^*(x))') + T_n^*(x) + 5}{(x+1)^2}, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = -72, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

где $T_n^*(x)$ — смещенный многочлен Чебышёва первого рода n-го порядка, $n = 6$. На заданном отрезке решение и его производные представляются в виде частичных сумм (2) при $k = 8$. Вычисленные коэффициенты решения $1/2a_0^*[y]$ и $a_6^*[y]$ равняются соответственно $0{,}5000000000000020 \times 10^1$ и 1. Остальные коэффициенты $a_1^*[y], \ldots, a_5^*[y], a_7^*[y], \ldots, a_{10}^*[y]$ имеют десятичные порядки от 10^{-13} до 10^{-16}. Таким образом, с точностью до ошибок округления найденное методом рядов решение задачи (4) имеет вид $y(x) = 5 + T_6^*(x)$. Все коэффициенты Чебышёва для производной $y'(x)$ решения, кроме первого, третьего и пятого, имеют десятичные порядки 10^{-13}, 10^{-14}. Первый коэффициент $a_1^*[y'] = 24$, третий $a_3^*[y'] = 24$, пятый $a_5^*[y'] = 24$. Итак, вычисленная методом рядов производная решения (с точностью до ошибок округления) представляется в виде

$$y'(x) = 24T_1^*(x) + 24T_3^*(x) + 24T_5^*(x).$$

Последнее равенство совпадает с выражением производной смещенных многочленов Чебышёва первого рода в виде линейной комбинации этих же многочленов при $n = 6$:

$$\bigl(T_n^*(x)\bigr)' = 4n \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} T_{n-1-2j}^*(x).$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть, а в сумме слагаемое, содержащее многочлен $T_0^*(x)$, делится пополам. Заметим, что решение $y(x)$ задачи (4) имеет на отрезке $[0, 1]$ колебательный характер и большую по модулю производную.

Пример 2. Интегрируется система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y_1'' = -2qy_2' - \left(\frac{1 - e^{3-y_1+y_2'/(2q)}}{x+1}\right)^2, \quad y_1(0) = \cos q + 3, \quad y_1'(0) = 2q\sin q, \tag{5}$$

$$y_2'' = 2qy_1' - \bigl(y_2' - 2q(y_1 - 3)\bigr)^2, \quad y_2(0) = -\sin q + 2, \quad y_2'(0) = 2q\cos q, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6}$$

где q — произвольное действительное число. Точным решением задачи (5), (6) является функция $y(x) = \bigl(y_1(x), y_2(x)\bigr)^T$: $y_1(x) = 3 + \cos q(2x-1)$, $y_2(x) = 2 + \sin q(2x-1)$. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ разлагаются на $[0,1]$ в смещенные ряды Чебышёва, коэффициенты которых выражаются через цилиндрические функции:

$$y_1(x) = 3 + \cos q(2x-1) = 3 + J_0(q) + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i J_{2i}(q) T_{2i}^*(x),$$
$$y_2(x) = 2 + \sin q(2x-1) = 2 + 2\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i J_{2i+1}(q) T_{2i+1}^*(x).$$

Здесь $J_m(q)$ — функция Бесселя первого рода порядка m. Первая компонента решения раскладывается в ряд по смещенным многочленам Чебышёва с четными номерами. Вторая компонента решения раскладывается в ряд по смещенным многочленам Чебышёва с нечетными номерами. На заданном интервале приближенное решение и его производные представляются в виде частичных сумм (2) при $k = 11$ для $q = 1/2$. Для первой компоненты решения коэффициент $a_1^*[y_1]$ суммы в (2) имеет десятичный порядок 10^{-16}, остальные коэффициенты с нечетными номерами $a_3^*[y_1], \ldots, a_{13}^*[y_1]$ имеют порядки 10^{-17}, 10^{-18}, 10^{-19}. Абсолютные погрешности коэффициентов $a_0^*[y_1]$, $a_2^*[y_1]$ равны нулю; абсолютные погрешности остальных коэффициентов с четными номерами $a_4^*[y_1], \ldots, a_{12}^*[y_1]$ имеют десятичный порядок 10^{-18}.

Для второй компоненты решения коэффициент $a_2^*[y_2]$ имеет десятичный порядок 10^{-17}, остальные коэффициенты с четными номерами $a_4^*[y_2], \ldots, a_{12}^*[y_2]$ имеют порядки 10^{-18}, 10^{-19}, 10^{-20}. Абсолютные погрешности коэффициентов $a_0^*[y_2]$, $a_1^*[y_2]$ равны нулю. Абсолютные погрешности коэффициентов с нечетными номерами $a_3^*[y_2], \ldots, a_{13}^*[y_2]$ имеют десятичные порядки 10^{-18}, 10^{-19}, 10^{-20}.

