УДК 532.529 doi 10.26089/NumMet.v20r329

СРАВНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ С НЕКОТОРЫМИ СХЕМАМИ ВЫСОКОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ. ДВУМЕРНЫЕ ТЕСТЫ

Д. В. Садин[1], Б. В. Беляев[2], В. А. Давидчук[3]

Исследуются вычислительные свойства предложенной ранее новой модификации метода крупных частиц на основе нелинейной коррекции искусственной вязкости на первом (эйлеровом) этапе и гибридизации потоков на втором (лагранжевом и заключительном) этапе, дополненной двухшаговым алгоритмом Рунге–Кутты по времени. Метод обладает вторым порядком аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. На примере тестовых задач сверхзвукового потока газа в канале со ступенькой и двойного маховского отражения подтверждена работоспособность и вычислительная эффективность метода в сравнении с современными схемами высокой разрешающей способности.

Ключевые слова: метод крупных частиц, высокая разрешающая способность, тестовые задачи, вычислительные свойства.

1. Введение. Из большого разнообразия двумерных тестов остановимся на двух задачах: сверхзвукового потока газа в канале со ступенькой и сверхзвукового натекания газа на клин с образованием двойного маховского отражения [1–3]. Эти задачи представляют серьезные трудности для численного воспроизведения структуры потока, включающей ударно-волновые конфигурации совместно с вихреобразованием и развитием неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на контактных поверхностях. Вычислительные проблемы и артефакты этих тестов, связанные с энтропийным следом, сингулярной точкой, немонотонностью, эффектом “карбункула”, обсуждаются в ряде работ [1, 4, 5]. Указанные задачи в течение не одного десятилетия и по настоящее время являются вызовом для проверки работоспособности любой разностной схемы.

Представленная работа является продолжением исследований новой модификации метода крупных частиц, построенной на основе нелинейной коррекции искусственной вязкости на первом (эйлеровом) этапе и гибридизации потоков на втором (лагранжевом и заключительном) этапе, дополненной двухшаговым алгоритмом Рунге–Кутты по времени TVD (Total Variation Diminishing) [6–9]. Проведенные ранее исследования продемонстрировали вычислительные свойства схемы, такие как простота алгоритма, монотонность, малый уровень диссипативных свойств, высокая разрешающая способность, возможность решения задач с доминированием конвекции составного (негиперболического) типа, например [10] и др. Метод без затруднений допускает “автоматическое” обобщение на пространственные ортогональные сетки, что для некоторых схем является нетривиальной задачей, например [11].

2. Основные уравнения. Рассмотрим динамику калорически совершенного невязкого газа в рамках уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \nabla_d \boldsymbol{G} + \nabla_d \boldsymbol{F} = 0,$$
$$\boldsymbol{q} = [\rho, \rho\boldsymbol{v}, \rho E]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{G} = [\rho\boldsymbol{v}, \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}, \rho E\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{F} = [0, p, p\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}, \quad \nabla_d = \mathrm{diag}\,(\nabla\cdot, \nabla, \nabla\cdot), \tag{1}$$

где $\rho, \boldsymbol{v}, p, E$ — плотность, вектор скорости с компонентами u и v, давление, полная энергия газа; $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}$ — консервативные, потоковые, градиентные и деформационные величины соответственно; t — время.

Замыкающее уравнение состояния имеет вид $p = (\gamma - 1)\rho\big(E - \boldsymbol{v}^2/2\big)$, где γ — показатель адиабаты.

3. Численный алгоритм. Дискретизацию будем проводить на равномерной ортогональной сетке с шагом h в конечно-объемной реализации, при которой консервативные величины $\boldsymbol{q}_{i,j}$ относятся к центрам контрольных объемов (ячеек) (x_i, y_j). Потоковые величины $\boldsymbol{G}_n$, градиентные и деформационные

[1] Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, г. Санкт-Петербург; профессор, e-mail: sadin@yandex.ru

[2] Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, г. Санкт-Петербург; доцент, e-mail: belyaev.boris.spb@gmail.com

[3] Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, г. Санкт-Петербург; адъюнкт, e-mail: david_lxii@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

слагаемые $\boldsymbol{F}_n$ уравнений (1) определяются на границах ячеек (рис. 1), пронумерованных против часовой стрелки $n = 1, 2, 3, 4$. Временной слой будем помечать верхним индексом k, а шаг по времени обозначим τ.

