

УДК 519.688

doi 10.26089/NumMet.v20r213

ДВУМЕРНАЯ ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ ОТКРЫТОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ЛОВУШКИ**Е. А. Генрих¹, М. А. Боронина²**

Представлена гибридная математическая модель осесимметричной плазменной ловушки, основанная на кинетическом описании для ионной компоненты плазмы и приближении МГД для электронной компоненты. На основе гибридной модели разработан двумерный алгоритм для изучения динамики разлета инжектируемых частиц в поле ловушки. Движение ионной компоненты рассчитывается по методу частиц в ячейках, для расчета магнитного поля и электронной компоненты плазмы используются конечно-разностные схемы. На основе разработанного алгоритма создан комплекс программ для исследования механизмов формирования самосогласованной структуры магнитного поля ловушки.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнения Максвелла, гибридные модели, метод частиц в ячейках.

1. Введение. На сегодняшний день одной из важных задач физики плазмы является создание установок для управляемого термоядерного синтеза (УТС). Эта задача состоит из целого комплекса проблем, которые необходимо решить. Одна из них — это удержание плазмы. Требуется подбирать параметры и создавать такие условия, при которых плазма несмотря на развивающиеся неустойчивости не могла бы покинуть ловушку.

Для систем с магнитным удержанием плазмы первое место занимают закрытые ловушки — токамаки. Самый крупный из них — строящийся международный экспериментальный термоядерный реактор ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor). В токамаках получены режимы с мощностью термоядерных реакций, сравнимой с мощностью нагрева. Однако недостатки токамаков, такие как технологические сложности камеры и магнитной системы, малое значение отношения давления плазмы к давлению удерживающего магнитного поля (β) и необходимость создания и поддержки тока в плазме, вызывают необходимость исследований альтернативных систем с магнитным удержанием плазмы, к которым относятся открытые ловушки.

По сравнению с токамаками открытые ловушки обладают более простой конфигурацией, давление плазмы в них больше, а объем удерживаемой плазмы меньше. Отношение максимального давления плазмы к давлению магнитного поля ловушки в токамаке находится в пределах 0.05–0.1, в то время как в ловушке открытого типа можно обеспечить и большие значения β . Например, на установке ГДЛ (ГазоДинамическая Ловушка) в ИЯФ СО РАН было продемонстрировано устойчивое удержание плазмы с $\beta = 0.6$ и температурой электронов порядка 1 кЭв [1]. В настоящее время в ИЯФ СО РАН разрабатывается новая концепция эффективного удержания плазмы в диамагнитном режиме (или “bubble” regime) работы ГДЛ [2]. В этом режиме давление плазмы близко к теоретическому пределу ($\beta = 1$), магнитное поле в занятой плазмой области близко к нулю, а в тонком слое на границе плазмы быстро возрастает диамагнитный “пузырь”. Кроме того, в ИЯФ СО РАН сооружается установка САТ (Compact Axisymmetric Toroid), нацеленная на изучение обращения поля в осесимметричном пробкотроне с мощной атомарной инжекцией и, в перспективе, на демонстрацию диамагнитного удержания [3].

Использование принципа диамагнитного удержания плазмы в открытой ловушке представляет большой интерес, так как это дает принципиальную возможность создания компактного термоядерного реактора. Для подтверждения этой концепции необходимо проведение детального исследования динамики плазмы и формирования необходимой самосогласованной структуры магнитного поля ловушки на основе численного моделирования. Моделирование позволит дать рекомендации по выбору параметров, обеспечивающих устойчивость создаваемой конфигурации.

Наиболее полно плазма описывается в кинетической модели (уравнение Больцмана или уравнения Власова). Заряды и токи, рассчитанные по функциям распределения частиц, через уравнения Максвелла

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), просп. Лаврентьева, д. 6, 630090, Новосибирск; науч. сотр., e-mail: mesyats@gmail.com

² Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), просп. Лаврентьева, д. 6, 630090, Новосибирск; науч. сотр., e-mail: boronina@ssd.sgcc.ru

определяют электромагнитные поля. Хотя кинетическая модель хорошо описывает физику, она является затратной в вычислительном отношении [4, 5] по сравнению с жидкостной моделью.

Модель магнитной гидродинамики (МГД) описывает плазму на основе макроскопических величин (моментов скорости распределения, таких как плотность, средняя скорость и средняя энергия). Уравнения для макроскопических величин, называемые уравнениями МГД, получаются путем взятия моментов уравнения Больцмана или уравнения Власова.

Гибридная модель представляет собой комбинацию жидкостной и кинетической моделей [6, 7]. Некоторые компоненты системы рассматриваются в ней как жидкость, а другие кинетически в зависимости от масштабов моделируемых процессов. Такой подход позволяет достаточно подробно воспроизвести физические процессы и в то же время экономит время счета.

В настоящей работе представлена гибридная численная модель осесимметричной открытой ловушки, основанная на кинетическом приближении для ионной компоненты и приближении магнитной гидродинамики для замагниченной электронной компоненты. Такая модель позволит учитывать большую разницу пространственно-временных масштабов, которые характерны для рассматриваемой задачи.

2. Постановка задачи. Основные уравнения. В начальный момент времени внутри цилиндрической пробочной ловушки радиуса R и длины L находится фоновая водородная плазма плотности $n_0 = \text{const}$. Пробки в ловушке создаются двумя коаксиальными круглыми катушками с током, расположенными у краев. В центре области магнитное поле равно H_0 . Далее в центр области с постоянной скоростью инжектируются нейтральные атомы, ионизация которых приводит к рождению ионов и электронов. В силу аксиальной симметрии задача рассматривается в двумерной цилиндрической постановке.

