

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v20r328

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ НА ОСНОВЕ ВАРИКАПОВ: АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОДЫ

В. А. Васильченко¹, М. О. Корпусов², Д. В. Лукьяненко³, А. А. Панин⁴

Проведено аналитическое и численное исследование разрушения решения одного нелинейного уравнения соболевского типа, которое описывает процессы в электрических схемах на основе варикапов. Аналитическое исследование проводилось энергетическим методом. Для численного решения исходное уравнение в частных производных аппроксимировалось с помощью метода прямых системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем решалась с помощью одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом. В основе численной диагностики разрушения решения исследуемого уравнения лежало вычисление апостериорной асимптотически точной оценки погрешности приближенного решения на последовательно сгущающихся сетках.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, численная диагностика разрушения решения.

1. Введение. В последнее время бурно развивается тематика режимов с обострениями (также говорят “blow-up” или “разрушение решения”). Под режимом “blow-up”, как правило, понимают обращение нормы решения (в каком-либо функциональном пространстве) в бесконечность за конечное время. Если рассматривать функцию $u(x, t)$ как функцию аргумента t со значениями в подходящем пространстве функций аргумента x и обозначать ее поэтому как $u(t)$, то вышесказанное можно записать так:

$$\lim_{t \rightarrow T_{bl}} \|u(t)\| = +\infty.$$

Величину T_{bl} естественно называть временем разрушения решения.

Физически такие решения описывают взрывы, развитие неустойчивости и т.п. На данный момент существует 3 основных группы методов аналитического исследования явлений “blow-up”. Это метод нелинейной емкости (пробных функций) С.И. Похожаева и Э. Митидиери [1] в различных вариантах, метод автоматических режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А.А. Самарского, В.А. Галактионова, С.П. Курдюмова и А.П. Михайлова [2] (см. также [3]), а также энергетический метод Х.А. Левина и его модификации [4–9]. Один из вариантов последнего использован в аналитической части нашего исследования. По поводу методов аналитического исследования “blow-up” см. также [10].

Не менее актуальна проблема численного исследования режимов с обострением. Она включает как минимум 3 задачи:

- 1) получить решение вблизи времени разрушения с приемлемой точностью;
- 2) имея полученные аналитически оценки времени разрушения решения, численно получить его конкретную величину для каждой конкретной модели;
- 3) установить сам факт разрушения решения, если это не удастся сделать аналитически.

Данной проблематике посвящена обширная литература. Некоторые ссылки по теме можно найти, например, в нашей работе [11].

Метод численного исследования разрушения решения, использованный нами в данной работе (и ряде предыдущих, включая [11–18]), основан на выполнении апостериорной асимптотически точной оценки

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; студент, e-mail: v.v.a.onside@gmail.com

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; профессор, e-mail: korpusov@gmail.com

³ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; доцент, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

⁴ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; доцент, e-mail: a-panin@yandex.ru.

точности полученного приближенного численного решения (результат этой оценки будем называть эффективным порядком точности). Идеи метода изложены в работах [19–21] и, по сути, состоят в следующем. На гладком решении эффективный порядок точности стремится к теоретическому для данной схемы; следовательно, резкое изменение эффективного порядка точности свидетельствует о разрушении решения. Данный метод кажется перспективным благодаря своей универсальности (применимости, пожалуй, к произвольному обыкновенному дифференциальному уравнению или уравнению в частных производных) и минимальным требованиям на априорную информацию: достаточно знать верхнюю оценку времени разрушения T_{bl} . Однако даже не зная этой оценки, можно попытаться предположить приближенное значение T_{bl} и высказать гипотезу о разрушении решения, если разрушение не было доказано аналитически.

В настоящей статье указанный метод диагностики разрушения решения применяется к уравнению в туннельном диоде, задача для которого появляется при исследовании электрических схем на основе варикапов [22]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_{init_0}(x), \quad u_t(x, 0) = u_{init_1}(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

2. Аналитическое исследование разрушения решения. В этом разделе мы, пользуясь энергетическим методом (см. [10, с. 249–254]), аналитически получим достаточные условия разрушения решения рассматриваемой задачи и найдем верхнюю оценку времени разрушения. Перепишем задачу (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx} - u) + u_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (u_x - (u_x)^2) &= 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} &= 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), & \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[0, 1])$ — это решение задачи. Проинтегрируем уравнение (2) по времени и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u_{xx} - u) + \int_0^t u_{xx}(x, s) ds + u_{xx} &= ((u_x)^2)_x + f(x), \\ f(x) := u_{1xx}(x) - u_1(x) + u_{0xx} - ((u_{0x}(x))^2)_x. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\Phi(t) := \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_x\|_2$, $J(t) := \|u'\|_2^2 + \|u'_x\|_2$. Имеет место неравенство

$$(\Phi')^2(t) \leq 2\Phi(t)J(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Умножив обе части уравнения (2) на функцию $u(x, t)$ и проинтегрировав по частям, получим равенство

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + \|u_x\|_2^2 + \int_0^t \int_0^1 u_x(x, t) u_x(x, s) dx ds + \int_0^1 f(x) u(x, t) dx = \int_0^1 (u_x)^3 dx. \quad (5)$$

Теперь умножим уравнения (2) на функцию $u'(x, t)$ и получим равенство

$$J(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_2^2 + \int_0^t \int_0^1 u_x(x, s) u'_{xt}(x, t) dx dt + \frac{d}{dt} \int_0^1 f(x) u(x, t) dx = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_x)^3 dx. \quad (6)$$

Подставим в уравнение (6) выражение для $\int_0^1 (u_x)^3 dx$ из (5) и после элементарных преобразований получим равенство

$$J(t) = \frac{1}{3} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} - \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \|u_x\|_2^2 + \frac{1}{3} \|u_x\|_2^2 - \frac{2}{3} \int_0^t \int_0^1 u_x(x, s) u'_{xt}(x, t) dx ds - \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) u'_t(x, t) dx. \quad (7)$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left| \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \|u_x\|_2^2(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} J(t) + \frac{1}{9\varepsilon} \Phi(t), \tag{8}$$

$$\left| \frac{2}{3} \int_0^t \int_0^1 u_x(x, s) u'_{xt}(x, t) dx ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} J(t) + \frac{4T}{9\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds, \tag{9}$$

$$\frac{1}{3} \|u_x\|_2^2 \leq \frac{2}{3} \Phi(t), \tag{10}$$

$$\left| \frac{2}{3} \int_0^1 f(x) u'_t(x, t) dx \right| \leq \varepsilon J(t) + \frac{1}{9\varepsilon} \|f\|_2^2 \tag{11}$$