На первом (лагранжевом) этапе вычисляются предварительные значения искомых функций с использованием центральных разностей градиентных и деформационных величин $\boldsymbol{F}_n$ на гранях ячеек, определяемых как среднеарифметическое в центрах примыкающих контрольных объемов:

$$\begin{aligned}
\rho_{i,j}^{(1)} &= \rho_{i,j}^{k}, \\
u_{i,j}^{(1)} &= u_{i,j}^{k} - \frac{\left(\tilde{p}_3^k - \tilde{p}_1^k\right)\tau}{\rho_{i,j}^{k} h}, \\
v_{i,j}^{(1)} &= v_{i,j}^{k} - \frac{\left(\tilde{p}_4^k - \tilde{p}_2^k\right)\tau}{\rho_{i,j}^{k} h}, \\
E_{i,j}^{(1)} &= E_{i,j}^{k} - \frac{\left(\tilde{p}_3^k u_3^k + \tilde{p}_4^k v_4^k - \tilde{p}_1^k u_1^k - \tilde{p}_2^k v_2^k\right)\tau}{\rho_{i,j}^{k} h},
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\tilde{p}_n^k = p_n^k + \left[1 - \psi_v(r_n)\right] Q_n^k, \tag{3}$$

$$r_1 = \begin{cases} \dfrac{u_{i-1,j}^k - u_{i-2,j}^k}{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}, & \text{если } \left(u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k\right)\left(p_{i,j}^k - p_{i-1,j}^k\right) \geqslant 0, \\ \dfrac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k} & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Давление на гранях в (3) корректируется нелинейной скалярной добавкой искусственной вязкости Q_n^k с ограничителем $\psi_v(r_n)$ как функции r_n отношения соответствующих проекций разности скоростей слева или справа от грани n (см. (3) и (4) для первой грани r_1). Возможно применение различных представлений искусственной вязкости. Далее численная диссипативная используется в форме Ландшоффа [12], например для первой грани $Q_1^k = -B_v\sqrt{\gamma p_1^k \rho_1^k}\cdot\left(u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k\right)$. Нелинейная коррекция Христенсена [13] $\left[1 - \psi_v(r_n)\right] Q_n^k$ в (3) не понижает порядок аппроксимации на гладких решениях $O\left(h^2\right)$ [9].

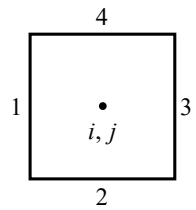

Рис. 1. Нумерация граней ячейки

На втором (эйлеровом и заключительном) этапе определяются окончательные значения искомых переменных с использованием потоков массы, импульса и энергии $\boldsymbol{G}_n$ через грани ячеек с аппроксимацией $O\left(\tau + h^2\right)$ на гладких решениях:

$$\begin{aligned}
\rho_{i,j}^{(2)} &= \rho_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{h}\left(\hat{M}_1^{(1)} + \hat{M}_2^{(1)} - \hat{M}_3^{(1)} - \hat{M}_4^{(1)}\right), \\
u_{i,j}^{(2)} &= \frac{1}{\rho_{i,j}^{(2)}}\left[\rho_{i,j}^{(1)} u_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{h}\left(\hat{u}_1^{(1)}\hat{M}_1^{(1)} + \hat{u}_2^{(1)}\hat{M}_2^{(1)} - \hat{u}_3^{(1)}\hat{M}_3^{(1)} - \hat{u}_4^{(1)}\hat{M}_4^{(1)}\right)\right], \\
v_{i,j}^{(2)} &= \frac{1}{\rho_{i,j}^{(2)}}\left[\rho_{i,j}^{(1)} v_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{h}\left(\hat{v}_1^{(1)}\hat{M}_1^{(1)} + \hat{v}_2^{(1)}\hat{M}_2^{(1)} - \hat{v}_3^{(1)}\hat{M}_3^{(1)} - \hat{v}_4^{(1)}\hat{M}_4^{(1)}\right)\right], \\
E_{i,j}^{(2)} &= \frac{1}{\rho_{i,j}^{(2)}}\left[\rho_{i,j}^{(1)} E_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{h}\left(\hat{E}_1^{(1)}\hat{M}_1^{(1)} + \hat{E}_2^{(1)}\hat{M}_2^{(1)} - \hat{E}_3^{(1)}\hat{M}_3^{(1)} - \hat{E}_4^{(1)}\hat{M}_4^{(1)}\right)\right],
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\hat{M}_n^{(1)}$ — потоки массы за шаг по времени τ через соответствующие грани ячеек, например через первую поверхность (рис. 1) поток определяется как $\hat{M}_1^{(1)} = \hat{\rho}_1^{(1)} u_1^{(1)} \tau$.