В кинетическом приближении функция распределения ионов $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ удовлетворяет уравнению Власова

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{F}_\alpha = Z_\alpha e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) + \mathbf{R}_\alpha. \tag{2}$$

Индексом α помечены величины, относящиеся к ионам: m_α — масса иона сорта α , $Z_\alpha e$ — заряд иона; в общем случае сортов ионов может быть несколько, в данной задаче мы рассматриваем один сорт; \mathbf{R}_α — сила трения между ионами сорта α и электронами.

Электрическое и магнитное поле удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E},$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{4}$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{j} = e(Z_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha - n_e \mathbf{V}_e), \quad \rho = e(Z_\alpha n_\alpha - n_e).$$

Здесь \mathbf{V}_α — средняя скорость ионной компоненты, \mathbf{V}_e — скорость электронной компоненты плазмы, n_α и n_e — плотность ионов и электронов.

Уравнения движения и изменения внутренней энергии в приближении безмассовых электронов имеют следующий вид:

$$\frac{dn_e}{dt} + \text{div}(n_e \mathbf{V}_e) = 0, \quad -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{V}_e, \mathbf{H}] - \frac{\nabla p_e}{n_e} + \mathbf{R}_e = 0.$$

Здесь $\mathbf{R}_e = -m_e \frac{\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_\alpha}{\tau_{e\alpha}}$ — сила трения между электронами и ионами сорта α [8] и $\tau_{e\alpha}$ — характерное время электрон-ионных столкновений.

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \nabla) T_e \right) = (\gamma - 1)(Q_e - \text{div } \mathbf{q}_e - p_e \text{div } \mathbf{V}_e),$$

где T_e — температура электронов, $p_e = n_e T_e$ — давление электронной компоненты, $Q_e = j^2/\sigma$ — нагрев электронов, вызванный трением об ионы, $\sigma = n_e e^2 \tau_{e\alpha}/m_e$, поток тепла $\mathbf{q}_e = -\lambda \nabla T_e$, λ — коэффициент теплопроводности, $\gamma = 5/3$ — показатель адиабаты.

Плотность n_α и средняя скорость \mathbf{v}_α ионов определяется по функции распределения $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:

$$n_\alpha(\mathbf{r}) = \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r})} \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

В методе частиц в ячейках [9] уравнение Власова (1)–(2) сводится к уравнениям характеристик, которые являются уравнениями движения отдельных ионов:

$$\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \mathbf{v}_\alpha, \quad m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = Z_\alpha e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) + \mathbf{R}_\alpha.$$

Считаем, что плазма является квазинейтральной

$$n_e = Z_\alpha n_\alpha,$$

поэтому в системе уравнений Максвелла не используется уравнение Пуассона (4). Уравнение (5) также опускаем, так как для выполнения его достаточно, чтобы поле в начальный момент времени удовлетворяло этому условию. Поскольку моделируемые процессы нерелятивистские, током смещения можно пренебречь. Тогда в уравнении (3) производная электрического поля по времени равна нулю и можно выразить ток через магнитное поле

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}.$$

Член, отвечающий за нагрев электронов в правой части уравнения теплопроводности, можно переписать в виде

$$Q_e = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{c \text{rot } \mathbf{H}}{4\pi} \right)^2.$$

Осталось выписать силу трения \mathbf{R}_α . Величины \mathbf{R}_e и \mathbf{R}_α связаны соотношением

$$\mathbf{R}_e n_e = -\mathbf{R}_\alpha n_\alpha.$$

Поэтому в силу квазинейтральности получим

$$\mathbf{R}_\alpha = -\mathbf{R}_e Z_\alpha = m_e Z_\alpha \frac{\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_\alpha}{\tau_{e\alpha}}.$$

3. Система уравнений в безразмерных переменных. Используем в качестве характерных масштабов следующие величины: n_0 — плотность фоновой плазмы, H_0 — величина магнитного поля в центре области в начальный момент времени, $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi m_i n_0}$ — альфвеновская скорость, c/ω_{pi} — длина, $1/\omega_{ci}$ — время, температура $T_0 = H_0^2 / 8\pi n_0$. Здесь $\omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i}}$ — ионная плазменная частота, $\omega_{ci} = \frac{eH_0}{cm_i}$ — ионная циклотронная частота, $M_\alpha = m_\alpha/m_i$. Тогда в безразмерных переменных система уравнений запишется в следующем виде:

а) уравнения движения ионов

$$\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \mathbf{v}_\alpha, \quad \frac{M_\alpha}{Z_\alpha} \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{H}] - \kappa(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_e), \quad \kappa = cm_e/eH_0\tau_{e\alpha}; \quad (6)$$

б) уравнения для электронной компоненты

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{V}_e, \mathbf{H}] - \frac{\nabla p_e}{2n_e} + \kappa(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_e), \quad (7)$$

$$n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \nabla) T_e \right) = (\gamma - 1) \left(2\kappa \frac{1}{n_e} (\text{rot } \mathbf{H})^2 + \kappa_1 \text{div } \nabla T_e - p_e \text{div } \mathbf{v}_e \right), \quad \kappa_1 = 4\pi e\lambda/H_0c;$$

в) уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = Z_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha - n_e \mathbf{v}_e = n_e (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_e),$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}. \quad (8)$$

Примечание. Заметим, что выражение $\kappa(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_e)$ в уравнения (6)–(7) входит с разными знаками. При подстановке электрического поля в уравнение для вычисления скоростей ионов эта компонента взаимно уничтожается. Переобозначим $\mathcal{E} = \mathbf{E} - \kappa(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_e)$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot}(\mathcal{E} + \kappa(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_e)).$$