для всех $\varepsilon > 0$. Поэтому из (7)–(11) вытекает неравенство

$$J(t) \leq \frac{1}{3} \frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\varepsilon J(t) + \left[\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3} \right] \Phi(t) + \frac{1}{9\varepsilon} \|f\|_2^2 + \frac{4T}{9\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds.$$

Сделаем замену $\delta = 2\varepsilon$ и получим неравенство

$$(1 - \delta)J(t) \leq \frac{1}{3} \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \left[\frac{2}{9\delta} + \frac{2}{3} \right] \Phi(t) + \frac{2}{9\delta} \|f\|_2^2 + \frac{8T}{9\delta} \int_0^t \Phi(s) ds \tag{12}$$

при $\delta \in (0, 1)$. Из неравенств (4) и (12) вытекает следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma_1\Phi(t) + \gamma_2T\Phi(t) \int_0^t \Phi(s) ds \geq 0, \tag{13}$$

где $\alpha = \frac{3}{2}(1 - \delta)$, $\beta = \frac{2}{3\delta} + 2$, $\gamma_1 = \frac{2}{3\delta} \|f\|_2^2$, $\gamma_2 = \frac{8}{3\delta}$. При этом $\alpha = \frac{3}{2}(1 - \delta) > 1 \Rightarrow \delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Справедлива следующая теорема [23].

Теорема. Пусть $\Phi(t) \in C^{(2)}[0, T_0]$ удовлетворяет интегро-дифференциальному неравенству (13) и $\Phi(0) > 0$, $\Phi'(0) > 0$, $\alpha > 1$, причем начальные условия $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ таковы, что существует T_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\alpha - 1)^2} (\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2T_1^2}{\alpha - 1} (\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1} \Phi(0). \tag{14}$$

Тогда $\Phi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}t]^{1/(\alpha-1)}}$$

для всех $t \in [0, T_0]$ и $T_0 \leq T_1 < +\infty$, где

$$A := (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta + \gamma_2T_1^2}{\alpha - 1} (\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right] > 0.$$

Наша цель — построить пример функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$, для которых будут выполнены условия теоремы 1. Прежде всего, выберем число $\delta \in (0, 1/3)$ таким образом, чтобы множитель

$$\frac{2\gamma_1}{\alpha - 1} = \frac{8}{3} \frac{1}{\delta(1 - 3\delta)} \|f\|_2^2$$

принял минимальное значение. Это имеет место при $\delta = 1/6$:

$$\frac{2\gamma_1}{\alpha - 1} = 32\|f\|_2^2.$$

При таком $\delta = 1/6$ имеем $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = 6$, $\gamma_2 = 16$, $\frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha - 1} = 24 + 64T_1^2$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\Phi_0 &:= \Phi(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_0^2(x) + u_{0x}^2(x)] dx, \\ \Phi_1 &:= \Phi'(0) = \int_0^1 [u_0(x)u_1(x) + u_{0x}(x)u_{1x}(x)] dx.\end{aligned}\quad (15)$$

В дальнейшем, какую бы функцию $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, 1]$ мы ни выбрали, $u_1(x) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, 1]$ будем выбирать как решение задачи

$$u_{1xx}(x) - u_1(x) = -u_{0xx} + ((u_{0x})^2)_x, \quad u_1(0) = u_1(1) = 0. \quad (16)$$

Легко видеть, что это всегда возможно. Тогда из (3) сразу же имеем

$$f(x) = 0. \quad (17)$$

Умножим обе части уравнения (16) на функцию $u_0(x)$, проинтегрируем по частям по $x \in [0, 1]$ и получим следующее равенство:

$$\Phi_1 = \int_0^1 [u_{1x}(x)u_{0x}(x) + u_1(x)u_0(x)] dx = -\|u_{0x}\|_2^2 + \int_0^1 (u_{0x}(x))^3 dx.$$

Пусть теперь $u_{00}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, 1]$ удовлетворяет условиям

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad \int_0^1 (u_{00x}(x))^3 dx > 0.$$

Положим $u_0(x) = Ru_{00}(x)$. Значения параметра R будут выбраны в дальнейшем; функции u_0 и u_1 (последняя — согласно (16)) теперь зависят от R , но мы эту зависимость для краткости опускаем.

При достаточно большом $R > 0$ для функции $u_0(x) = Ru_{00}(x)$ имеем

$$R^3 \int_0^1 (u_{00x}(x))^3 dx > R^2 \|u_{00x}\|_2^2 \Rightarrow \Phi_1(R) := -R^2 \|u_{00x}\|_2^2 + R^3 \int_0^1 (u_{00x}(x))^3 dx > 0. \quad (18)$$

Чтобы исследовать поведение обеих частей уравнения (14) в зависимости от R , введем обозначения для его левой и правой частей соответственно:

$$\begin{aligned}I_1(R) &:= (\Phi'(0))^2 = (\Phi_1(R))^2 = \left(R^3 \int_0^1 (u_{00x}(x))^3 dx - R^2 \|u_{00x}\|_2^2 \right)^2, \\ I_2(R) &:= \frac{1}{T_1^2(\alpha - 1)^2} (\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha - 1} (\Phi(0))^2 = \frac{16}{T_1^2} R^4 \Phi_{00}^2 + (24 + 64T_1^2) R^4 \Phi_{00}^2, \\ \Phi_{00} &= \frac{1}{2} \int_0^1 [u_{00x}^2(x) + u_{00}^2(x)] dx,\end{aligned}$$

поскольку в силу (17) имеем $\gamma_1 = 0$. Отметим, что

$$I_1(R) \sim R^6, \quad I_2(R) \sim R^4,$$

поэтому при достаточно большом $R > 0$ будет выполнено равенство (14), а стало быть, выполнены все условия теоремы 1.

Из вышесказанного вытекает утверждение.

Утверждение. Задача (1) не имеет глобального (по времени) решения, если начальные условия удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u_0(x) = Ru_{00}(x), \quad u_{00}(0) = u_{00}(1) = 0, \quad R > 0, \quad \int_0^1 (u_{00x}(x))^3 dx > 0, \tag{19}$$

$$u_{1xx}(x) - u_1 = -u_{0xx} + ((u_{0x})^2)_x, \quad u_1(0) = u_1(1) = 0, \tag{20}$$

причем $R > 0$ выбрано так, что

$$(\Phi_1(R))^2 - 24R^4\Phi_0^2 > 0, \quad \left((\Phi_1(R))^2 - 24R^4\Phi_0^2 \right)^2 - 64^2R^8\Phi_0^4 > 0, \tag{21}$$

где Φ_0 и $\Phi_1(R)$ определены соответственно формулами (15), (18). При этом время разрушения решения удовлетворяет оценке

$$T_{bl} \leq T = \sqrt{\frac{(\Phi_1(R))^2 - 24R^4\Phi_0^2 - \sqrt{\left((\Phi_1(R))^2 - 24R^4\Phi_0^2 \right)^2 - 64^2R^8\Phi_0^4}}{2 \cdot 64R^4\Phi_0^2}}. \tag{22}$$

Замечание. Условия (21) гарантируют существование положительного корня уравнения (14) при фиксированных нами значениях α, β, γ_2 и $\gamma_1 = 0$.