Потоковые величины на гранях ячеек (5), помеченные верхним символом $\wedge$, получены путем взвешенной ограничителем потоков $\psi_f(r_n)$ линейной комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций функций $\varphi = \{\rho, u, v, E\}$ (см. [8, 9]).

Применение метода возможно после первых двух этапов. Вместе с тем, для повышения порядка аппроксимации по времени и робастности воспользуемся двухшаговым TVD-алгоритмом Рунге–Кутты (Total Variation Diminishing Runge–Kutta scheme) с точностью $O\left(\tau^2 + h^2\right)$ на гладких решениях:

$$\boldsymbol{q}^{(2)} = \boldsymbol{q}^k + \tau L\left(\boldsymbol{q}^k\right), \quad \boldsymbol{q}^{k+1} = 0.5\left(\boldsymbol{q}^k + \boldsymbol{q}^{(2)}\right) + 0.5\tau L\left(\boldsymbol{q}^{(2)}\right),$$

где $L\big(\boldsymbol{q}^k\big)$ — пространственный конечно-объемный оператор (2)–(5).

Шаг по времени определяется из условия Куранта–Фридрихса–Леви:

$$\tau^k = \frac{\mathrm{CFL}\cdot h}{\max\limits_{\forall i,j}\left[\left(\left|u^k_{i,j}\right| + a^k_{i,j}\right), \left(\left|v^k_{i,j}\right| + a^k_{i,j}\right)\right]},$$

где CFL — число Куранта и $a^k_{i,j}$ — скорость звука в точке $\big(x_i, y_j, t^k\big)$.

Модифицированный метод крупных частиц, построенный на основе схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами (CDP2 — Customizable Dissipative Properties) [6–9], допускает настройку выбором ограничителей и коэффициента искусственной вязкости B_v (код CDP2 содержит переключатель ограничителей). Далее для удобства используем следующие обозначения для CDP2-LIMITER, указывающие на используемый ограничитель потока $\psi_f(r_n)$ в (5): MM — MINMOD, VL — VANLEER, MU — MUSCL, SB — SUPERBEE [6, 7]. В качестве ограничителя вязкости $\psi_v(r_n)$ в (3) далее задан VANLEER.

4. Численные эксперименты. Исходные данные и результаты решения представляются в безразмерном виде. Все расчеты выполнялись с числом Куранта 0.5 и коэффициентом искусственной вязкости $B_v = 1$.

4.1. Тест со ступенькой. Двумерная тестовая задача течения в канале со ступенькой (Mach 3 Wind Tunnel With a Step) была предложена в работе [14], рассматривалась в [1–3] и широко используется для проверки работоспособности численных методов по настоящее время [15, 16] и др.

В начальный момент времени полагается (см. [1]), что в плоском канале со ступенькой имеется однородный поток газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$, плотностью 1.4, давлением 1 и скоростью 3. Размеры канала равны 1 в поперечном и 3 в продольном направлениях. Ступенька высотой 0.2 расположена от точки 0.6 до конца канала. На левой (входной) и правой (выходной) границах задавались мягкие краевые условия (экстраполяция изнутри расчетной области), а на стенках — граничные условия отражения. Как и в цитируемых работах, расчет выполнялся до момента времени 4, в который течение газа еще не является стационарным. Поток газа устанавливает к моменту времени 12 (см. [1]).

Для корректного сравнения результатов расчетов отметим характерные черты и численные проблемы теста со ступенькой. Топологическими характеристиками течения являются точность численного воспроизведения характерных точек (положения тройной точки, мест отражения ударных волн от стенок канала и ступеньки, размер ножки Маха, форм поверхностей ударных и тангенциальных разрывов). В зависимости от применяемой разностной схемы и разрешения сетки численные результаты могут содержать количественные ошибки, например высоты и положения ножки Маха [17], и даже искажения качественной природы структуры потока [18].