4. Система уравнений в цилиндрических координатах. Выпишем полную систему уравнений в цилиндрических координатах для водородной плазмы ($Z_\alpha = 1$). Вклад диффузии в нагрев небольшой, поэтому считаем $\kappa_1 = 0$. Рассматриваемая задача аксиально симметрична ($\partial/\partial\varphi = 0$), поэтому исключаем из уравнений производные по углу. Таким образом, в цилиндрических координатах переменные зависят только от (r, z) . Координаты ионов: $\mathbf{r} = (r, z)$, скорость ионов: $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha r}, v_{\alpha\varphi}, v_{\alpha z})$, средняя скорость ионов: $\mathbf{V}_\alpha = (V_{\alpha r}, V_{\alpha\varphi}, V_{\alpha z})$, скорость электронов: $\mathbf{V}_e = (V_{er}, V_{e\varphi}, V_{ez})$, магнитное поле: $\mathbf{H} = (H_r, H_\varphi, H_z)$, электрическое поле: $\mathbf{E} = (E_r, E_\varphi, E_z)$. Тогда исходная система уравнений в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

а) уравнения движения ионов

$$\begin{aligned} \frac{dr_\alpha}{dt} &= v_{\alpha r}, & \frac{dz_\alpha}{dt} &= v_{\alpha z}, \\ \frac{dv_{\alpha r}}{dt} &= (\mathcal{E}_r + v_{\alpha\varphi}H_z - v_{\alpha z}H_\varphi) + \frac{v_{\alpha\varphi}^2}{r}, \\ \frac{dv_{\alpha\varphi}}{dt} &= (\mathcal{E}_\varphi + v_{\alpha z}H_r - v_{\alpha r}H_z) + \frac{v_{\alpha\varphi}v_{\alpha r}}{r}, \\ \frac{dv_{\alpha z}}{dt} &= (\mathcal{E}_z + v_{\alpha r}H_\varphi - v_{\alpha\varphi}H_r) + v_{\alpha\varphi}H_r; \end{aligned}$$

б) уравнения для электронной компоненты плазмы

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r &= V_{ez}H_\varphi - V_{e\varphi}H_z - \frac{1}{2n_e} \frac{\partial p_e}{\partial r}, & \mathcal{E}_\varphi &= V_{er}H_z - V_{ez}H_r, & \mathcal{E}_z &= V_{e\varphi}H_r - V_{er}H_\varphi - \frac{1}{2n_e} \frac{\partial p_e}{\partial z}, \\ n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) T_e \right) &= -(\gamma - 1)n_e T_e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{er}) + \frac{\partial V_{ez}}{\partial z} \right) + \\ &+ (\gamma - 1) \left[2\kappa \frac{1}{n_e} \left(\left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} \right)^2 \right) \right]; \end{aligned}$$

в) уравнения Максвелла

$$n_\alpha V_{\alpha r} - n_e V_{er} = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad n_\alpha V_{\alpha\varphi} - n_e V_{e\varphi} = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}, \quad n_\alpha V_{\alpha z} - n_e V_{ez} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{E}_\varphi + \kappa(\mathbf{v}_{\alpha\varphi} - \mathbf{v}_{e\varphi})), \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{E}_r + \kappa(\mathbf{V}_{\alpha r} - \mathbf{V}_{er})) + \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{E}_z + \kappa(\mathbf{V}_{\alpha z} - \mathbf{V}_{ez})), \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\mathcal{E}_\varphi + r\kappa(\mathbf{V}_{\alpha\varphi} - \mathbf{V}_{e\varphi})), \end{aligned}$$

где электрическое поле $\mathbf{E} = \mathcal{E} + \kappa(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_e)$.

Магнитное поле $\mathbf{B}_r(r, z)$ и $\mathbf{B}_z(r, z)$ в начальный момент времени рассчитывается как поле соленоида и двух катушек с током, расположенных по z у границ и создающих магнитные пробки. Имеем $\mathbf{B}_\varphi = 0$. Скорости ионов фона нулевые. Плотность фоновых частиц постоянна $n(r, z) = n_0$. Ионы либо задаются изначально как N частиц, заполняющих область радиуса R_0 , либо инжектируются на каждом временном шаге в центр по оси z . Скорости частиц в облаке $v_{\alpha r} = v_0 r/R_0$, $v_{\alpha\varphi} = 0$, $v_{\alpha z} = v_0 z/R_0$, v_0 — максимальная скорость ионов облака.

Граничные условия для $E_z, B_z, n, T, V_{ez}, V_{\alpha z}$ в центре области имеют вид $\left. \frac{\partial g(t, r, z)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$, значения остальных функций в $r = 0$ нулевые. На внешних границах для всех функций задаются невозмущенные граничные условия. Это ограничивает время счета тем моментом, когда возмущения достигнут границ.

5. Алгоритм численного решения. Введем по направлениям r и z равномерную сетку с шагами h_1 и h_2 соответственно. В целых узлах $r_i = ih_1$, $z_k = kh_2$ вычисляются сеточные значения V_r , \mathcal{E}_r , H_r , в серединах граней ячеек (по z) $r_i, z_{k-1/2}$ — значения V_φ , \mathcal{E}_φ , H_φ , в центрах ячеек $r_{i-1/2}, z_{k-1/2}$ — значения n , T , V_z , \mathcal{E}_z , H_z . Временной шаг — τ .

5.1. Решение уравнений движения ионов. Схема Бориса. На первом этапе решаются уравнения движения ионов методом частиц в ячейках по схеме Бориса [9, 10]. В методе частиц в ячейках переход на лагранжеву сетку, связанную с частицами, и обратно на эйлерову пространственную сетку осуществляется при помощи аппроксимирующей функции — ядра модельной частицы. Используем в качестве такой функции билинейную интерполяцию (PIC-ядро). Здесь \mathcal{E} , H — значения полей, вычисленные в местоположении частицы (r, z) по значениям в узлах сетки.

