УДК 532.529 doi 10.26089/NumMet.v20r214

СРАВНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ С НЕКОТОРЫМИ СХЕМАМИ ВЫСОКОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕСТЫ

Д. В. Садин[1], В. А. Давидчук[2]

Проведен сравнительный анализ вычислительных свойств модифицированного метода крупных частиц на примере одномерных тестовых задач газовой динамики в широком диапазоне параметров течения. Численные результаты сопоставлены с автомодельными решениями и данными, полученными по схемам высокой разрешающей способности от второго до шестого порядков аппроксимации. Представленная схема продемонстрировала вычислительную эффективность и конкурентоспособность.

Ключевые слова: метод крупных частиц, высокая разрешающая способность, тестовые задачи, вычислительные свойства.

1. Введение. В настоящее время численное моделирование является одним из основных инструментов при создании и совершенствовании технологий, оптимизации параметров технических устройств в аэродинамике, газодинамике струйных течений, ударно-волновых явлениях и др. Практические приложения предъявляют ряд требований к численным методам. К ним относится надежность и универсальность численного метода и возможность его применения при решении задач с широким диапазоном изменения термогазодинамических параметров. Качество схемы включает в себя ее разрешающую способность, точность, устойчивость, робастность, скорость сходимости, однородность алгоритма, простоту метода и другие свойства. Третья группа требований связана с ресурсоемкостью (необходимые объемы памяти, возможность распараллеливания и временны́е затраты) при реализации алгоритма на ЭВМ.

Современные численные схемы высокой разрешающей способности используют разнообразные подходы, основанные на точном и приближенном решении задачи распада разрыва (типа Годунова) [1], алгоритмах с уменьшением полной вариации решения (TVD — Total Variation Diminishing) [2], взвешенно существенно неосциллирующих схемах (WENO — Weighted Essentially Non-Oscillatory) [3], разрывном методе Галеркина [4], компактных схемах [5], балансно-характеристическом алгоритме КАБАРЕ [6], методах с адаптивной искусственной вязкостью [7] и др. Не претендуя на обзор вычислительных технологий, подробно изложенных в том числе в работах [8, 9], ограничимся рассмотрением модифицированного метода крупных частиц в сравнении с некоторыми схемами высокой разрешающей способности.

В работах [10, 11] изложена модификация метода крупных частиц с нелинейной коррекцией искусственной вязкости типа Христенсена [12] на первом (лагранжевом) этапе и противопоточной реконструкцией потоков [9] второго порядка на втором (эйлеровом и заключительном) этапе. В развитие метода крупных частиц предложена схема с настраиваемыми диссипативными свойствами (Customizable Dissipative Properties — CDP2) второго порядка по пространству и времени с взвешенной линейной комбинацией центральных и противопоточных разностей, дополненной TVD-алгоритмом Рунге–Кутты (Total variation diminishing Runge–Kutta scheme) [13].

Целью настоящей статьи является анализ вычислительных свойств модифицированного метода крупных частиц CDP2 [13] на примере ряда одномерных тестовых задач в сравнении с автомодельными решениями и численными результатами, полученными по другим схемам высокой разрешающей способности.

2. Основные уравнения. Рассмотрим динамику калорически совершенного невязкого газа в рамках уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0, \quad \boldsymbol{q} = \left[\rho, \rho v, \rho E\right]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{G} = \left[\rho v, \rho v^2, \rho E v\right]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{F} = \left[0, 0, p, p v\right]^{\mathrm{T}}, \qquad (1)$$

где ρ, v, p, E — плотность, скорость, давление, полная энергия газа; $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{F}$ — консервативные, потоковые, градиентные и деформационные величины; t — время; x — координата.

[1] Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, Санкт-Петербург; профессор, e-mail: sadin@yandex.ru

[2] Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, Санкт-Петербург; адъюнкт, e-mail: david_lxii@mail.ru

Замыкающее уравнение состояния имеет вид $p = (\gamma - 1)\rho\big(E - v^2/2\big)$, где γ — показатель адиабаты.

3. Численный алгоритм. Опишем численный алгоритм в соответствии с основными положениями метода крупных частиц с расщеплением уравнений (1) по физическим процессам на лагранжев, эйлеров и заключительный этапы. Приведем схему к виду для плоского одномерного случая. Дискретизацию будем проводить на равномерной сетке с шагом h в конечно-объемной реализации, при которой консервативные величины $\boldsymbol{q}$ относятся к центрам контрольных объемов (ячеек) x_n, где $n = 1, 2, \ldots, N$. Потоковые величины $\boldsymbol{G}$, градиентные и деформационные слагаемые $\boldsymbol{F}$ уравнений (1) определяются на границах ячеек $x_{n\pm1/2}$. Временной слой будем помечать верхним индексом $k = 1, 2, \ldots, K$, а шаг по времени обозначим τ.