Угол ступеньки является центром волны разрежения. Эта особенность (сингулярная точка) вызывает вычислительные трудности. Если не вводить каких-либо специальных условий в окрестности сингулярной точки, то большинство разностных схем порождают перерасширение потока и возникновение численного пограничного слоя вдоль верхней стенки ступеньки [1]. Для минимизации такого рода ошибок предпринимаются искусственные приемы, например введение специальных граничных условий стационарного изоэнтропического расширения [1], сглаживания (закругления) угла ступеньки [16] или сгущение сетки в области угла ступеньки [3].

На рис. 2 приведены примеры расчетов тестовой задачи со ступенькой без введения искусственных условий в окрестности сингулярности с использованием модифицированного метода крупных частиц (CDP2) с различными ограничителями потоков (а)–(в) и других схем повышенного порядка аппроксимации: с адаптивной искусственной вязкостью [19] (д), методом HLLC (Harten Lax van Leer Contact) [20] (е), методом RKDG (Runge–Kutta Discontinuous Galerkin) с потоком HLLC [20] (ж), RKDG-методом [3] (з). В приведенных примерах использовались равномерные ортогональные сетки (а)–(д), (з) и сетки с треугольными ячейками (е), (ж) с дискретизацией 1/80. При взаимодействии падающей ударной волны с численным пограничным (энтропийным) слоем на верхней стенке ступеньки образуется фиктивная ножка Маха за исключением расчета по схеме CDP2 с ограничителем SUPERBEE (рис. 2а). Однако в последнем случае ввиду недостаточной диссипативности наблюдаются колебания линий уровня плотности.

На основе анализа свойства численных результатов по схеме CDP2 с различными ограничителями (рис. 2а–2в) предлагается новый прием решения проблемы сингулярности угловой точки — локальное изменение диссипативных свойств в ее окрестности без изменения геометрии и постановки искусственных граничных условий. А именно, в области угловой точки ступеньки с размерами, например ± 10 ячеек по координатным осям, проводить расчет с нелинейной коррекцией SUPERBEE, а в остальной части расчетной области — с другими ограничителями. Указанный способ дает хороший результат — числен-

ный дефект в виде фиктивной ножки Маха исчезает при монотонности решения, например по схеме CDP2-MM (см. рис. 2г). Сравнение с эталонным решением, где использовались специальные граничные условия стационарного изоэнтропического расширения [1], подтверждает правильное воспроизведение модифицированным методом крупных частиц топологических свойств потока (рис. 3а). Наличие широкого численного пограничного слоя при использовании цитируемых схем приводит к искажению положения структурных элементов потока, что видно из рис. 2д–2з и сопоставления расчетов по схеме CDP2-MM и RKDG-методом [3] (рис. 3б).