На каждом временном шаге m сначала вычисляются скорости ионов в декартовой системе координат:

$$v_{\alpha r}^m = v_{\alpha r}^m + \tau(\mathcal{E}_r^m + v_{\alpha\varphi}^m H_z^m - v_{\alpha z}^m H_\varphi^m), \quad v_{\alpha\varphi}^m = v_{\alpha\varphi}^m + \tau(\mathcal{E}_\varphi^m + v_{\alpha z}^m H_r^m - v_{\alpha r}^m H_z^m).$$

Далее по ним вычисляются скорости и координаты в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} v_{\alpha z}^{m+1} &= v_{\alpha z}^m + \tau(\mathcal{E}_z^m + v_{\alpha r}^m H_\varphi^m - v_{\alpha\varphi}^m H_r^m), \\ z_\alpha^{m+1} &= z_\alpha^m + \tau v_{\alpha z}^{m+1}, \quad x = r_\alpha^m + \tau v_{\alpha r}^*, \quad y = \tau v_{\alpha\varphi}^*, \\ r_\alpha^{m+1} &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \alpha = z/r_\alpha^{m+1}, \quad \sin \alpha = y/r_\alpha^{m+1}, \\ v_{\alpha r}^{m+1} &= v_{\alpha r}^* \cos \alpha + v_{\alpha\varphi}^* \sin \alpha, \quad v_{\alpha\varphi}^{m+1} = v_{\alpha\varphi}^* \cos \alpha - v_{\alpha r}^* \sin \alpha. \end{aligned}$$

5.2. Вычисление плотности и средней скорости ионов. Для перехода на эйлерову сетку необходимо вычислить плотности ионов и их средние скорости. Для этого вычислим сначала площадь ячейки $[r_{i-1}, r_i] \times [z_{k-1}, z_k]$

$$S_{\text{cell } i-1/2} = \pi r_i^2 - \pi r_{i-1}^2 = 2\pi h_1 r_{i-1/2}$$

и ее объем

$$V_{\text{cell } i-1/2} = S h_2 = 2\pi h_1 h_2 r_{i-1/2} = V_{i-1/2}.$$

Сеточное значение плотности равно

$$n_{i-1/2, k-1/2} = \frac{\sum_j (\delta q_j)_{i-1/2, k-1/2}}{V_{\text{cell } i-1/2}},$$

где $j = 1, \dots, N$ — номер модельной частицы, δq_j — часть полного заряда частицы q_j , попавшая в узел сетки.

Аналогичным образом по скоростям отдельных ионов $v_\alpha j$ вычисляем среднюю скорость ионов в узлах сетки

$$V_{\alpha i-1/2, k-1/2} = \frac{\sum_j \delta(q_j v_{\alpha j})_{i-1/2, k-1/2}}{n_{i-1/2, k-1/2} V_{\text{cell } i-1/2}}.$$

5.3. Вычисление средней скорости электронов. Из уравнений (9) определяем скорости электронов ($V_{er}, V_{e\varphi}, V_{ez}$):

$$\begin{aligned} V_{er i, k}^{m+1} &= V_{er i, k}^{m+1} + 4 \frac{H_\varphi^m_{i, k+1/2} - H_\varphi^m_{i, k-1/2}}{h_2 \left(n_{i+1/2, k+1/2}^{m+1} + n_{i-1/2, k+1/2}^{m+1} + n_{i+1/2, k-1/2}^{m+1} + n_{i-1/2, k-1/2}^{m+1} \right)}, \\ V_{e\varphi i, k-1/2}^{m+1} &= V_{e\varphi i, k-1/2}^{m+1} - \frac{2}{n_{i+1/2, k-1/2}^{m+1} + n_{i-1/2, k-1/2}^{m+1}} \left(\frac{H_r^m_{i, k} - H_r^m_{i, k-1}}{h_2} - \frac{H_z^m_{i+1/2, k-1/2} - H_z^m_{i-1/2, k-1/2}}{h_1} \right), \\ V_{ez i-1/2, k-1/2}^{m+1} &= V_{ez i-1/2, k-1/2}^{m+1} - \frac{r_i H_\varphi^m_{i, k-1/2} - r_{i-1} H_\varphi^m_{i-1, k-1/2}}{r_{i-1/2} n_{i-1/2, k-1/2}^{m+1} h_1}. \end{aligned}$$

5.4. Вычисление электромагнитных полей. Электрические поля определяются из уравнений движения для электронов. Для начала получим промежуточные значения поля \mathcal{E} (позначим их $*$) без

учета градиента давления, которое будет добавлено позже. Это сделано для аккуратного учета вклада градиентов плотности и температуры в магнитное поле. Такой метод позволяет использовать более компактный шаблон схемы и уменьшить погрешности:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{r\ i,k}^* &= \bar{V}_{ez\ i,k}^{m+1} \frac{H_{\varphi\ i,k+1/2}^m + H_{\varphi\ i,k-1/2}^m}{2} - \bar{H}_{z\ i,k}^m \frac{V_{e\varphi\ i,k+1/2}^{m+1} + V_{e\varphi\ i,k-1/2}^{m+1}}{2}, \\ \mathcal{E}_{z\ i-1/2,k-1/2}^* &= \bar{H}_r^{m+1} \frac{V_{e\varphi\ i,k-1/2}^{m+1} + V_{e\varphi\ i-1,k-1/2}^{m+1}}{2} - \bar{V}_{er\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} \frac{H_{\varphi\ i,k-1/2}^m + H_{\varphi\ i-1,k-1/2}^m}{2}, \\ \mathcal{E}_{\varphi\ i,k-1/2}^{m+1} &= \frac{\left(V_{er\ i,k}^{m+1} + V_{er\ i,k-1}^{m+1} \right) \left(H_{z\ i+1/2,k-1/2}^m + H_{z\ i-1/2,k-1/2}^m \right)}{4} - \\ &\quad - \frac{\left(V_{ez\ i+1/2,k-1/2}^{m+1} + V_{ez\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} \right) \left(H_r^{m+1} \right)}{4}. \end{aligned}$$