Первый (лагранжев) этап. Вычисляются предварительные значения искомых функций с использованием центральных разностей градиентных величин на границах ячеек:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_n^{(1)} &= \boldsymbol{q}_n^k - \left(\widetilde{\boldsymbol{F}}{}^k_{n+1/2} - \widetilde{\boldsymbol{F}}{}^k_{n-1/2}\right)\frac{\tau}{h}\,;\\
\widetilde{\boldsymbol{F}}{}^k_{n\pm1/2} &= \Big[0, \widetilde{p}^k_{n\pm1/2}, \widetilde{p}^k_{n\pm1/2} v^k_{n\pm1/2}\Big]^{\mathrm{T}};\\
\widetilde{p}^k_{n\pm1/2} &= p^k_{n\pm1/2} + \big[1 - \psi_v(r_{n\pm1/2})\big] Q^k_{n\pm1/2};\\
r_{n+1/2} &= \begin{cases} \dfrac{v^k_{1,n} - v^k_{1,n-1}}{v^k_{1,n+1} - v^k_{1,n}}\,, & \text{если} \quad \big(v^k_{1,n+1} - v^k_{1,n}\big)\big(p^k_{n+1} - p^k_n\big) \geqslant 0;\\[2ex] \dfrac{v^k_{1,n+2} - v^k_{1,n+1}}{v^k_{1,n+1} - v^k_{1,n}}\,, & \text{иначе;}\end{cases}\\
Q^k_{n+1/2} &= -B_v\sqrt{\gamma p^k_{n+1/2}\rho^k_{n+1/2}}\,\big(v^k_{n+1} - v^k_n\big).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь B_v — коэффициент искусственной вязкости.

Для регуляризации численного решения применяется искусственная вязкость $Q^k_{n\pm1/2}$ с ограничителем вязкости $\psi_v(r_{n\pm1/2})$ [11–13], которая не понижает порядок аппроксимации на гладких решениях $O\big(h^2\big)$. А именно, на гладких решениях при $r \to 1$ ограничитель вязкости $\psi_v(r) \to 1$; следовательно, искусственная вязкость $\big[1 - \psi_v(r_{n\pm1/2})\big] Q^k_{n\pm1/2} \to 0$.

Второй (эйлеров и заключительный) этап. Определяются окончательные значения искомых переменных с точностью $O\big(\tau + h^2\big)$ на гладких решениях:

$$
\begin{aligned}
\rho_i^{(2)} &= \rho_i^{(1)} + \left(\widehat{M}^{(1)}_{i,n-1/2} - \widehat{M}^{(1)}_{i,n+1/2}\right)/h,\\
\widehat{M}^{(1)}_{i,n\pm1/2} &= \widehat{\rho}^{(1)}_{i,n\pm1/2} v^{(1)}_{i,n\pm1/2}\tau,\\
v_n^{(2)} &= \left[\rho_n^{(1)} v_n^{(1)} + \left(\widehat{v}^{(1)}_{n-1/2}\widehat{M}^{(1)}_{n-1/2} - \widehat{v}^{(1)}_{n+1/2}\widehat{M}^{(1)}_{n+1/2}\right)\frac{1}{h}\right]\frac{1}{\rho_n^{k+1}}\,,\\
E_n^{(2)} &= \left[\rho_n^{(1)} E_n^{(1)} + \left(\widehat{E}^{(1)}_{n-1/2}\widehat{M}^{(1)}_{n-1/2} - \widehat{E}^{(1)}_{n+1/2}\widehat{M}^{(1)}_{n+1/2}\right)\frac{1}{h}\right]\frac{1}{\rho_n^{k+1}}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Потоковые величины, помеченные символом $\wedge$, получены путем взвешенной ограничителем $\psi_v(r_{n\pm1/2})$ линейной комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций функций $\varphi = \{\rho, v, E\}$ [13]:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi}^{(1)}_{n+1/2} &= \begin{cases}\varphi^+_{n+1/2}, & \text{если} \quad v^{(1)}_{n+1/2} \geqslant 0;\\ \varphi^-_{n+1/2}, & \text{иначе;}\end{cases}\\
\varphi^+_{n+1/2} &= \left[\Big(1 - \psi_f\big(r^+_{n+1/2}\big)\Big)\varphi_n^{(1)} + \psi_f\big(r^+_{n+1/2}\big)\varphi^{(1)}_{n+1/2}\right];\\
\varphi^-_{n+1/2} &= \left[\Big(1 - \psi_f\big(r^-_{n+1/2}\big)\Big)\varphi_{n+1}^{(1)} + \psi_f\big(r^-_{n+1/2}\big)\varphi^{(1)}_{n+1/2}\right];\\
r^+_{n+1/2} &= \frac{\varphi_n^{(1)} - \varphi_{n-1}^{(1)}}{\varphi_{n+1}^{(1)} - \varphi_n^{(1)}}\,, \quad r^-_{n+1/2} = \frac{\varphi_{n+2}^{(1)} - \varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_{n+1}^{(1)} - \varphi_n^{(1)}}\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В качестве ограничителей вязкости ψ_v и потоков ψ_f в настоящей работе использованы

$$\psi(r) = \begin{cases} 0, & \text{метод крупных частиц;} \\ \max\left[0, \min\left(1, r\right)\right], & \text{MINMOD (MM);} \\ \dfrac{r^2 + r}{1 + r}, & \text{VAN ALBADA (VA);} \\ \dfrac{r + |r|}{1 + r}, & \text{VAN LEER (VL).} \end{cases} \tag{5}$$

Далее на лагранжевом этапе (2) берется ограничитель вязкости Van Leer, а коэффициент искусственной вязкости $B_v = 1$ (за исключением приведенного ниже теста 3а, где $B_v = 1.7$). Для удобства дополним аббревиатуру схемы указанием на применяемый ограничитель потоков в (3) и (4), например CDP2-VL — схема (2)–(4) с ограничителем VAN LEER из (5). Для повышения порядка аппроксимации по времени применим двухшаговый TVD-метод Рунге–Кутты [14]:

$$\boldsymbol{q}^{(2)} = \boldsymbol{q}^k + \tau L\left(\boldsymbol{q}^k\right), \quad \boldsymbol{q}^{k+1} = 0.5\left(\boldsymbol{q}^k + \boldsymbol{q}^{(2)}\right) + 0.5\tau L\left(\boldsymbol{q}^{(2)}\right).$$

Таким образом, описанный алгоритм имеет на гладких решениях второй порядок аппроксимации по пространству и времени $O\left(\tau^2 + h^2\right)$.