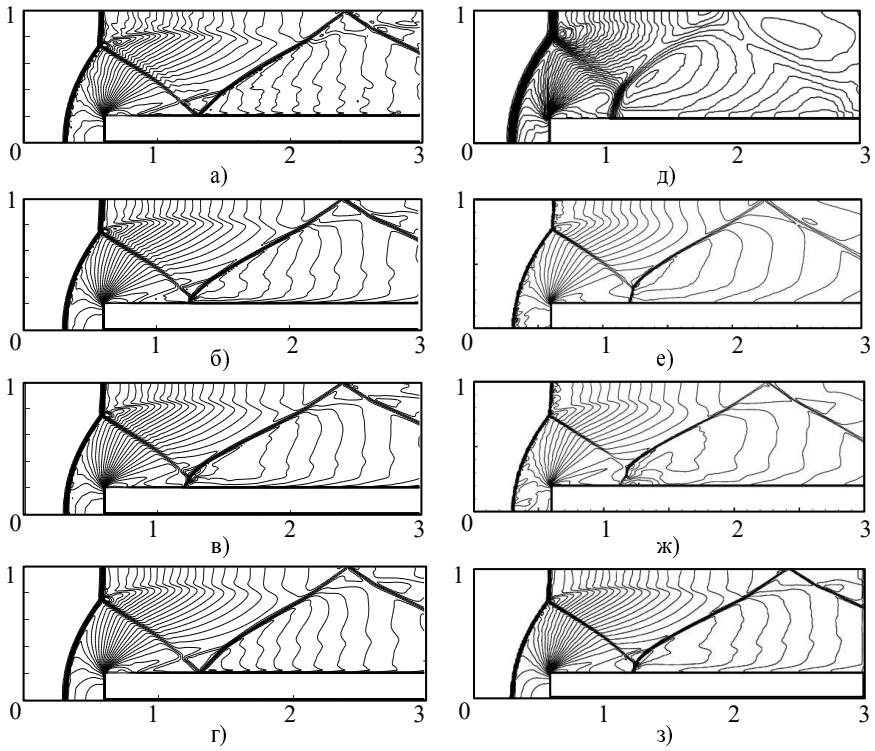

Рис. 2. Результаты решения задачи сверхзвукового потока в канале со ступенькой в момент времени 4 на сетке 1/80. Модифицированный метод крупных частиц с ограничителем потока: а) SUPERBEE, б) MUSCL, в) VANLEER, г) SUPERBEE-MINMOD; другие методы: д) метод адаптивной искусственной вязкости из [19], HLLC из [20], RKDG с потоком HLLC из [20], RKDG из [3]. Плотность нанесена в виде 30 контурных линий плотности от 0.090338 до 6.2365

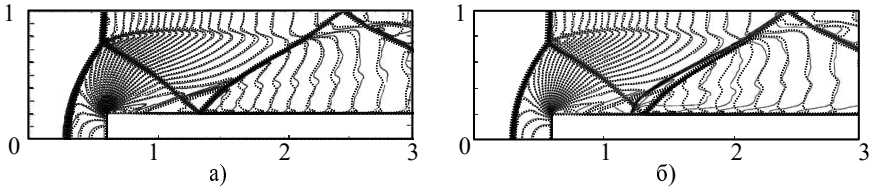

Рис. 3. Сравнение результатов расчетов на сетке 1/80: а) сплошные линии PPM (Piecewise Parabolic Method) из [1], пунктир CDP2-MM (30 контурных линий плотности от 0.2568 до 6.067); б) сплошные линии RKDG-метод из [3], пунктир CDP2-MM (30 контурных линий плотности от 0.090338 до 6.2365)

Для рассматриваемого теста отмечаются также численные энтропийные возмущения, исходящие из тройной точки [1]. Этот численный эффект порождает в разной степени осцилляции решения в ее окрестности и влияет на интенсивность развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца вдоль контактной поверхности, исходящей из тройной точки. Вместе с тем, как отмечается в [1], неустойчивость имеет скорее физическую природу, нежели искусственную.

На рис. 4 представлены результаты расчетов модифицированным методом крупных частиц (CDP2-MM) на подробных сетках с разрешением 1/320 (а) в сравнении со схемой WENO5 (Weighted Essentially

Non-Oscillatory) [15] с искусственными граничными условиями стационарного изоэнтропического расширения из [1] и с разрешением сетки 1/720 (б). Следует отметить согласованность результатов расчетов (рис. 4а). Схема CDP2-MM демонстрирует хорошее качество численного решения: воспроизведение неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, быструю диссипацию энтропийных численных возмущений от тройной точки, отсутствие расчетных дефектов, порождаемых численным пограничным слоем, а также монотонностью. Качество модифицированного метода крупных частиц подтверждается также сравнением с гибридной взвешенной нелинейной интерполяцией шестого порядка аппроксимации (CCSSR-HW6) [15] (рис. 5). Схема CCSSR-HW6 имеет высокую разрешающую способность, вместе с тем допускает заметные осцилляции решения и численный пограничный слой на верхней стенке ступеньки (рис. 5б). Код CDP2-MM является семантически и логически более простым, требует существенно меньше элементарных математических операций (умножения/деления, сложения/вычитания) и логических ветвлений при переходе на следующий временной слой на одинаковых сетках, при этом позволяет выявлять вихревую структуру и сохраняет монотонность (рис. 5а).