Здесь значения функций, обозначенные сверху чертой, получены усреднением значений соответствующей функции в ближайших точках:

$$\bar{G}_{i-1/2,k-1/2} = \frac{G_{i,k} + G_{i-1,k} + G_{i,k-1} + G_{i-1,k-1}}{4}.$$

Затем вычисляем магнитное поле:

$$\begin{aligned} H_{r\ i,k}^{m+1} &= H_{r\ i,k}^m + \frac{\tau}{h_2} \left(\mathcal{E}_{\varphi\ i,k+1/2}^{m+1} - \mathcal{E}_{\varphi\ i,k-1/2}^{m+1} \right) + \frac{\tau\kappa}{h_2} \left(V_{\alpha\varphi\ i,k+1/2}^m - V_{\alpha\varphi\ i,k-1/2}^m - V_{e\varphi\ i,k-1/2}^m + V_{e\varphi\ i,k+1/2}^m \right), \\ H_{\varphi\ i,k-1/2}^{m+1} &= H_{\varphi\ i,k-1/2}^m + \frac{\tau}{h_1} \left(\mathcal{E}_{z\ i+1/2,k-1/2}^* - \mathcal{E}_{z\ i-1/2,k-1/2}^* \right) + \\ &\quad + \frac{\tau\kappa}{h_1} \left(V_{\alpha z\ i+1/2,k-1/2}^m - V_{\alpha z\ i-1/2,k-1/2}^m - V_{ez\ i+1/2,k-1/2}^m + V_{ez\ i-1/2,k-1/2}^m \right) - \\ &\quad - \frac{\tau}{h_2} \left(\mathcal{E}_{r\ i,k}^* - \mathcal{E}_{r\ i,k-1}^* \right) - \frac{\tau\kappa}{h_2} \left(V_{\alpha r\ i,k}^m - V_{\alpha r\ i,k-1}^m - V_{er\ i,k-1}^m + V_{er\ i,k}^m \right) + \\ &\quad + \frac{(P_{i,k} - P_{i,k-1})}{\left(n_{i+1/2,k-1/2}^{m+1} + n_{i-1/2,k-1/2}^{m+1} \right)}, \\ H_{z\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} &= H_{z\ i-1/2,k-1/2}^m - \frac{\tau}{h_1 r_{i-1/2}} \left(r_i \mathcal{E}_{\varphi\ i,k-1/2}^{m+1} - r_{i-1} \mathcal{E}_{\varphi\ i-1,k-1/2}^{m+1} \right) - \\ &\quad - \frac{\tau\kappa}{h_1 r_{i-1/2}} \left(r_i V_{\alpha\varphi\ i,k-1/2}^m - r_i V_{\alpha\varphi\ i,k-1/2}^m - r_{i-1} V_{e\varphi\ i-1,k-1/2}^m + r_{i-1} V_{e\varphi\ i-1,k-1/2}^m \right), \\ P_{i,k} &= \frac{\tau}{4h_1 h_2} \left(n_{i+1/2,k+1/2}^{m+1} - n_{i-1/2,k-1/2}^{m+1} \right) \left(T_{i-1/2,k+1/2} - T_{i+1/2,k-1/2} \right) + \\ &\quad + \frac{\tau}{4h_1 h_2} \left(n_{i+1/2,k-1/2}^{m+1} - n_{i-1/2,k+1/2}^{m+1} \right) \left(T_{i+1/2,k+1/2} - T_{i-1/2,k-1/2} \right). \end{aligned}$$

Далее добавляем неучтенные ранее члены $-\frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial r} (nT)$, $-\frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial z} (nT)$ и получаем окончательные значения полей \mathcal{E}_r и \mathcal{E}_z на временном шаге с номером $m+1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{r\ i,k}^{m+1} &= \mathcal{E}_{r\ i,k-1/2}^* - \frac{1}{h_1 n_{i,k}^{m+1}} \left(n_{i+1/2,k+1/2}^{m+1} T_{i+1/2,k+1/2}^m + n_{i+1/2,k-1/2}^{m+1} T_{i+1/2,k-1/2}^m - \right. \\ &\quad \left. - n_{i-1/2,k+1/2}^{m+1} T_{i-1/2,k+1/2}^m - n_{i-1/2,k-1/2}^{m+1} T_{i-1/2,k-1/2}^m \right), \\ \mathcal{E}_{z\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} &= \mathcal{E}_{z\ i-1/2,k-1/2}^* - \frac{n_{i-1/2,k+1/2}^{m+1} T_{i-1/2,k+1/2}^m - n_{i-1/2,k+3/2}^{m+1} T_{i-1/2,k-3/2}^m}{2h_2 \left(n_{i-1/2,k+1/2}^{m+1} + n_{i-1/2,k-3/2}^{m+1} \right)}. \end{aligned}$$

5.5. Вычисление температуры электронов. На последнем этапе решаем уравнение для температуры электронов. Используем схему расщепления, каждый из этапов которой для повышения устойчиво-