Шаг по времени определяется из условия Куранта–Фридрихса–Леви

$$\tau^k = \frac{\mathrm{CFL}\cdot h}{\max\limits_{\forall n}\left(\left|v_n^k\right| + a_n^k\right)} \quad \text{при} \quad \mathrm{CFL} \leqslant 1,$$

где CFL — число Куранта и a_n^k — скорость звука в точке $\left(x_n, t^k\right)$.

4. Численные эксперименты. Тестовые задачи для уравнений (1) решаются численно модифицированным методом крупных частиц (CDP2) в сравнении с другими схемами высокой разрешающей способности. Исходные данные и результаты решения представляются в безразмерном виде. Показатель адиабаты для всех вариантов задач принят $\gamma = 7/5$.

Область определения всех задач задана на интервале $x \in (x_1, x_2)$ с начальным разрывом в точке $x_0 \in (x_1, x_2)$ и на отрезке времени $t \in [0, t_f]$. Для удобства сравнения интервалы по пространственной координате x соответствуют цитируемым работам. Для тестов Sod 1 и Lax выбран интервал $x \in (-5, 5)$, для остальных задач $x \in (0, 1)$. Начальные условия задач сведены в таблицу, в которой газодинамические величины в безразмерном виде помечены индексом L — слева от разрыва, а индексом R — справа. Граничные условия совпадают с начальными. Число Куранта задавалось постоянным $\mathrm{CFL} = 0.4$–0.5, за исключением задачи Sod 2. Расчет этой задачи начинался с возрастающим шагом по времени $\mathrm{CFL} = 0.1, 0.2, 0.3$ и далее $\mathrm{CFL} = 0.4 = \mathrm{const}$.

Начальные условия тестовых задач

Тест	ρ_{1L}	v_{1L}	p_L	ρ_{1R}	v_{1R}	p_R	x_0	t_f
Sod 1	1	0	1	0.125	0	0.1	0	2
Sod 2	1	0	10^5	0.01	0	10^3	0.4	$5.5\cdot10^{-4}$
Lax	0.445	0.698	3.528	0.5	0	0.571	0	1.3
peak	0.1261192	8.9047029	782.92899	6.591493	2.2654207	3.1544874	0.5	0.0039
3a	1	–19.59745	1000	1	–19.59745	0.01	0.8	0.012
4	5.99924	19.5975	460.894	5.99242	–6.19633	46.095	0.4	0.035

Приведенные тестовые задачи Римана (распада разрыва) позволяют проверить работоспособность численного метода в широком диапазоне параметров движения газа. Результаты расчетов по схеме CDP2 сравниваются с автомодельными решениями и численными данными, полученными по алгоритмам из цитируемых источников.

В тестах Sod 1 и Lax реализуется распад разрыва с дозвуковым режимом течения газа, скачка уплотнения, волны разрежения и контактного разрыва между ними. Результаты решения указанных задач модифицированным методом крупных частиц (схема CDP2-VL) в виде распределения плотности показаны соответственно на рис. 1а и 2а. Для сравнения на этих рисунках справа (рис. 1б и 2б) представлены результаты расчетов из [15] по схемам с гибридной взвешенной нелинейной интерполяцией четвертого (CCSSR-HW4) и шестого (CCSSR-HW6) порядков аппроксимации, а также популярной взвешенной существенно неосциллирующей схемой пятого порядка (WENO5). Видно, что результаты расчетов близки друг другу и хорошо согласуются с точным решением (сплошная кривая).