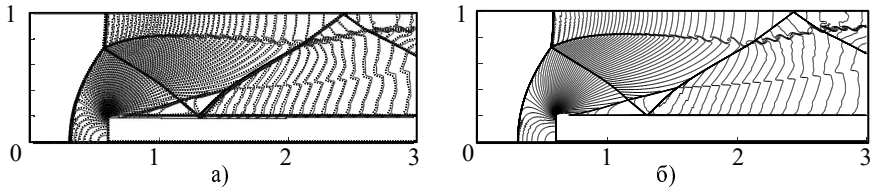

Рис. 4. Результаты расчетов на подробных сетках (60 контурных линий плотности от 0.2568 до 6.607): а) сетка 1/320 — сплошные линии WENO5 из [15], пунктир CDP2-MM, б) сетка 1/720 — CDP2-MM

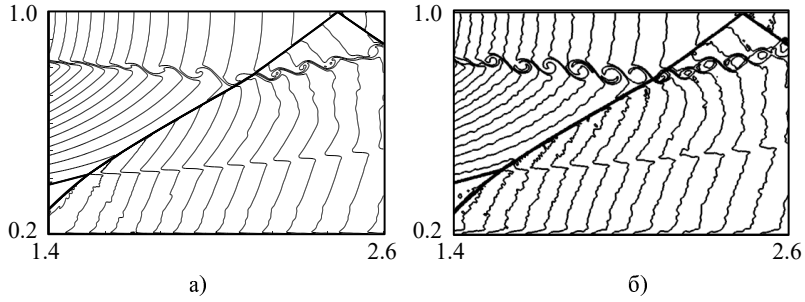

Рис. 5. Результаты расчетов на подробных сетках (60 контурных линий плотности от 0.2568 до 6.607): а) сетка 1/720 — CDP2-MM, б) сетка 1/320 — CCSSR-HW6 из [15]

4.2. Двойное маховское отражение. Детальное исследование разновидностей отражения ударной волны от клина с подробной библиографией приводится в [21].

Задача двойного маховского отражения (Double Mach Reflection) нашла широкое применение при тестировании разностных схем [1–4, 15, 20, 22, 23].

Как и в цитируемых работах, для удобства расчетов система координат повернута до совпадения оси x со стенкой клина. В начальный момент времени ударная волна с числом Маха 10 в воздухе ($\gamma = 1.4$) расположена под углом 60° к горизонтальной стенке от $x = 1/6$, $y = 0$ до верхней границы расчетной области $y = 1$. Перед ударной волной газ с плотностью 1.4 и под давлением 1 находится в состоянии покоя. На левой границе задаются условия Рэнкина–Гюгонио, на выходных границах справа ($x = 4$) и при $x < 1/6$, $y = 0$ — экстраполяции изнутри расчетной области, на стенке при $x \geqslant 1/6$, $y = 0$ — отражения, на верхней границе заданы точные условия движения ударной волны с числом Маха 10. Расчет завершается в момент времени 0.2.

При решении поставленной задачи реализуется одна из конфигураций отражения, обсуждаемая в работе [21]. А именно: образуется ударно-волновая структура с двумя тройными точками, образованными падающей, отраженными ударными волнами и ножкой Маха, а также двумя неустойчивыми контактными границами и вихревой струи [1, 4]. В зависимости от применяемой разностной схемы численное решение сопровождается артефактами: эффектом “карбункула” (излом ножки Маха) [5], немонотонностью, колебанием плотности между вторичной отраженной ударной волной и вторичным слабым контактным разрывом [4], “стартовыми ошибками” при формировании стационарного профиля ударной волны в начале

расчета в форме полосы под углом к стенке [1] и др.

На рис. 6 приведены результаты расчетов с использованием кода CDP2-VL, схемы WENO5 [22] и методом Годунова–Колгана–Родионова с искусственной вязкостью [5] на сетках с разрешением 1/240, 1/480, 1/960. В отличие от предложенной схемы и WENO5, метод Годунова и его модификация второго порядка Колгана и Родионова склонны к формированию эффекта “карбункула”, для компенсации которого авторами введена искусственная вязкость [5]. Сравниваемые схемы примерно с одинаковой точностью воспроизводят структурные элементы потока (положения тройных точек, углы поверхностей разрыва).