сти реализуется по неявной схеме с учетом знака скорости:

$$\begin{aligned}
T_{i-1/2,k-1/2}^{m+1/2} = & T_{i-1/2,k-1/2}^m - \tau \bar{V}_{er\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} \Delta_r T_{i-1/2,k-1/2}^{m+1/2} + \\
& + \tau(\gamma - 1) T_{i-1/2,k-1/2}^m \left(\frac{r_i V_{er\ i,k-1/2}^{m+1} - r_{i-1} V_{er\ i-1,k-1/2}^{m+1}}{h_1 r_{i-1/2}} + \frac{V_{ez\ i-1/2,k+1/2}^{m+1} - V_{ez\ i-1/2,k-3/2}^{m+1}}{2h_2} \right) + \\
& + \frac{2\tau\kappa(\gamma - 1)}{\left(n_{i-1/2,k-1/2}^{m+1}\right)^2} \left[\left(\frac{\bar{H}_{\varphi\ i-1/2,k+1/2}^{m+1} - \bar{H}_{\varphi\ i-1/2,k-3/2}^{m+1}}{2h_2} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\bar{H}_{r\ i-1/2,k}^{m+1} - \bar{H}_{r\ i-1/2,k-1}^{m+1}}{2h_2} - \frac{\bar{H}_{z\ i+1/2,k-1/2}^{m+1} - \bar{H}_{z\ i-3/2,k-1/2}^{m+1}}{2h_1} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left(\frac{r_i H_{\varphi\ i,k-1/2}^{m+1} - r_{i-1} H_{\varphi\ i-1,k-1/2}^{m+1}}{h_1 r_{i-1/2}} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

На следующем полушаге по времени получим

$$T_{i-1/2,k-1/2}^{m+1} = T_{i-1/2,k-1/2}^{m+1/2} - \tau V_{ez\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} \Delta_z T_{i-1/2,k-1/2}^{m+1},$$

$$\text{где } \begin{cases} \Delta_r T_{i-1/2,k-1/2} = \begin{cases} (T_{i-1/2,k-1/2} - T_{i-3/2,k-1/2}) / h_1, & \bar{V}_{er\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} \leq 0, \\ (T_{i+1/2,k-1/2} - T_{i-1/2,k-1/2}) / h_1, & \bar{V}_{er\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} > 0, \end{cases} \\ \Delta_z T_{i-1/2,k-1/2} = \begin{cases} (T_{i-1/2,k-1/2} - T_{i-1/2,k-3/2}) / h_2, & \bar{V}_{ez\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} \leq 0, \\ (T_{i-1/2,k+1/2} - T_{i-1/2,k-1/2}) / h_2, & \bar{V}_{ez\ i-1/2,k-1/2}^{m+1} > 0. \end{cases} \end{cases}$$

6. Тест 1. Разлет облака плазмы. Размеры пробочной ловушки: радиус $R = 1$ м, длина $L = 400$ см. Плотность водородной фоновой плазмы $n_0 = 10^{13}$ см $^{-3}$. Магнитное поле задается как поле соленоида с двумя катушками по краям области, в центре области $H_0 = 62$ Гс, пробочное отношение 2. Скорость ионов облака в начальный момент времени 6.9×10^6 см/сек. В центре области $(r, z) = (0, L/2)$, в начальный момент времени находится облако плазмы радиуса $R_0 = 2.88$ см. Трение не учитывается: $\kappa = 0$. Счетные параметры: сетка 50×200 , количество модельных частиц в облаке 100 000.

На рис. 1 представлена зависимость от времени кинетической энергии ионов фона и облака и энергии магнитного поля относительно их начального значения. Видно, что кинетическая энергия ионов облака W_{obl} переходит в энергию магнитного поля W_H и в кинетическую энергию ионов фона W_{fon} . Полная энергия сохраняется с точностью до 0.1%. На рис. 2 изображены плотность ионов фона и плотность облака. Ионы облака вытесняют ионы фона. Внутри облака формируется область пониженного давления магнитного поля.

7. Тест 2. Инжекция частиц. Поскольку модельные частицы, в двумерной геометрии представляемые точкой, в трехмерной геометрии являются кольцами, то необходимо правильно задавать распределение вектора скорости при инжекции. Если задать скорости частиц равномерно по углу, то при разлете частиц в отсутствие внешних полей плотность будет все больше вытягиваться вдоль оси z . Для решения этой проблемы можно либо задавать разные массы частиц, либо сгущать количество частиц в направлении r . Нами был реализован второй вариант. На рис. 3 показано распространение частиц при отсутствии внешних полей. Слева показан график количества частиц, справа график плотности. Видно, что плотность частиц распространяется во все стороны с одинаковой скоростью, плотность везде по дуге имеет одинаковые значения, в то время как количество частиц к оси z уменьшается. Таким образом, инжекция частиц в цилиндрической геометрии производится корректно.

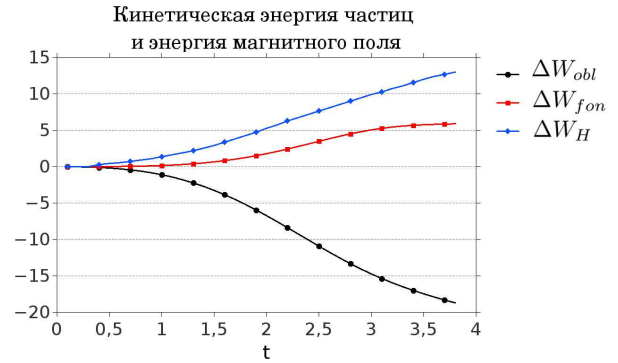


Рис. 1. Изменение со временем энергии магнитного поля и кинетической энергии ионов фона и облака