3. Сведение исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе и ее приближенный метод решения. В этом и следующем разделах мы детально обсудим методы, которые помогут численно диагностировать факт разрушения решения и уточнить его локализацию как во времени, так, возможно, и в пространстве. Напомним, что априорная информация (22), полученная аналитически, дает нам верхнюю оценку T времени T_{bl} разрушения решения, однако не дает детального описания процесса разрушения. Численный же подход, использующий аналитически полученную априорную информацию, может помочь детализировать процесс разрушения и уточнить момент разрушения.

Для начала сведем исходное уравнение (1) к системе такого вида, который необходим для применения эффективных численных методов, которые будут описаны ниже. Для начала мы выполним замену

$$v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right), \quad w = v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

в результате которой задача (1) примет следующий вид¹:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \\ w = v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_{init_0}(x), \quad x \in [0, 1], \\ v(x, 0) = \left(\frac{\partial^2 u_{init_1}(x)}{\partial x^2} - u_{init_1}(x) \right), \quad x \in (0, 1), \\ w(x, 0) = \left(\frac{\partial^2 u_{init_1}(x)}{\partial x^2} - u_{init_1}(x) \right) + \frac{\partial^2 u_{init_0}(x)}{\partial x^2} \left(1 - 2 \frac{\partial u_{init_0}(x)}{\partial x} \right), \quad x \in (0, 1). \end{array} \right. \tag{23}$$

С целью численного решения системы (23) мы применяем метод прямых (MOL) [24, 25], т.е. аппроксимируем систему (23), содержащую три уравнения в частных производных, дифференциально-алгебраической системой, содержащей в дифференциальной части обыкновенные дифференциальные

¹Мы ставим задачу численного нахождения решения до момента времени T включительно, хотя знаем, что решение в этот момент времени не существует и, более того, даже может разрушиться ранее. Это допущение связано с тем, что мы хотим диагностировать разрушение решения численно, а значит, нам необходимо найти *численное* решение вплоть до этого момента времени включительно.

уравнения с производными по времени. Эта последняя система может быть эффективно решена с помощью одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом CROS1 [26].

Введем равномерную сетку X_N только по пространственной переменной x с шагом $h = (1 - 0)/N$, содержащую $N + 1$ узлов (что соответствует N интервалам): $X_N = \{x_n, 0 \leq n \leq N : x_n = 0 + nh\}$. Таким образом, после конечно-разностной аппроксимации пространственных производных со вторым порядком точности в (23) мы получим следующую дифференциально-алгебраическую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n = \frac{d}{dt} \left(\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - u_n \right), \quad n = \overline{1, N-1}, \quad t \in (0, T], \\ w_n = v_n + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \left(1 - \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{h} \right), \quad n = \overline{1, N-1}, \quad t \in (0, T], \\ \frac{dw_n}{dt} + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = 0, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad t \in (0, T], \\ u_0(t) = 0, \quad u_N(t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u_n(0) = u_{init_0}(x_n), \quad n = \overline{0, N}, \\ v_n(0) = \left(\frac{u_{init_1}(x_{n+1}) - 2u_{init_1}(x_n) + u_{init_1}(x_{n-1})}{h^2} - u_{init_1}(x_n) \right), \quad n = \overline{1, N-1}, \\ w_n(0) = \left(\frac{u_{init_1}(x_{n+1}) - 2u_{init_1}(x_n) + u_{init_1}(x_{n-1})}{h^2} - u_{init_1}(x_n) \right) + \\ + \frac{u_{init_0}(x_{n+1}) - 2u_{init_0}(x_n) + u_{init_0}(x_{n-1})}{h^2} \left(1 - \frac{u_{init_0}(x_{n+1}) - u_{init_0}(x_{n-1})}{h} \right), \\ n = \overline{1, N-1}. \end{array} \right. \quad (24)$$

После подстановки граничных сеточных значений u_0 и u_N из алгебраических уравнений в дифференциальные мы получим чисто дифференциальную систему, из которой требуется определить $N - 1$ неизвестных функций $u_n \equiv u_n(t) \equiv u(x_n, t)$ ($n = \overline{1, N-1}$, u_0 и u_N определяются из соотношений, заданных граничными условиями) и $2N - 2$ вспомогательных функций $v_n \equiv v_n(t) \equiv v(x_n, t)$, $w_n \equiv w_n(t) \equiv w(x_n, t)$ ($n = \overline{1, N-1}$, v_0, v_N, w_0 и w_N не входят в систему).

Полученная в итоге дифференциальная система может быть записана в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{dy}{dt} = f(y), \quad t \in (0, T], \\ y(0) = y^{(0)}, \end{array} \right. \quad (25)$$

где $y = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_{N-1} \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_{N-1} \ w_1 \ w_2 \ w_3 \ \dots \ w_{N-1})^T$, $f = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots \ f_{3N-3})^T$ и $y^{(0)} = (u_1(0) \ u_2(0) \ u_3(0) \ \dots \ u_{N-1}(0) \ v_1(0) \ v_2(0) \ v_3(0) \ \dots \ v_{N-1}(0) \ w_1(0) \ w_2(0) \ w_3(0) \ \dots \ w_{N-1}(0))^T$.

Вектор-функция f имеет следующую структуру:

$$f_n = \left\{ \begin{array}{ll} h^2 y_{n+N-1}, & \text{если } n = \overline{1, N-1}, \\ -y_{2N-1} + y_N + \frac{y_2 - 2y_1}{h^2} \left(1 - \frac{y_2}{h} \right), & \text{если } n = N, \\ -y_{n+N-1} + y_n + \frac{y_{n-N+2} - 2y_{n-N+1} + y_{n-N}}{h^2} \left(1 - \frac{y_{n-N+2} - y_{n-N}}{h} \right), & \text{если } n = \overline{N+1, 2N-3}, \\ -y_{3N-3} + y_{2N-2} + \frac{-2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} \left(1 + \frac{y_{N-2}}{h} \right), & \text{если } n = 2N-2, \\ -\frac{y_2 - 2y_1}{h^2}, & \text{если } n = 2N-1, \\ -\frac{y_{n-2N+3} - 2y_{n-2N+2} + y_{n-2N+1}}{h^2}, & \text{если } n = \overline{2N, 3N-4}, \\ -\frac{-2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2}, & \text{если } n = 3N-3, \end{array} \right.$$

а матрица M имеет следующие элементы:

$$M_{n,n} = \begin{cases} -(2 + h^2), & \text{если } n = \overline{1, N-1}, \\ 1, & \text{если } n = \overline{2N-1, 3N-3}, \end{cases}$$

$$M_{n,n+1} = 1, \quad \text{если } n = \overline{1, N-2},$$

$$M_{n,n-1} = 1, \quad \text{если } n = \overline{2, N-1},$$

остальные элементы матрицы M равны нулю.