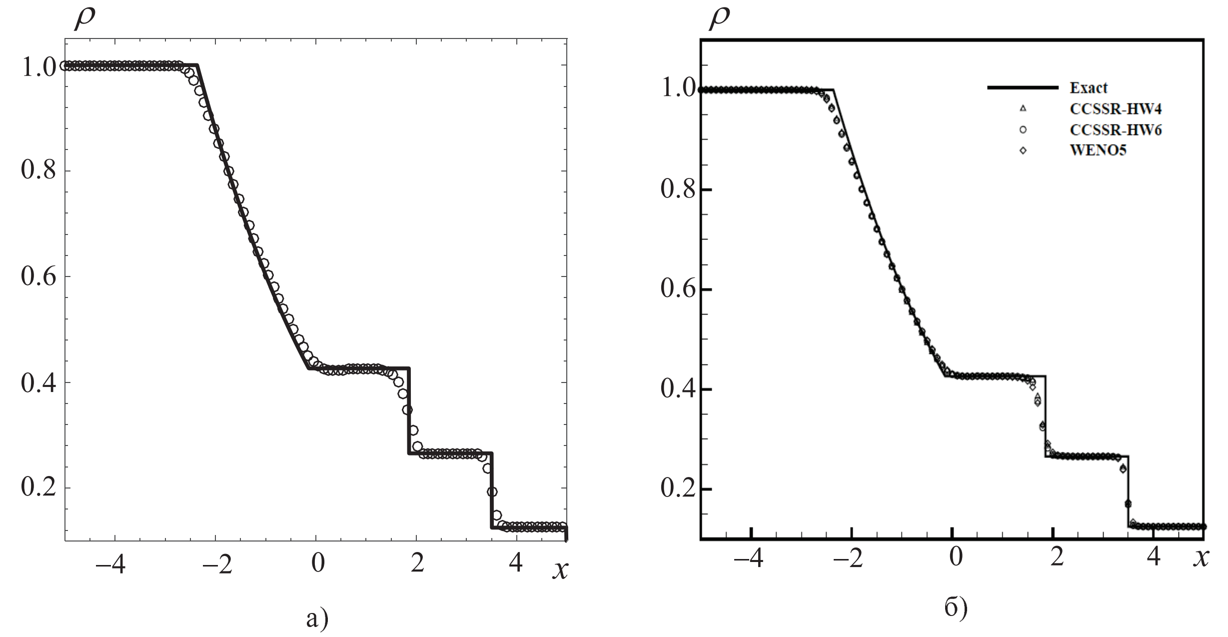

Рис. 1. Тестовая задача Sod 1, дискретизация 100 ячеек: а) схема CDP2-VL, б) схемы CCSSR-HW4, CCSSR-HW6, WENO5 из [15]. Сплошная линия — автомодельное решение

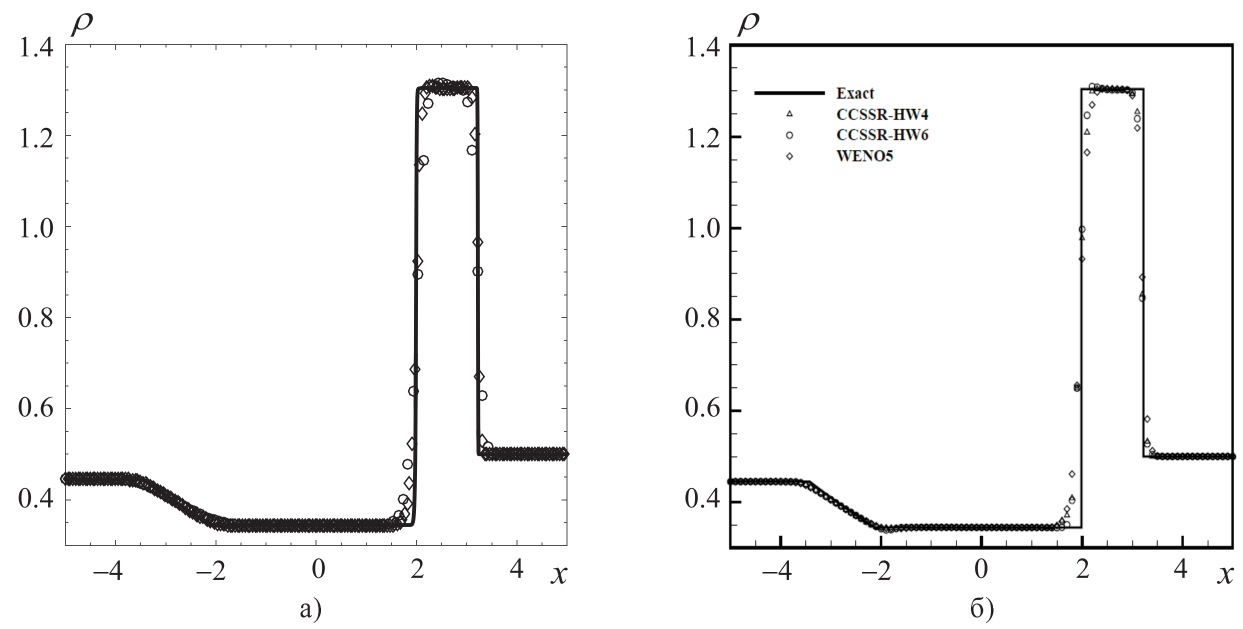

Рис. 2. Тестовая задача Lax: а) схема CDP2-VL (маркеры кружки — 100 ячеек; ромбы — 200 ячеек), б) схемы CCSSR-HW4, CCSSR-HW6, WENO5 из [15], дискретизация 100 точек. Сплошная линия — автомодельное решение

Возможности схемы CDP2 для случая большого (два порядка) начального перепада давления и плотности, сверхзвукового течения в части расчетной области, корректного расчета звуковой точки проверяется при решении тестовой задачи Sod 2. На рис. 3 показаны распределения плотности (а и в) и скорости (б и г) соответственно для 100 и 200 ячеек. Данные расчетов сопоставляются с численными результатами, полученными по схемам MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) с ограничителем MINMOD и КАБАРЕ для 100 ячеек из [16] (рис. 3д — распределение плотности, рис. 3е — скорости). Особенностью численных решений по приведенным схемам на грубой сетке (100 ячеек) является завышение скорости за скачком уплотнения относительно автомодельного распределения (см. рис. 3б и 3е), несколько большее для схемы CDP2. Вместе с тем, при увеличении разрешения сетки этот численный дефект исчезает (рис. 3г).