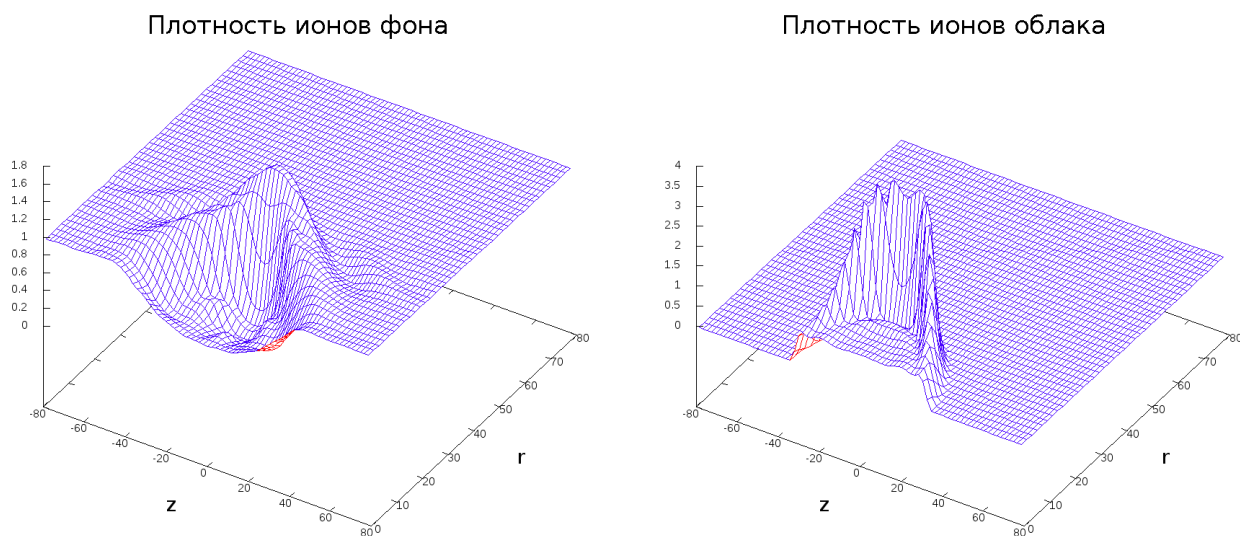


Рис. 2. Плотность ионов фона (слева) и облака (справа) в момент времени $t = 4$

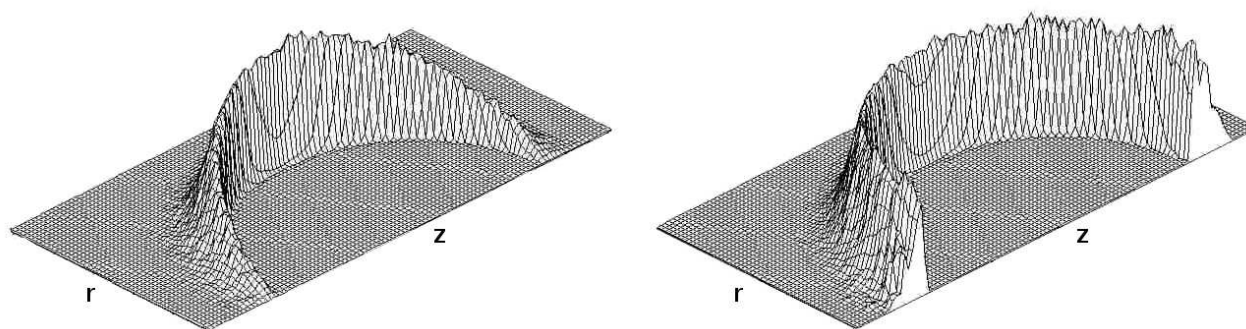


Рис. 3. Количество частиц в ячейке (слева) и плотность (справа) при однократной инжекции частиц

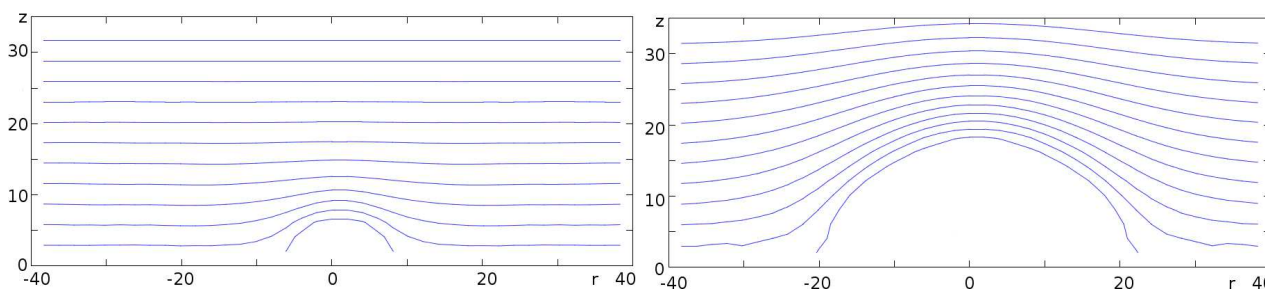


Рис. 4. Силовые линии магнитного поля при непрерывной инжекции частиц для момента времени $t = 1$ мкс и $t = 3$ мкс

При непрерывной инжекции с теми же параметрами ловушки, что и выше, в центре области непрерывно появляются частицы, средняя скорость которых 4×10^6 см/сек. В единицу времени инжектируется 10^4 модельных частиц. Как видно из рис. 4, на котором изображены силовые линии магнитного поля, инжектируемые частицы вытесняют магнитное поле, формируя магнитную каверну. Так же, как и в случае с облаком, ионы фона вытесняются инжектируемыми ионами.