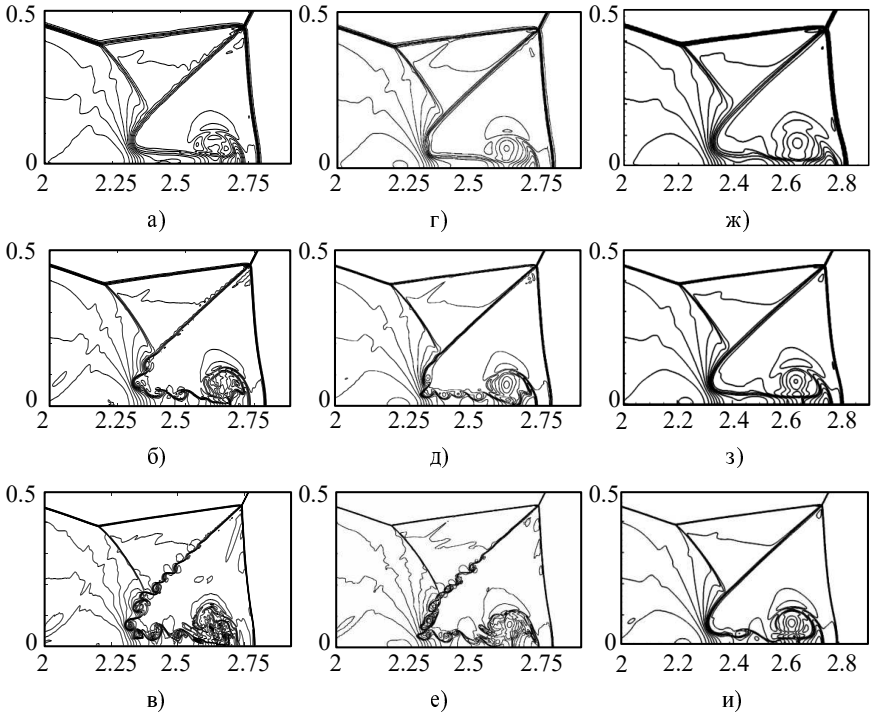

Рис. 6. Результаты решения задачи с двойным маховским отражением в момент времени 0.2 на сетках 1/240, 1/480, 1/960 (сверху вниз соответственно): а)–в) CDP2-VL, г)–е) WENO5 из [22], ж)–и) метод Годунова–Колгана–Родионова из [5]. Плотность нанесена в виде 30 контурных линий плотности от 1.5 до 22.9705

Возможности выявления развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца модифицированным методом крупных частиц с ограничителем VANLEER (а)–(в) и схемой WENO5 (г)–(е) близки. Метод Годунова–Колгана–Родионова позволяет получать монотонные решения, но является более диссипативным и не разрешает вихреобразование на контактной поверхности даже на подробной сетке 1/960 (ж)–(и). Одним из преимуществ схемы CDP2 является возможность ее настройки для получения требуемого качества решения. Например, использование ограничителя MINMOD с повышенной степенью диссипации делает решение на сетке 1/960 монотонным и при этом выявляет неустойчивость на контактной границе (рис. 7).

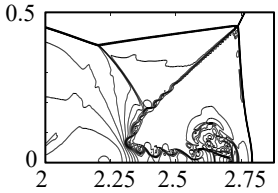

Рис. 7. Результаты расчета модифицированным методом крупных частиц (CDP2-MM) на сетке 1/960 (30 контурных линий плотности от 1.5 до 22.9705)

Следует отметить, что высокая разрешающая способность достигается, как правило, повышением порядка аппроксимации: в схемах с гибридной взвешенной нелинейной интерполяцией до шестого [15] и взвешенно существенно неосциллирующих схемах до девятого [22] и тринадцатого [23]. С другой стороны, издержками улучшения детализации численного решения на одной и той же сетке является увеличение вычислительных затрат. Такие оценки можно найти в ряде публикаций, например схема WENO5 в 5.5 раз более затратна по времени, чем JT (centered scheme with limiter by Jiang and Tadmor) [24], близкая по количеству элементарных математических операций при переходе на верхний временной слой к предложенному алгоритму. Повышение порядка аппроксимации в WENO-схемах с пятого до девятого

приводит к увеличению времени решения более чем на 70% [22] и на порядок в сравнении с JT-схемой, а также с предложенной схемой. Заметим, что RKDG-метод с потоком Лакса–Фридрихса почти в двадцать раз более “дорогой”, чем код HLLC [20].