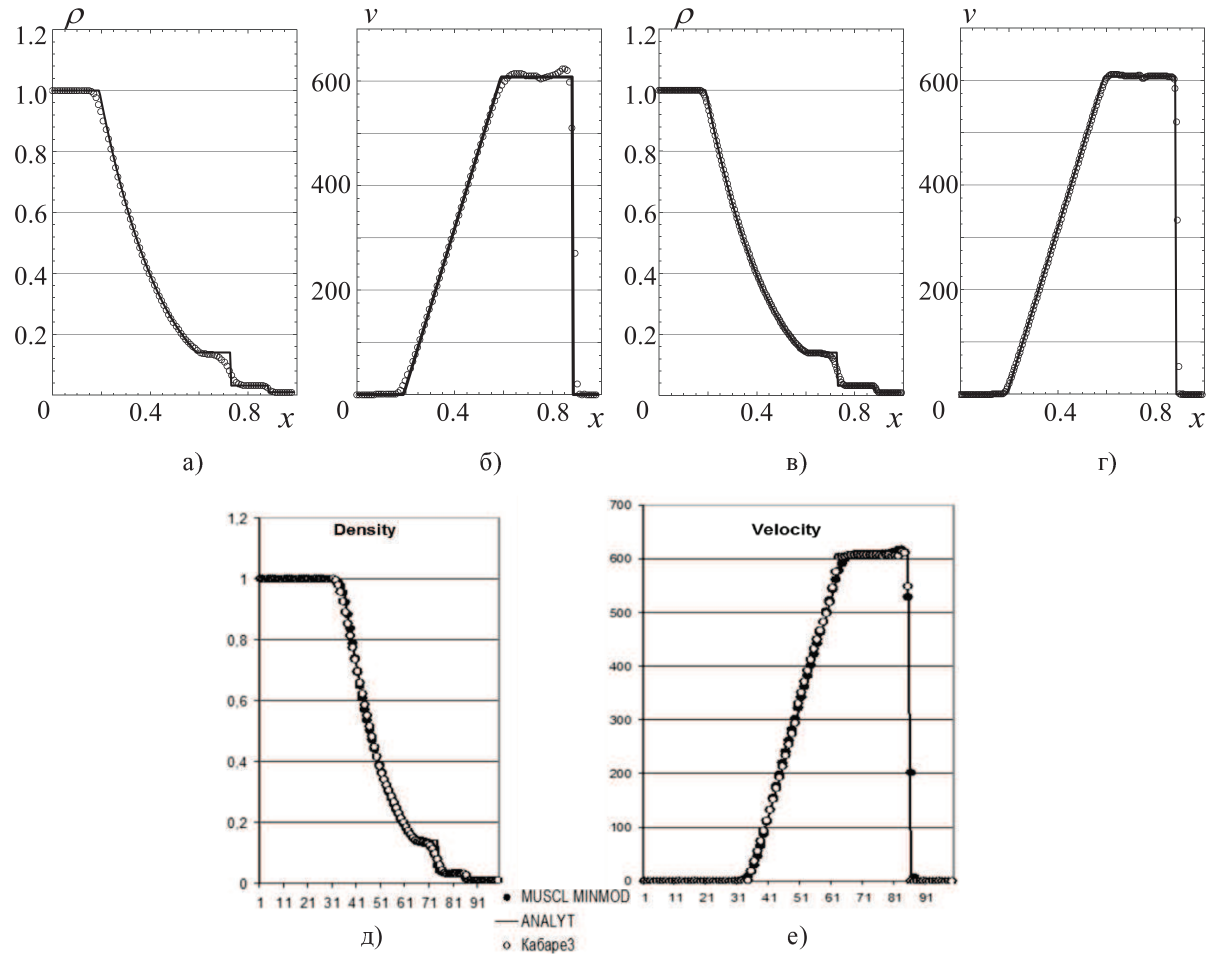

Рис. 3. Тестовая задача Sod 2. Схема CDP2-MM: распределения а) плотности, б) скорости для 100 ячеек; в) и г) то же для 200 ячеек. Схемы MUSCL с ограничителем MINMOD и КАБАРЕ из [16], дискретизация 100 точек для распределений: д) плотности, е) скорости. Сплошная линия — автомодельное решение

В задаче peak после распада сильного разрыва образуется интенсивный скачок уплотнения, волна разрежения и контактный разрыв между ними. В узкой области за ударной волной до контактной поверхности происходит сильное сжатие газа. Вычислительные трудности заключаются в обеспечении точности разрешения волны разрежения и зоны интенсивного сжатия газа. Показательным с этой точки зрения является профиль скорости, приведенный на рис. 4 (а — схема CDP2-MM; б — WENO5 из [17], компактная схема бегущего счета из [5] и квазигазодинамический алгоритм из [18]).

Цитируемые численные результаты дают всплеск скорости (энтропийный след) в окрестности $x = 0.2$, особенно существенный для схемы WENO5. Для модифицированного метода крупных частиц характерны небольшие низкочастотные колебания распределения скорости в области постоянного течения, примыкающего к волне разрежения. Указанная особенность в численном решении в различной степени проявляется также и для ряда других схем, например JT (centered scheme with limiter by Jiang and Tadmor), WAFT (weighted average flux by Toro), PPM (piecewise parabolic method) [19]. Сходимость численных результатов к автомодельному решению по схеме CDP2-MM демонстрируется расчетом на более мелкой сетке (6400