Для численного решения системы (25) мы будем использовать схему Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS1), которая является наилучшим выбором для решения задач такого рода по причине порядка точности этой схемы $O(\tau^2)$, ее монотонности и устойчивости L_2 [27].

Для того чтобы применить схему CROS1, мы введем равномерную сетку (также можно использовать и квазиравномерную сетку [20] без каких-либо изменений в алгоритме) T_M по t , которая имеет $M + 1$ узлов (т.е. M интервалов): $T_M = \{t_m, 0 \leq m \leq M : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T\}$.

После этого мы можем применить схему CROS1 для решения системы (25):

$$\mathbf{y}(t_{m+1}) = \mathbf{y}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) \operatorname{Re} \mathbf{w}, \quad \text{где } \mathbf{w} \text{ является решением СЛАУ} \tag{26}$$

$$\left[M - \frac{1+i}{2} (t_{m+1} - t_m) \mathbf{f}_y(\mathbf{y}(t_m)) \right] \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t_m)).$$

Здесь \mathbf{f}_y — матрица Якоби, которая для рассматриваемой системы имеет следующую структуру:

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n+N-1} = h^2, \quad \text{если } n = \overline{1, N-1},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{N,1} = -\frac{2}{h^2} \left(1 - \frac{y_2}{h} \right),$$

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n-N+1} = -\frac{2}{h^2} \left(1 - \frac{y_{n-N+2} - y_{n-N}}{h} \right), \quad \text{если } n = \overline{N+1, 2N-3},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{2N-2,N-1} = -\frac{2}{h^2} \left(1 + \frac{y_{N-2}}{h} \right),$$

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n-N} = \frac{h - 2y_{n-N+1} + 2y_{n-N}}{h^3}, \quad \text{если } n = \overline{N+1, 2N-3},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{2N-2,N-2} = \frac{h - 2y_{N-2} + 2y_{N-1}}{h^3},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n-N+2} = \frac{h - 2y_{n-N+2} + 2y_{n-N+1}}{h^3}, \quad \text{если } n = \overline{N, 2N-3},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n} = 1, \quad \text{если } n = \overline{N, 2N-2},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n+N-1} = -1, \quad \text{если } n = \overline{N, 2N-2},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n-2N+2} = \frac{2}{h^2}, \quad \text{если } n = \overline{2N-1, 3N-3},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n-2N+1} = -\frac{1}{h^2}, \quad \text{если } n = \overline{2N, 3N-3},$$

$$(\mathbf{f}_y)_{n,n-2N+3} = -\frac{1}{h^2}, \quad \text{если } n = \overline{2N-1, 3N-4}.$$

Другие компоненты матрицы \mathbf{f}_u в случае рассматриваемого уравнения равны нулю.

Таким образом, матрица системы (26) состоит из девяти блоков размерности $(N-1) \times (N-1)$ (структура матрицы представлена на рис. 1). Этот факт дает возможность применить алгоритм решения СЛАУ, который найдет решение системы (26) за $O(N^1)$ операций.

4. Численная диагностика разрушения решения. При численных расчетах важно не только получить приближенный численный результат, но также и выполнить некоторую оценку его точности. Метод вычисления апостериорной асимптотически точной оценки погрешности [19] позволяет это сделать. Однако этот метод также может помочь и диагностировать факт разрушения точного решения [21]. Основные формулы и утверждения этого раздела впервые были представлены в работах [19–21]. Мы развили эти идеи в работах [11–18].

Мы аппроксимировали все пространственные производные в (23) с точностью $O(h^2)$, а при численном интегрировании системы (25) используем схему CROS1, которая имеет точность $O(\tau^2)$. Поэтому построенный метод решения системы (23) имеет точность $O(\tau^2 + h^2)$.

Введем базовую сетку $X_N \times T_M: \{x_n, t_m\}$, $0 \leq n \leq N$, $0 \leq m \leq M$. После этого произведем последовательное сгущение сеток, начиная с базовой, и вычислим решения $u(x, t)$ на полученных сетках. В связи с тем, что теоретический порядок точности по времени и по пространству равен $p = 2$, мы выполним последовательное сгущение сетки по времени в целое число раз r_t и сгущение пространственной сетки в целое число раз r_x так, чтобы выполнялось условие $r_t^p = r_x^p$ (подробности см. в [20]), т.е. в нашем случае $r_t^2 = r_x^2$. Наиболее удобно для счета выбрать $r_t = r_x = 2$. В этом случае каждая последующая сетка $X_{r_x^{s-1}N} \times T_{r_t^{s-1}M}$ (s — номер сетки) имеет узлы, совпадающие с узлами базовой сетки (x_n, t_m) . В этих узлах (x, t) мы можем выполнить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности [20, 21]

$$\Delta^{(r_x^s N, r_t^s M)}(x, t) = \frac{u^{(r_x^{s-1} N, r_t^{s-1} M)}(x, t) - u^{(r_x^{s-2} N, r_t^{s-2} M)}(x, t)}{r_t^2 - 1} + o(\tau^2 + h^2)$$

и оценить эффективный порядок точности [20, 21]

$$p_s^{\text{eff}}(x, t) = \log_{r_t} \frac{u^{(r_x^{s-2} N, r_t^{s-2} M)}(x, t) - u^{(r_x^{s-3} N, r_t^{s-3} M)}(x, t)}{u^{(r_x^{s-1} N, r_t^{s-1} M)}(x, t) - u^{(r_x^{s-2} N, r_t^{s-2} M)}(x, t)}.$$

В точках (x, t) , в которых решение исходной задачи имеет непрерывные вторые производные по времени и пространству, имеет место сходимость

$$p_s^{\text{eff}}(x, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} p^{\text{theor}} = 2 \quad (27)$$

и соответствующая оценка погрешности является асимптотически точной при $s \rightarrow \infty$ (или, что то же самое, при $N, M \rightarrow \infty$). Нарушение этой сходимости (27) говорит о потере гладкости точного решения. В частности, в случае степенной “сингулярности” $u(x, t) \sim (T_{bl} - t)^{-\beta}$ для любого $t > T_{bl}$ эффективный порядок точности $p^{\text{eff}}(x, t) \xrightarrow{N, M \rightarrow \infty} -\beta$. Это позволяет нам найти соответствующую степень β . Если $p^{\text{eff}}(x, t) \xrightarrow{N, M \rightarrow \infty} -\infty$ для любого $t > T_{bl}$, то мы можем утверждать, что решение экспоненциально возрастает, т.е. $u(x, t) = \infty$; если $p^{\text{eff}}(x, t) \xrightarrow{N, M \rightarrow \infty} 0$ для любого $t > T_{bl}$, то рост решения в окрестности “сингулярности” является логарифмическим: $u(x, t) \sim \ln(T_{bl} - t)$. Момент разрушения решения T_{bl} может быть найден с точностью до величины интервала базовой сетки по времени. Локализация разрушения решения по пространственной координате может быть осуществлена с точностью до величины интервала базовой сетки по пространству.