Пример 3. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \lambda\sqrt{y'^2 + \lambda^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{7}$$

где λ — произвольное действительное число. Точным решением задачи (7) является гиперболическая функция $y(x) = \operatorname{ch}\lambda x - 1$. Она разлагается на $[0,1]$ в смещенный ряд Чебышёва, коэффициенты которого выражаются через специальные функции следующим образом:

$$y(x) = \operatorname{ch}\lambda x - 1 = -1 + {\sum_{i=0}^{\infty}}' \bigl(e^{\lambda/2} + (-1)^i e^{-\lambda/2}\bigr) I_i(\lambda/2) T_i^*(x).$$

Здесь $I_i(t)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка i, или функция Инфельда. На заданном интервале приближенное решение и его производные представляются в виде частичных сумм (2) при $k = 24$ для $\lambda = 10$. Коэффициенты $a_0^*[y], \ldots, a_9^*[y]$ в этой сумме имеют десятичные порядки от 10^4 до 10^1, а их абсолютные погрешности — порядки 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}. Абсолютные погрешности остальных коэффициентов $a_{10}^*[y], \ldots, a_{26}^*[y]$ в (2) имеют порядки от 10^{-11} до 10^{-15}. Заметим, что функция $y(x)$ в задаче (7) имеет на $[0,1]$ большую производную.

Пример 4. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \frac{4qe^{-y}}{(1+q-2qx)^2}\left(-y' + \frac{4q}{1+q-2qx}\right), \quad y(0) = \ln\frac{1-q}{1+q}, \quad y'(0) = \frac{4q}{1-q^2}, \quad |q| < 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{8}$$

Точным решением задачи (8) является логарифмическая функция $y(x) = \ln\dfrac{1-q+2qx}{1+q-2qx}$. Она разлагается на $[0,1]$ в ряд по смещенным многочленам Чебышёва с нечетными номерами

$$\ln\frac{1-q+2qx}{1+q-2qx} = 4\sum_{i=0}^{\infty}\frac{p^{2i+1}}{2i+1}T_{2i+1}^*(x), \quad p = \frac{1-\sqrt{1-q^2}}{q}.$$

На заданном интервале приближенное решение и его производные представляются в виде частичных сумм (2) при $k = 11$ для $q = 0.1$. Нулевой коэффициент $1/2\, a_0^*[y]$ имеет десятичный порядок 10^{-16}, остальные коэффициенты с четными номерами $a_2^*[y], \dots, a_{12}^*[y]$ имеют десятичные порядки 10^{-17}, 10^{-19}, 10^{-20}. Абсолютная погрешность коэффициента $a_1^*[y]$ имеет десятичный порядок 10^{-15}; абсолютные погрешности остальных коэффициентов с нечетными номерами $a_3^*[y], \dots, a_{13}^*[y]$ имеют десятичные порядки 10^{-18}, 10^{-19}, 10^{-20}.

Пример 5. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = 32py^2 + 512p^2(2x-1)^2y^3, \quad y(0) = \frac{1}{(1-p)^2}, \quad y'(0) = -\frac{16p}{(1-p)^4}, \quad |p| < 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{9}$$

Точным решением задачи (9) является рациональная функция $y(x) = \dfrac{1}{(1-p)^2 - 16p(x^2-x)}$. Она разлагается на $[0, 1]$ в ряд по смещенным многочленам Чебышёва с четными номерами

$$y(x) = \frac{1}{(1-p)^2 - 16p(x^2-x)} = \frac{2}{1-p^2} \sum_{i=0}^{\infty}{}' p^i T_{2i}^*(x).$$

На заданном промежутке приближенное решение и его производные представляются в виде частичных сумм (2) при $k = 15$ для $p = 0.01$. Коэффициент $a_1^*[y]$ имеет десятичный порядок 10^{-16}, остальные коэффициенты с нечетными номерами $a_3^*[y], \dots, a_{17}^*[y]$ имеют десятичные порядки 10^{-17}, 10^{-18}, 10^{-19}, 10^{-20}. Нулевой коэффициент $1/2\, a_0^*[y]$ и коэффициент $a_2^*[y]$ имеют все верные значащие цифры. Абсолютные погрешности остальных коэффициентов с четными номерами $a_4^*[y], \dots, a_{16}^*[y]$ имеют десятичные порядки 10^{-19}, 10^{-20}, 10^{-17}.