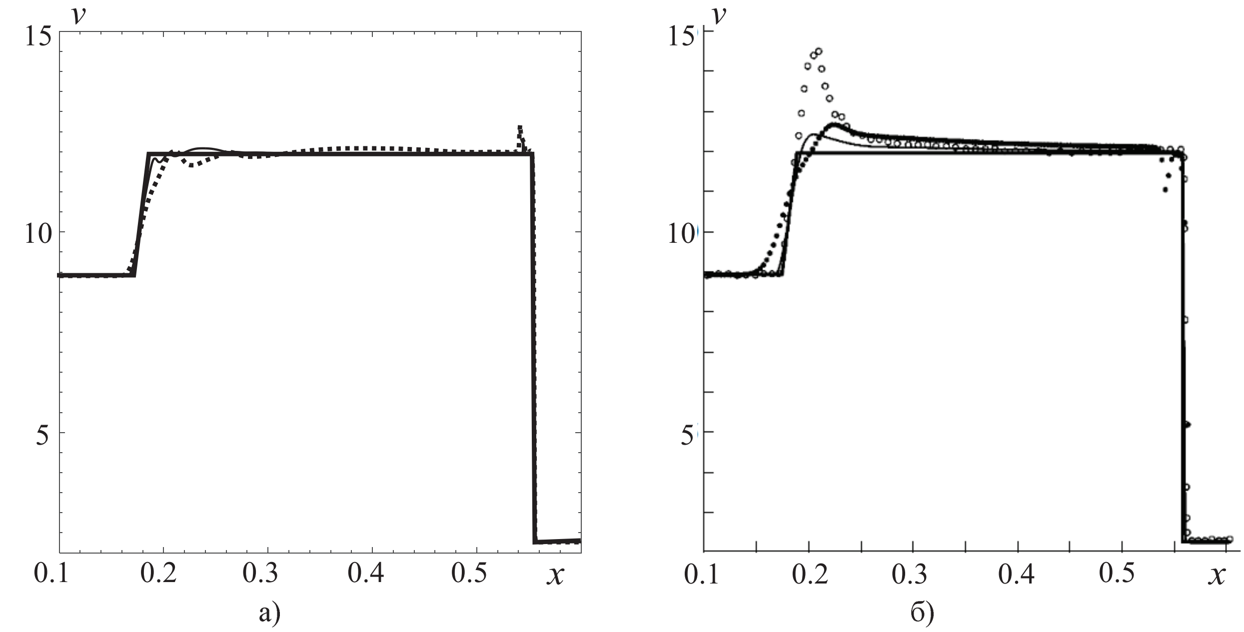

Рис. 4. Тестовая задача peak. Распределение скорости: а) схема CDP2-MM — пунктир (1600 ячеек), тонкая сплошная кривая (6400 ячеек); б) кружки — WENO5 из [17], точки — квазигазодинамический алгоритм из [18], тонкая сплошная кривая – компактная схема бегущего счета из [5] на сетке 1600 узлов. Жирная сплошная линия — автомодельное решение

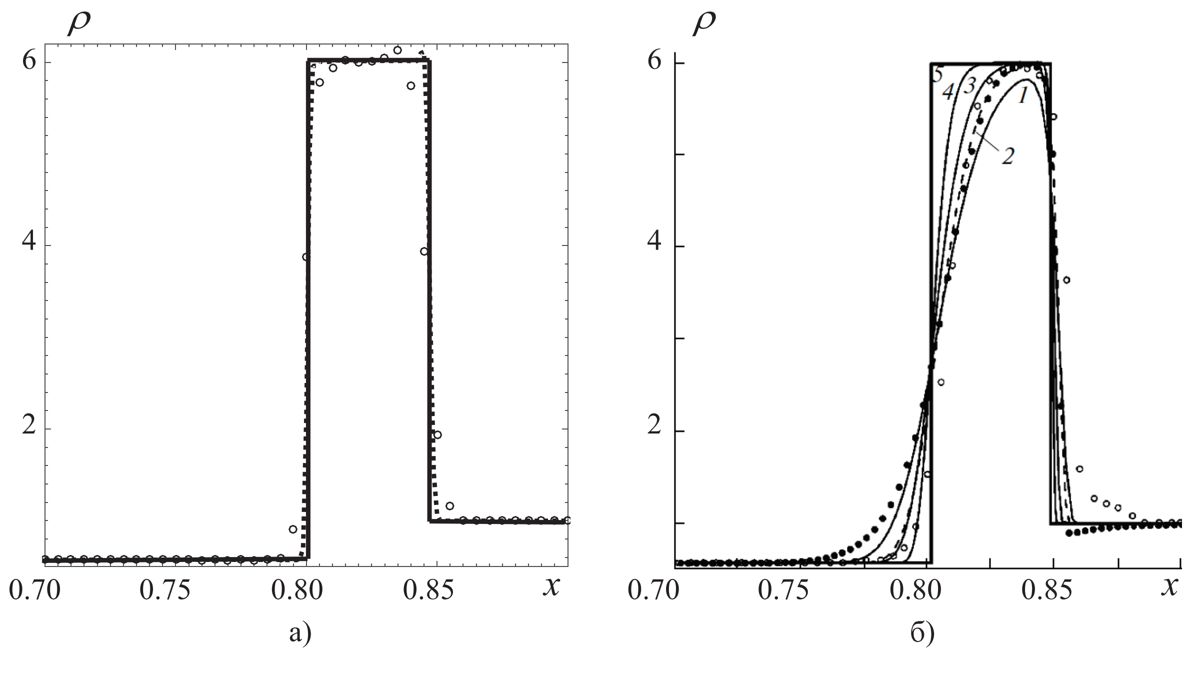

Рис. 5. Тестовая задача 3а. Распределение плотности: а) схема CDP2-MM — кружки, пунктирная кривая для 200 и 800 ячеек соответственно; б) кружки — WENO5 из [17] (200 точек), точки — квазигазодинамический алгоритм из [18] (312 ячеек), тонкие сплошные кривые 1, 2, 3 и 4 — компактная схема бегущего счета из [5] на сетках 200, 312, 400 и 800 точек соответственно. Жирная сплошная линия — автомодельное решение

ячеек) на рис. 4а (тонкая сплошная линия графически совпадает с автомодельным распределением, за исключением малых отклонений в окрестности $x = 0.2$ и 0.545).

Задача 3а является вариантом теста 3 (Toro problem). Особенность этой задачи заключается в огромном перепаде давления (пять порядков) и в образовании стационарного контактного разрыва в точке $x = 0.8$. Из рис. 5 видно, что модифицированный метод крупных частиц CDP2-MM допускает небольшую немонотонность на фронте ударной волны, вместе с тем превосходит по разрешающей способности все цитируемые схемы.