Если нарушение гладкости решения возникает во всей области по пространственной переменной одновременно, то отклонение сходимости $p^{\text{eff}}(x, t)$ от 2 возникает во всех точках сетки $\{x_n\}$ с первого временного слоя $t \geq T_{bl}$. Если разрушение решения возникает в одной-единственной точке x^* , то описанный метод позволяет проследить во времени процесс разрушения решения в остальных точках (соответствующие примеры есть в наших работах [14, 16, 17]). Такая диагностика процесса разрушения решения возможна в связи с тем, что схема CROS не приводит к переполнению даже в том случае, если решение задачи устремляется к бесконечности [19, 21].

Пример 1. Для начала рассмотрим следующий пример:

$$u_{\text{init}_0}(x) \equiv u_0(x) = R \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{3} x \right),$$

где $R > 0$. Такая функция удовлетворяет условиям (19). Функцию $u_{\text{init}_1} \equiv u_1$ находим как решение задачи (20).

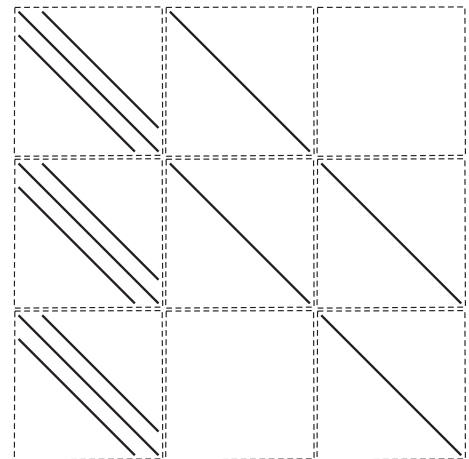


Рис. 1. Структура матрицы СЛАУ (26)

Для $R = 45$ получаем по формуле (22) верхнюю оценку времени разрушения: $T_1 \approx 0.507$. Будем производить расчет для следующего набора параметров: $N = 50$, $M = 50$, $r_x = 2$, $r_t = 2$, $S = 8$.

Получив приближенное численное решение на разных сетках, мы можем проверить сходимость эффективного порядка точности к теоретическому для каждого временного слоя по формуле

$$p_s^{\text{eff}}(t_m) = \log_{r_t} \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N \left(u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x_n, t_m) - u^{(r_x^{s-3}N, r_t^{s-3}M)}(x_n, t_m) \right)^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N \left(u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(x_n, t_m) - u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x_n, t_m) \right)^2}}, \quad (28)$$

где s — номер соответствующей сетки. Кроме того, еще раз хотим обратить внимание, что под обозначением (x_n, t_m) подразумеваются узлы, совпадающие с соответствующими узлами базовой сетки. После вычислений на S вложенных сетках эффективный порядок точности p^{eff} для каждого временного слоя t_m , меньшего чем t_{19} , сходится к $p^{\text{theor}} = 2$ (см. рис. 3). Для временного слоя, соответствующего моменту времени t_{19} имеем $p^{\text{eff}}(t_{19}) \rightarrow -1$, что означает, что $T_{bl} \in (t_{18}, t_{19}] \equiv (0.0720, 0.0760]$ является временем разрушения решения и что в точке T_{bl} решение имеет степенной характер роста $u(x, t) \sim (T_{bl} - t)^{-1}$.

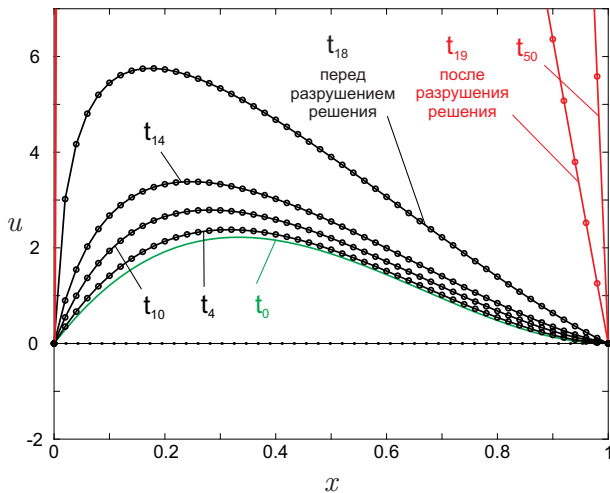


Рис. 2. Пример 1. Результат расчета решения $u_{(s)}(x, t) \equiv u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(t)$. Отмечены только узлы, совпадающие с узлами базовой сетки

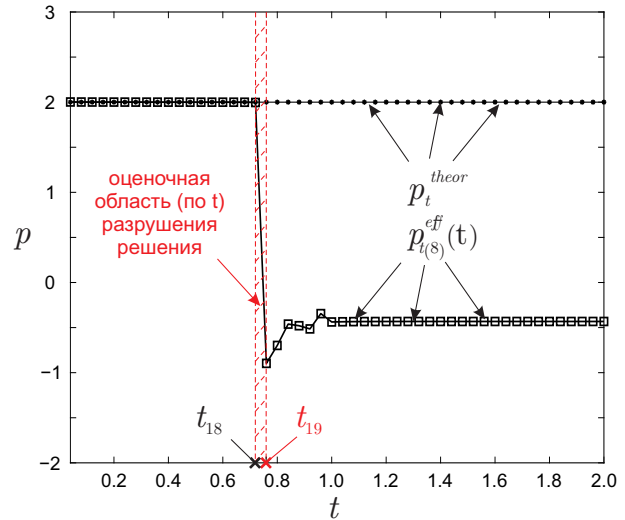


Рис. 3. Пример 1. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя. Разрушение решения диагностировано в момент времени $T_{bl} \in (t_{18}, t_{19}] \equiv (0.0720, 0.0760]$. Здесь и далее нулевой временной слой не показан

Мы также можем оценить эффективный порядок точности для каждой пространственной точки выбранного временного слоя, соответствующего моменту времени t_m , по формуле

$$p_s^{\text{eff}}(x_n, t_m) = \log_{r_t} \frac{u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x_n, t_m) - u^{(r_x^{s-3}N, r_t^{s-3}M)}(x_n, t_m)}{u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(x_n, t_m) - u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x_n, t_m)}. \quad (29)$$

Мы можем использовать эту формулу, например, для временного слоя, соответствующего моменту времени t_{19} , в котором было диагностировано разрушение решения, с целью определить, возникло ли разрушение на всем временном слое или только в отдельных точках по пространственной переменной. На рис. 4 мы можем видеть, что решение разрушилось во всех пространственных точках соответствующего временного слоя.