4. Заключение. Описанные результаты убедительно иллюстрируют, что применение изложенного в статье метода интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка благоприятствует вычислению с высокой точностью коэффициентов Чебышёва функций, являющихся решением этих уравнений. Таким образом, данный метод можно воспринимать как приближенный аналитический метод интегрирования канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, позволяющий получать решения таких уравнений непосредственно в виде частичных сумм смещенного ряда Чебышёва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* О применении формулы численного интегрирования Маркова в ортогональных разложениях // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2009. № 6. 18–22.
2. *Залеткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**. 1–17.
3. *Залеткин С.Ф.* Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием ортогональных разложений // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 1. 69–85.
4. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О применении ортогональных разложений для приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2010. № 4. 40–43.
5. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышёва // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2012. № 5. 24–30.
6. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Обоснование одного подхода к применению ортогональных разложений для приближенного интегрирования канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 3. 29–33.
7. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* К теории вычисления ортогонального разложения решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 178–184.
8. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе ортогональных разложений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **14**, № 4. 59–68.
9. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сибирские электронные математические известия. 2010. **7**. 122–131.
10. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О вычислении коэффициентов рядов Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2011. **8**. 273–283.

11. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
12. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972.
13. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию
25.12.2018

An Implementation of the Chebyshev Series Method for the Approximate Analytical Solution of Second-Order Ordinary Differential Equations

O. B. Arushanyan [1] **and S. F. Zaletkin** [2]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: arush@srcc.msu.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: iraz@srcc.msu.ru*

Received December 25, 2018

Abstract: A method used to apply the Chebyshev series for solving canonical systems of second-order ordinary differential equations is described. This method is based on the approximation of the Cauchy problem solution and its first and second derivatives by partial sums of shifted Chebyshev series. The coefficients of these series are determined iteratively using the relations relating the Chebyshev coefficients of the solution and its first derivative with the Chebyshev coefficients found for the right-hand side of the canonical system by application of Markov's quadrature formula. The obtained numerical results are discussed and the high-precision analytical representations of the solution are proposed in the form of partial sums of Chebyshev series on a given integration segment.

Keywords: ordinary differential equations of second order, canonical systems of ordinary differential equations, approximate analytical methods, numerical methods, orthogonal expansions, shifted Chebyshev series, Markov's quadrature formulas, polynomial approximation.

References

1. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "Application of Markov's Quadrature in Orthogonal Expansions," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 18–22 (2009) [Moscow Univ. Math. Bull. **64** (6), 244–248 (2009)].

2. S. F. Zaletkin, "Markov's Formula with Two Fixed Nodes for Numerical Integration and Its Application in Orthogonal Expansions," Vychisl. Metody Programm. **6**, 1–17 (2005).

3. S. F. Zaletkin, "Numerical Integration of Ordinary Differential Equations Using Orthogonal Expansions," Mat. Model. **22** (1), 69–85 (2010).

4. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Application of Orthogonal Expansions for Approximate Integration of Ordinary Differential Equations," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 4, 40–43 (2010) [Moscow Univ. Math. Bull. **65** (4), 172–175 (2010)].

5. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Calculation of Expansion Coefficients of Series in Chebyshev Polynomials for a Solution to a Cauchy Problem," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 5, 24–30 (2012) [Moscow Univ. Math. Bull. **67** (5–6), 211–216 (2012)].

6. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "Justification of an Approach to Application of Orthogonal Expansions for Approximate Integration of Canonical Systems of Second Order Ordinary Differential Equations," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 3, 29–33 (2018) [Moscow Univ. Math. Bull. **73** (3), 111–115 (2018)].

7. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "To the Orthogonal Expansion Theory of the Solution to the Cauchy Problem for Second-Order Ordinary Differential Equations," Vychisl. Metody Programm. **19**, 178–184 (2018).

8. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Approximate Integration of Ordinary Differential Equations on the Basis of Orthogonal Expansions," Differen. Uravn. Protsessy Upravl. **14** (4), 59–68 (2009).

9. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Approximate Solution of Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series," Sib. Elektron. Mat. Izv. **7**, 122–131 (2010).

10. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "On Calculation of Chebyshev Series Coefficients for the Solutions to Ordinary Differential Equations," Sib. Elektron. Mat. Izv. **8**, 273–283 (2011).

11. C. Lanczos, *Applied Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956; Fizmatgiz, Moscow, 1961).

12. R. W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1962; Nauka, Moscow, 1972).

13. S. Paszkowski, *Numerical Applications of Chebyshev Polynomials and Series* (PWN, Warsaw, 1975 [in Polish]; Nauka, Moscow, 1983).