Течение с двумя расходящимися ударными волнами и контактным разрывом между ними определяется начальными условиями тестовой задачи 4. Схема CDP2-VA сопоставима по разрешающей способности в данном тесте с WENO5 из [17] и превосходит компактную схему бегущего счета из [5], что видно, например, из сравнения численных решений на одинаковых сетках с дискретизацией 200 ячеек (см. рис. 6: а — пунктирная кривая и б — тонкая сплошная линия 1).

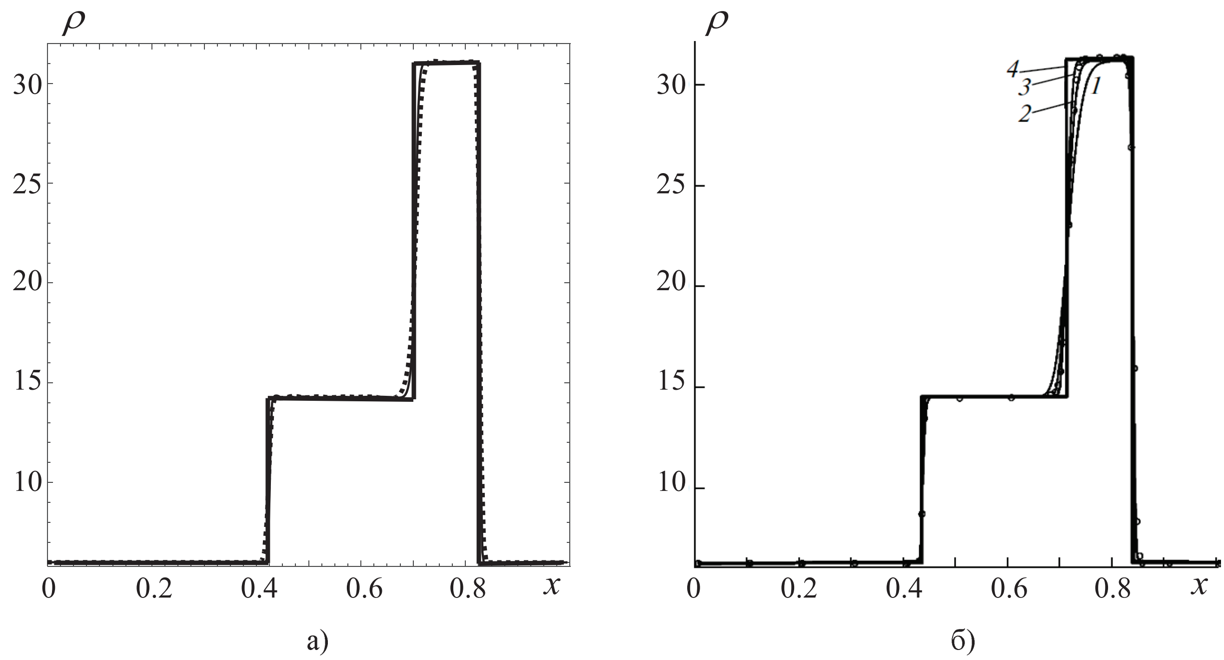

Рис. 6. Тестовая задача 4. Распределение плотности: а) схема CDP2-VA — пунктирная кривая, тонкая сплошная линия для 200 и 400 ячеек соответственно; б) кружки — WENO5 из [17] (200 точек), тонкие сплошные кривые 1, 2, 3 – компактная схема бегущего счета из [5] на сетках 200, 400 и 800 точек соответственно. Жирная сплошная линия — автомодельное решение

5. Заключение. Модифицированный метод крупных частиц обладает следующими свойствами. Схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. Использование искусственной вязкости с ограничителем не понижает порядок аппроксимации. Алгоритм не опирается на свойства гиперболичности исходных систем уравнений, что является актуальным для случаев, когда физически обоснованные постановки задач приводят к системам дифференциальных уравнений в частных производных составного (негиперболического) типа. Метод является консервативным, однородным, обладает алгоритмической простотой и экономичностью, возможностью настройки диссипативных свойств. Алгоритм без затруднений может быть обобщен на многомерные задачи.

Работоспособность представленного метода проверена на ряде одномерных тестовых задач, некоторые из которых обладают существенной вычислительной сложностью и в определенном смысле являются вызовом для любой разностной схемы. Расчеты продемонстрировали возможности модифицированного метода крупных частиц в сравнении с современными схемами высокой разрешающей способности. По совокупности свойств можно сделать вывод об эффективности и конкурентоспособности рассмотренной модификации метода крупных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer,