Пример 2. Рассмотрим еще один пример:

$$u_{init_0}(x) \equiv u_0(x) = R \sin(7x) \sinh(1 - x),$$

где $R > 0$. Такая функция также удовлетворяет условиям (19). Функцию $u_{init_1} \equiv u_1$ находим аналогично, как решение задачи (20).

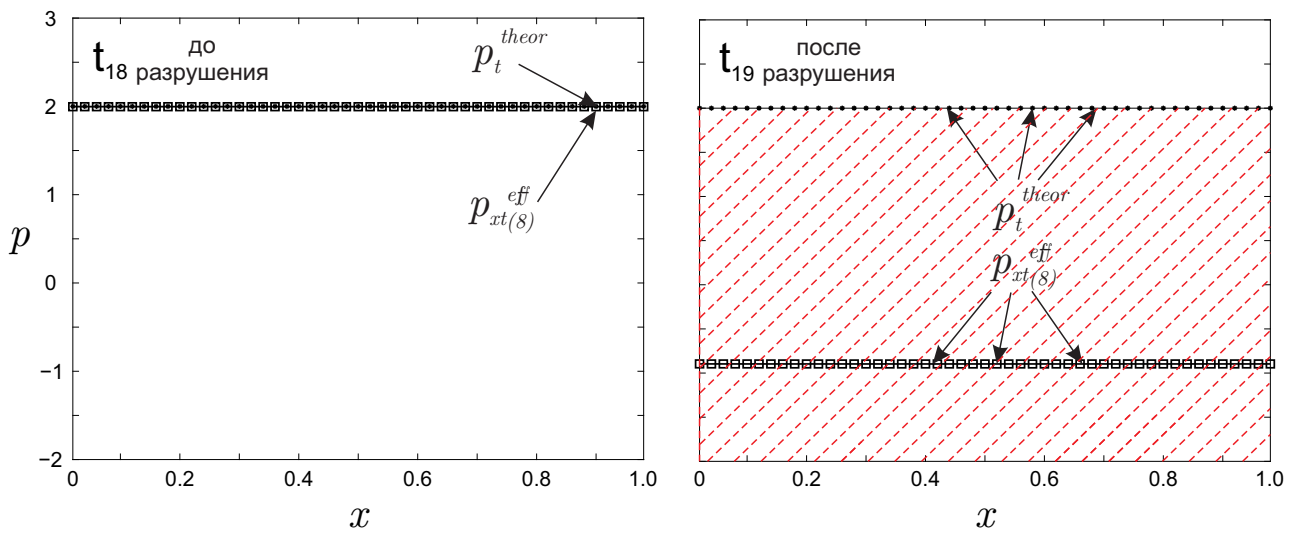


Рис. 4. Пример 1. Эффективный порядок точности для каждой пространственной точки временного слоя $m = 19$, соответствующего моменту времени $t_{19} = 0.0760$, на котором был диагностирован факт разрушения решения, и слоя $m = 18$, предшествующего моменту разрушения. На графиках видно, что разрушение решения диагностировано во всех пространственных точках этого временного слоя

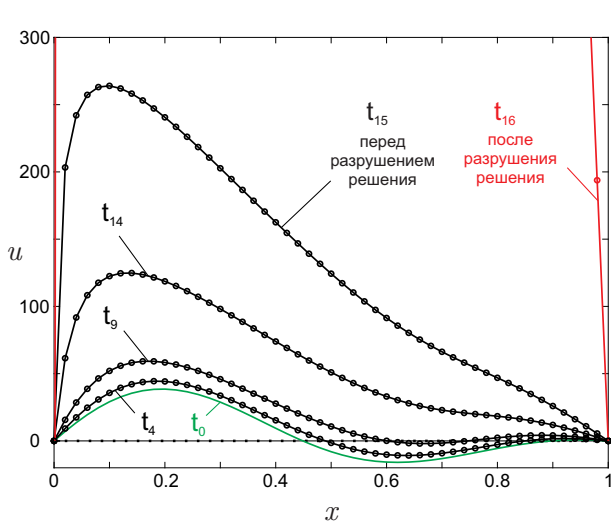


Рис. 5. Пример 2. Результат расчета решения $u_{(s)}(x, t) \equiv u^{(r_x^{s-1} N, r_t^{s-1} M)}(t)$. Отмечены только узлы, совпадающие с узлами базовой сетки

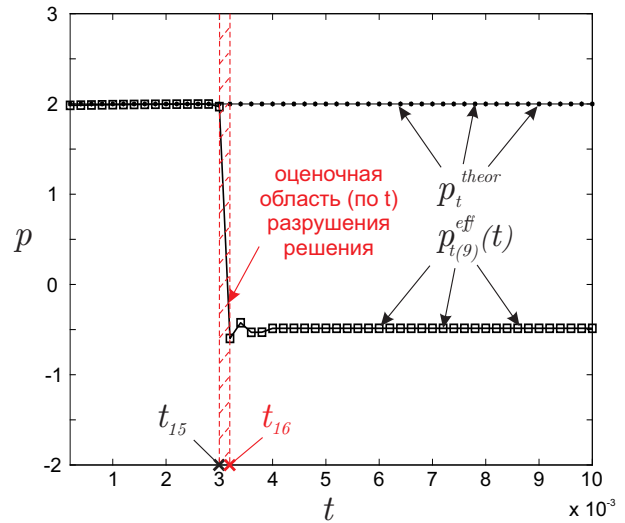


Рис. 6. Пример 2. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя. Разрушение решения диагностировано в момент времени $T_{bl} \in (t_{15}, t_{16}] \equiv (0.0030, 0.0032]$

Для $R = 44$ получаем по формуле (22) верхнюю оценку времени разрушения: $T_1 \approx 0.0290$. Расчет в данном примере будем производить для следующего набора параметров: $N = 50, M = 50, r_x = 2, r_t = 2, S = 9$. Так же, как и в примере 1, мы можем оценить эффективный порядок точности по формуле (28). После вычислений на S вложенных сетках эффективный порядок точности p^{eff} для каждого временного слоя t_m сходится к теоретическому $p^{\text{theor}} = 2$ (см. рис. 6) до временного слоя, соответствующего моменту времени t_{16} : $p^{\text{eff}}(t_{16}) \rightarrow -0.5$, что означает, что $T_{bl} \in (t_{15}, t_{16}] \equiv (0.0030, 0.0032]$ является временем разрушения решения и что в точке T_{bl} решение имеет степенной характер роста $u(x, t) \sim (T_{bl} - t)^{-0.5}$, как и в предыдущем примере.