7. Заключение. На основе гибридной модели разработан численный алгоритм и комплекс программ для изучения динамики разлета инжектируемых частиц в поле ловушки и исследования механизмов формирования самосогласованной структуры магнитного поля. В модели учтено наличие силы трения между ионами и электронами. Тестовые расчеты продемонстрировали работоспособность и эффективность созданного алгоритма. Показано, что в расчетах наблюдается вытеснение инжектируемыми частицами магнитного поля, происходит переход энергии инжектируемых частиц в энергию магнитного поля.

Работа по созданию математической и численной модели, разработка численного алгоритма и комплекса программ выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18–31–00314 мол_а). Оптимизация численного кода выполнена в рамках госзадания ИВМиМГ СО РАН (проект 0315–2019–0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.А., Приходько В.В. Газодинамическая ловушка: результаты исследований и перспективы // Успехи физических наук. 2017. **187**, № 5. 547–574.
2. Beklemishev A.D. Diamagnetic “bubble” equilibria in linear traps // *Physics of Plasmas*. 2016. **23**. doi 10.1063/1.4960129.
3. Bagryansky P.A. et. al. Status of the Experiment on Magnetic Field Reversal at BINP // *AIP Conference Proceedings*. 2016. **1771**. doi 10.1063/1.4964171.
4. Lotov K.V., Timofeev I.V., Mesyats E.A., Snytnikov A.V., Vshivkov V.A. Note on quantitatively correct simulations of the kinetic beam-plasma instability // *Physics of Plasmas*. 2015. **22**. doi 10.1063/1.4907223.
5. Boronina M.A., Vshivkov V.A. Parallel 3-D particle-in-cell modelling of charged ultrarelativistic beam dynamics // *Journal of Plasma Physics*. 2015. **81**, № 6. doi 10.1017/S002237781500117.
6. Lipatov A.S. The hybrid multiscale simulation technology: an introduction with application to astrophysical and laboratory plasmas. Berlin: Springer, 2002.
7. Березин Ю.А., Дудникова Г.И., Лисейкина Т.В., Федорук М.П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2017.
8. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // *Вопросы теории плазмы*. Сб. статей под ред. М.Л. Леонтовича. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1963. 183–272.
9. Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А. Численные методы “частицы-в-ячейках”. Новосибирск: Наука, 2000.
10. Boris J.P. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code // *Proceeding of Fourth Conference on Numerical Simulations of Plasmas*. Washington D.C.: National Research Laboratory, 1970. 3–67.

Поступила в редакцию
26.03.2019

A Two-Dimensional Hybrid Model of an Open Plasma Trap

E. A. Genrikh¹ and M. A. Boronina²

¹ *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: mesyats@gmail.com*

² *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: boronina@ssd.sgcc.ru*

Received March 26, 2019

Abstract: A hybrid mathematical model of an axisymmetric plasma trap based on the kinetic description for the ion component of the plasma and the MHD approximation for the electronic component is presented. On the basis of the hybrid model, a two-dimensional algorithm is developed to study the dynamics of injected particles in the trap field. The motion of the ion component is calculated by the particle-in-cell method. Finite-difference schemes are used to calculate the magnetic field and the electron component of the plasma. On the basis of the developed algorithm, a program code is created to study the mechanisms of the self-consistent magnetic field structure formation.

Keywords: Vlasov equation, Maxwell’s equations, hybrid model, particle-in-cell method.

References

1. A. A. Ivanov and V. V. Prikhodko, “Gas Dynamic Trap: Experimental Results and Future Prospects,” *Usp. Fiz. Nauk* **187** (5), 547–574 (2017) [*Phys. Usp.* **60** (5), 509–533 (2017)].

2. A. D. Beklemishev, “Diamagnetic “Bubble” Equilibria in Linear Traps,” *Phys. Plasmas* **23** (2016). doi 10.1063/1.4960129
3. P. A. Bagryansky, T. D. Akhmetov, I. S. Chernoshtanov, et al., “Status of the Experiment on Magnetic Field Reversal at BINP,” *AIP Conf. Proc.* **1771** (2016). doi 10.1063/1.4964171
4. K. V. Lotov, I. V. Timofeev, E. A. Mesyats, et al., “Note on Quantitatively Correct Simulations of the Kinetic Beam-Plasma Instability,” *Phys. Plasmas* **22** (2015). doi 10.1063/1.4907223
5. M. A. Boronina and V. A. Vshivkov, “Parallel 3-D Particle-in-Cell Modelling of Charged Ultrarelativistic Beam Dynamics,” *J. Plasma Phys.* **81** (2015). doi 10.1017/S002237781500117
6. A. S. Lipatov, *The Hybrid Multiscale Simulation Technology: An Introduction with Application to Astrophysical and Laboratory Plasmas* (Springer, Berlin, 2002).
7. Yu. A. Berezin, G. I. Dudnikova, T. V. Liseykina, and M. P. Fedoruk, *Modeling of Nonstationary Plasma Processes* (Novosibirsk Gos. Univ., Novosibirsk, 2017) [in Russian].
8. S. I. Braginskii, “Transport Processes in a Plasma,” in *Reviews of Plasma Physics* (Consultants Bureau, New York, 1965), Vol. 1, pp. 205–311.
9. Yu. N. Grigor’ev and V. A. Vshivkov, *Particle-in-Cell Numerical Methods* (Nauka, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
10. J. P. Boris, “Relativistic Plasma Simulation—Optimization of a Hybrid Code,” in *Proc. Fourth Conference on Numerical Simulations of Plasmas, Washington D.C., USA, November 2–3, 1970* (National Research Lab., Washington D.C., 1970), pp. 3–67.