2009.
2. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. **49**, N 3. 357–393.
3. *Jiang G.-S., Shu C.-W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of Computational Physics. 1996. **126**, N 1. 202–228.
4. *Cockburn B., Shu C.-W.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // Journal of Scientific Computing. 2001. **16**, N 3. 173–261.
5. *Михайловская М.Н., Рогов Б.В.* Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. **52**, № 4. 672–695.
6. *Головизнин В.М.* Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Математическое моделирование. 2006. **18**, № 11. 14–30.
7. *Kurganov A., Liu Y.* New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws // Journal of Computational Physics. 2012. **231**, N 24. 8114–8132.
8. *LeVeque R.J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
9. *Hirsch C.* Numerical computation of internal and external flows. Vol. 1. Fundamentals of computational fluid dynamics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.
10. *Садин Д.В.* TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. **56**, № 12. 2098–2109.
11. *Садин Д.В.* Схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для численного моделирования течений газа и газовзвесей // Математическое моделирование. 2017. **29**, № 12. 89–104.
12. *Christensen R.B.* Godunov methods on a staggered mesh — an improved artificial viscosity. Preprint UCRL-JC-105269. Livermore: Lawrence Livermore Nat. Lab., 1990.
13. *Садин Д.В.* Применение схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами к расчету течений газа с развитием неустойчивости на контактной границе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. **18**, № 1. 153–157.
14. *Gottlieb S., Shu C.-W.* Total variation diminishing Runge–Kutta schemes // Mathematics of Computation. 1998. **67**, N 221. 73–85.
15. *Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W.* A new class of central compact schemes with spectral-like resolution II: Hybrid weighted nonlinear schemes // Journal of Computational Physics. 2015. **284**. 133–154.
16. *Головизнин В.М., Карабасов С.А.* Схемы КАБАРЕ для одномерных уравнений газодинамики в эйлеровых переменных. Препринт IBRAE-2001-15. М.: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2001.
17. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations. Techn. Rept. LA-UR-01-6225. Los Alamos: Los Alamos Nat. Lab., 2001.
18. *Елизарова Т.Г., Шильников Е.В.* Возможности квазигазодинамического алгоритма для численного моделирования течений невязкого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. **49**, № 3. 549–566.
19. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. **25**, N 3. 995–1017.

Поступила в редакцию
10.04.2019

Comparison of a Modified Large-Particle Method with Some High Resolution Schemes. One-Dimensional Test Problems

D. V. Sadin[1] and V. A. Davidchuk[2]

[1] *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, Saint Petersburg, 197198, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: sadin@yandex.ru*

[2] *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, Saint Petersburg, 197198, Russia; Postgraduate, e-mail: david_lxii@mail.ru*

Received April 10, 2019

Abstract: The paper presents a comparative analysis of the computational properties of a modified large-particle method on one-dimensional gas dynamics test problems in a wide range of flow parameters. The numerical results are compared with self-similar solutions and data obtained by high-resolution schemes from the second to the sixth order of approximation. It is shown that the presented scheme is numerically efficient and competitive.

Keywords: large-particle method, high resolution, test problems, computational properties.

References

1. E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* (Springer, Berlin, 2009).

2. A. Harten, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," J. Comput. Phys. **49** (3), 357–393 (1983).

3. G.-S. Jiang and C.-W. Shu, "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes," J. Comput. Phys. **126** (1), 202–228 (1996).

4. B. Cockburn and C.-W. Shu, "Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems," J. Sci. Comput. **16** (3), 173–261 (2001).

5. M. N. Mikhailovskaya and B. V. Rogov, "Monotone Compact Running Schemes for Systems of Hyperbolic Equations," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **52** (4), 672–695 (2012) [Comput. Math. Math. Phys. **52** (4), 578–600 (2012)].

6. V. M. Goloviznin, "Balanced Characteristic Method for 1D Systems of Hyperbolic Conservation Laws in Eulerian Representation," Mat. Model. **18** (11), 14–30 (2006).

7. A. Kurganov and Y. Liu, "New Adaptive Artificial Viscosity Method for Hyperbolic Systems of Conservation Laws," J. Comput. Phys. **231** (24), 8114–8132 (2012).

8. R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002).

9. C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows.* Vol. 1: *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2007).

10. D. V. Sadin, "TVD Scheme for Stiff Problems of Wave Dynamics of Heterogeneous Media of Nonhyperbolic Nonconservative Type," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **56** (12), 2098–2109 (2016) [Comput. Math. Math. Phys. **56** (12), 2068–2078 (2016)].

11. D. V. Sadin, "Schemes with Customizable Dissipative Properties as Applied to Gas-Suspensions Flow Simulation," Mat. Model. **29** (12), 89–104 (2017).

12. R. B. Christensen, *Godunov Methods on a Staggered Mesh — An Improved Artificial Viscosity*, Preprint UCRL-JC-105269 (Lawrence Livermore Nat. Lab., Livermore, 1990).

13. D. V. Sadin, "Application of Scheme with Customizable Dissipative Properties for Gas Flow Calculation with Interface Instability Evolution," Nauch.-Tekhn. Vestn. Inform. Tekhnol. Mekhan. Optik. **18** (1), 153–157 (2018).

14. S. Gottlieb and C.-W. Shu, "Total Variation Diminishing Runge–Kutta Schemes," Math. Comput. **67** (221), 73–85 (1998).

15. X. Liu, S. Zhang, H. Zhang, and C.-W. Shu, "A New Class of Central Compact Schemes with Spectral-Like Resolution II: Hybrid Weighted Nonlinear Schemes," J. Comput. Phys. **284**, 133–154 (2015).

16. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, *CABARET Schemes for One-Dimensional Gas Dynamics Equations in Eulerian Variables*, Preprint IBRAE-2001-15 (Nuclear Safety Inst., Moscow, 2001).

17. R. Liska and B. Wendroff, *Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for Euler Equations*, Technical Report LA-UR-01-6225 (Los Alamos Nat. Lab., Los Alamos, 2001).

18. T. G. Elizarova and E. V. Shil'nikov, "Capabilities of a Quasi-Gasdynamic Algorithm as Applied to Inviscid Gas Flow Simulation," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **49** (3), 549–566 (2009) [Comput. Math. Math. Phys. **49** (3), 532–548 (2009)].

19. R. Liska and B. Wendroff, "Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations," SIAM J. Sci. Comput. **25** (3), 995–1017 (2003).