Мы также можем использовать формулу (29) для временного слоя, соответствующего моменту времени t_{16} , на котором было диагностировано разрушение решения, для того чтобы определить, возникло ли разрушение на всем пространственном слое или только в отдельных точках по пространственной переменной. На рис. 7 можно видеть, что решение разрушилось во всех пространственных точках соответствующего временного слоя.

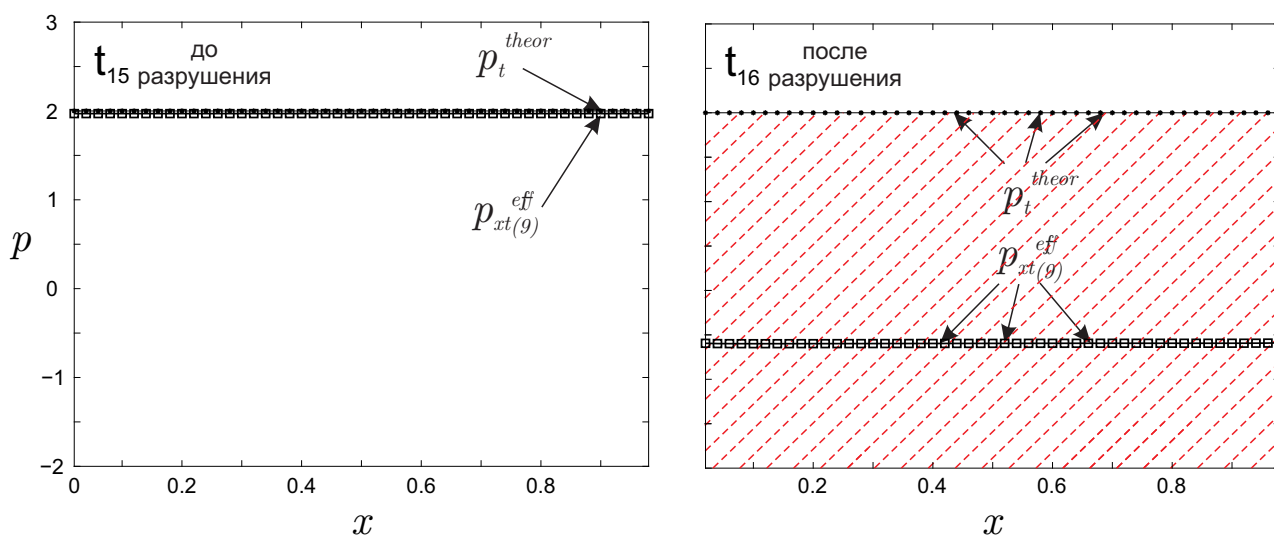


Рис. 7. Пример 2. Эффективный порядок точности для каждой пространственной точки временного слоя $m = 16$, соответствующего моменту времени $t_{16} = 0.0032$, на котором был диагностирован факт разрушения решения, и слоя $m = 15$, предшествующего моменту разрушения. На графиках видно, что разрушение решения диагностировано во всех пространственных точках этого временного слоя

5. Выводы. В настоящей статье на примере уравнения в туннельном диоде продемонстрирована эффективность метода численной диагностики разрушения решения путем оценки эффективного порядка точности по Ричардсону.

Были рассмотрены и другие примеры, однако во всех рассмотренных примерах нарушение гладкости решения возникает во всей области по пространственной переменной одновременно на временном слое, следующем сразу после момента разрушения. Примеров, где разрушение решения возникало бы вначале в одной-единственной точке x^* , в данной задаче обнаружено не было.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН. 2001. **234**. 3–383.
2. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
3. Галактионов В.А., Похожаев С.И. Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. **48**, № 10. 1819–1846.
4. Levine H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1973. **51**, N 5. 371–386.
5. Levine H.A. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ // Transactions of the American Mathematical Society. 1974. **192**. 1–21.
6. Калантаров В.К., Ладыженская О.А. Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов // Записки ЛОМИ. 1977. **69**. 77–102.
7. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
8. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
9. Корпусов М.О. О разрушении ионно-звуковых волн в плазме // Математический сборник. 2011. **202**, № 1. 37–64.
10. Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Физический факультет МГУ, 2014.
11. Лукьяненко Д.В., Панин А.А. Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 437–446.
12. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2016. **442**, N 2. 451–468.
13. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-up phenomena in the model of a space charge stratification in semiconductors: analytical and numerical analysis // Mathematical Methods in the Applied Sciences.

2017. **40**, N 7. 2336–2346.
14. Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А. Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2017. **10**, № 2. 107–123.
 15. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V. Instantaneous blow-up versus local solvability for one problem of propagation of nonlinear waves in semiconductors // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. **459**, N 1. 159–181.
 16. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Shlyapugin G.I. On the blow-up phenomena for a one-dimensional equation of ion-sound waves in a plasma: analytical and numerical investigation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. **41**, N 8. 2906–2929.
 17. Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Панин А.А., Юшков Е.В. О разрушении решений одного полного нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме с некоэрцитивными нелинейностями // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. **82**, № 2. 43–78.
 18. Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Некрасов А.Д. Аналитико-численное исследование процесса горения в нелинейной среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. **58**, № 9. 1553–1563.
 19. Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. **45**, № 10. 1837–1847.
 20. Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Rogov B.B. Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
 21. Al'shin A.B., Al'shina E.A. Numerical diagnosis of blow-up of solutions of pseudoparabolic equations // Journal of Mathematical Sciences. 2008. **148**, N 1. 143–162.
 22. Рабинович М.И. Автоколебания распределенных систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. **17**, № 4. 477–510.
 23. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами // Известия РАН. Серия матем. Принято к печати.
 24. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations. Stiff and differential-algebraic problems. Berlin: Springer, 2002.
 25. Калиткин Н.Н. Численные методы решения жестких систем // Математическое моделирование. 1995. **7**, № 5. 8–11.
 26. Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer Journal. 1963. **5**, N 4. 329–330.
 27. Альшин А.Б., Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корягина А.Б. Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. **46**, № 8. 1392–1414.

Поступила в редакцию
06.07.2019

A Study of Self-Oscillation Instability in Varicap-Based Electrical Networks: Analytical and Numerical Approaches

V. A. Vasilchenko¹, M. O. Korpusov², D. V. Luk'yanenko³, and A. A. Panin⁴

¹ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: v.v.a.onside@gmail.com

² Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: korpusov@gmail.com

³ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

⁴ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: a-panin@yandex.ru

Received July 6, 2019

Abstract: The blow-up of solutions is analytically and numerically studied for a certain Sobolev-type equation describing processes in varicap-based electrical networks. The energy method is used for the analytical study. For the numerical analysis, the original partial differential equation is approximated using a system of ordinary differential equations solved by the one-stage Rosenbrock scheme with a complex coefficient. The

numerical diagnostics of solution's blow-up is based on a posteriori asymptotically exact error estimation on sequentially condensed grids.

Keywords: Sobolev-type equation, numerical diagnostics of solution's blow-up.

References

1. E. Mitidieri and S. I. Pokhozhaev, "A Priori Estimates and Blow-up of Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities," *Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Ross. Akad. Nauk* **234**, 3–383 (2001) [*Proc. Steklov Inst. Math.* **234**, 1–362 (2001)].
2. A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhailov, *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations* (Nauka, Moscow, 1987; Gruyter, Berlin, 1995).
3. V. A. Galaktionov and S. I. Pokhozhaev, "Third-Order Nonlinear Dispersive Equations: Shocks, Rarefaction, and Blowup Waves," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **48** (10), 1819–1846 (2008) [*Comput. Math. Math. Phys.* **48** (10), 1784–1810 (2008)].
4. H. A. Levine, "Some Nonexistence and Instability Theorems for Solutions of Formally Parabolic Equations of the Form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$," *Arch. Rational Mech. Anal.* **51** (5), 371–386 (1973).
5. H. A. Levine, "Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the Form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$," *Trans. Am. Math. Soc.* **192**, 1–21 (1974).
6. V. K. Kalantarov and O. A. Ladyzhenskaya, "The Occurrence of Collapse for Quasilinear Equations of Parabolic and Hyperbolic Types," *Zap. Nauch. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova* **69**, 77–102 (1977). [*J. Math. Sci.* **10** (1), 53–70 (1978)].
7. A. G. Sveshnikov, A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, and Yu. D. Pletner, *Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type* (Fizmatlit, Moscow, 2007) [in Russian].
8. M. O. Korpusov, *Blow-up in Nonclassical Wave Equations* (LIBROCOM, Moscow, 2010) [in Russian].
9. M. O. Korpusov, "Blow-up of Ion Acoustic Waves in a Plasma," *Mat. Sb.* **202** (1), 37–64 (2011) [*Sb. Math.* **202** (1), 35–60 (2011)].
10. M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, and E. V. Yushkov, *Methods of the Theory of Solution Blow-Up for Nonlinear Equations of Mathematical Physics* (Moscow State Univ., Faculty of Physics, Moscow, 2014) [in Russian].
11. D. V. Luk'yanenko and A. A. Panin, "Blow-up Phenomena in the Model of a Space Charge Stratification in Semiconductors: Numerical Analysis of Original Equation Reduction to a Differential-Algebraic System," *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 437–446 (2016).
12. M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, and E. V. Yushkov, "Blow-up for One Sobolev Problem: Theoretical Approach and Numerical Analysis," *J. Math. Anal. Appl.* **442** (2), 451–468 (2016).
13. M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, and E. V. Yushkov, "Blow-up Phenomena in the Model of a Space Charge Stratification in Semiconductors: Analytical and Numerical Analysis," *Math. Meth. Appl. Sci.* **40** (7), 2336–2346 (2017).
14. M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, E. A. Ovsyannikov, and A. A. Panin, "Local Solvability and Decay of the Solution of an Equation with Quadratic Noncoercive Nonlinearity," *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Programm.* **10** (2), 107–123 (2017).
15. M. O. Korpusov and D. V. Lukyanenko, "Instantaneous Blow-up Versus Local Solvability for One Problem of Propagation of Nonlinear Waves in Semiconductors," *J. Math. Anal. Appl.* **459** (1), 159–181 (2018).
16. M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, and G. I. Shlyapugin, "On the Blow-up Phenomena for a One-Dimensional Equation of Ion-Sound Waves in a Plasma: Analytical and Numerical Investigation," *Math. Methods Appl. Sci.* **41** (8), 2906–2929 (2018).
17. M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, and E. V. Yushkov, "Blow-up of Solutions of a Full Non-Linear Equation of Ion-Sound Waves in a Plasma with Non-Coercive Non-Linearities," *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* **82** (2), 43–78 (2018) [*Izv. Math.* **82** (2), 283–317 (2018)].
18. M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, and A. D. Nekrasov, "Analytic-Numerical Investigation of Combustion in a Nonlinear Medium," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **58** (9), 1553–1563 (2018) [*Comput. Math. Math. Phys.* **58** (9), 1499–1509 (2018)].
19. E. A. Alshina, N. N. Kalitkin, and P. V. Koryakin, "Diagnostics of Singularities of Exact Solutions in Computations with Error Control," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **45** (10), 1837–1847 (2005) [*Comput. Math. Math. Phys.* **45** (10), 1769–1779 (2005)].
20. N. N. Kalitkin, A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, and B. V. Rogov, *Calculations on Quasi-Uniform Grids* (Fizmatlit, Moscow, 2005) [in Russian].

21. A. B. Al'shin and E. A. Al'shina, "Numerical Diagnosis of Blow-up of Solutions of Pseudoparabolic Equations," *J. Math. Sci.* **148** (1), 143–162 (2008).
22. M. I. Rabinovich, "Self-Oscillations of Distributed Systems," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz.* **17** (4), 477–510 (1974). [*Radiophys. Quantum Electron.* **17** (4), 361–385 (1974)].
23. M. O. Korpusov and E. A. Ovsyannikov, "Blow-up Instability in Nonlinear Wave Models with Distributed Parameters," *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* (in press).
24. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems* (Springer, Berlin, 2002).
25. N. N. Kalitkin, "Numerical Methods for Solving Stiff Systems," *Mat. Model.* **7** (5), 8–11 (1995).
26. H. H. Rosenbrock, "Some General Implicit Processes for the Numerical Solution of Differential Equations," *Comput. J.* **5** (4), 329–330 (1963).
27. A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, N. N. Kalitkin, and A. B. Koryagina, "Rosenbrock Schemes with Complex Coefficients for Stiff and Differential Algebraic Systems," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **46** (8), 1392–1414 (2006) [*Comput. Math. Math. Phys.* **46** (8), 1320–1340 (2006)].