5. Заключение. Модифицированный метод крупных частиц (схема CDP2) обладает семантической и логической простотой, экономичностью. С одной стороны, для повышения качества решения метод имеет возможность регулирования диссипативных свойств; с другой стороны, для широкого класса задач настройка не требуется. На примере двух тестовых задач сверхзвукового потока газа в канале со ступенькой и сверхзвукового натекания газа на клин с образованием двойного маховского отражения подтверждена работоспособность рассматриваемого модифицированного метода и возможность нового решения классических вычислительных проблем, например сингулярной точки. Схема CDP2 может быть полезна исследователям, использующим классический метод крупных частиц, для повышения его разрешающей способности. Доработка кода при этом не является трудоемкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Colella P., Woodward P.R.* The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // Journal of Computational Physics. 1984. **54**, N 1. 174–201.
2. *Jiang G.-S., Shu C.-W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of Computational Physics. 1996. **126**, N 1. 202–228.
3. *Cockburn B., Shu C.W.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // Journal of Scientific Computing. 2001. **16**, N 3. 173–261.
4. *Kemm F.* On the proper setup of the double Mach reflection as a test case for the resolution of gas dynamics codes // Computers and Fluids. 2016. **132**. 72–75.
5. *Тагирова И.Ю., Родионов А.В.* Применение искусственной вязкости для борьбы с карбункул-неустойчивостью в схемах типа Годунова // Математическое моделирование. 2015. **27**, № 10. 47–64.
6. *Садин Д.В.* TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. **56**, № 12. 2098–2109.
7. *Садин Д.В.* Схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для численного моделирования течений газа и газовзвесей // Математическое моделирование. 2017. **29**, № 12. 89–104.
8. *Садин Д.В.* Применение схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами к расчету течений газа с развитием неустойчивости на контактной границе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. **18**, № 1. 153–157.
9. *Садин Д.В., Давидчук В.А.* Сравнение модифицированного метода крупных частиц с некоторыми схемами высокой разрешающей способности. Одномерные тесты // Вычислительные методы и программирование. 2019. **20**. 138–146.
10. *Садин Д.В., Любарский С.Д., Гравченко Ю.А.* Особенности недорасширенной импульсной импактной газодисперсной струи с высокой концентрацией частиц // Журнал технической физики. 2017. **87**, № 1. 22–26.
11. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кондаков В.Г.* Обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные расчетные сетки // Математическое моделирование. 2013. **25**, № 7. 103–136.
12. *Landshoff R.* A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks. Technical Report LA-1930. Los Alamos: Los Alamos Nat. Lab., 1955.
13. *Christensen R.B.* Godunov methods on a staggered mesh — an improved artificial viscosity. Preprint UCRL-JC-105269. Livermore: Lawrence Livermore Nat. Lab., 1990.
14. *Emery A.F.* An evaluation of several differencing methods for inviscid fluid flow problems // Journal of Computational Physics. 1968. **2**, N 3. 306–331.
15. *Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W.* A new class of central compact schemes with spectral-like resolution II: Hybrid weighted nonlinear schemes // Journal of Computational Physics. 2015. **284**. 133–154.
16. *Булат П.В., Волков К.Н.* Моделирование сверхзвукового течения в канале со ступенькой на неструктурированных сетках при помощи WENO-схем // Инженерно-физический журнал. 2015. **88**, № 4. 848–855.
17. *Исаев С.А., Лысенко Д.А.* Тестирование численных методов, конвективных схем, алгоритмов аппроксимации потоков и сеточных структур на примере сверхзвукового течения в ступенчатом канале с помощью пакетов CFX и Fluent // Инженерно-физический журнал. 2009. **82**, № 2. 326–330.
18. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.
19. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 5. 57–66.
20. *Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А.* Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // Математическое моделирование. 2008. **20**, № 11. 55–66.
21. *Семенов А.Н., Березкина М.К., Красовская И.В.* Классификация разновидностей отражения ударной волны

от клина. Часть 2. Экспериментальное и численное исследование разновидностей маховского отражения // Журнал технической физики. 2009. **79**, № 4. 52–58.

22. *Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W.* Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures // Journal of Computational Physics. 2003. **186**, N 2. 690–696.
23. *Евстигнеев Н.М.* О построении и свойствах WENO-схем пятого, седьмого, девятого, одиннадцатого и тринадцатого порядков. Часть 2. Численные примеры // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. **8**, № 6. 885–910.
24. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. **25**, N 3. 995–1017.

Поступила в редакцию
20.07.2019

Comparison of a Modified Large-Particle Method with Some High Resolution Schemes. Two-Dimensional Test Problems

D. V. Sadin [1], B. V. Belyaev [2], and V. A. Davidchuk [3]

[1] *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, Saint Petersburg, 197198, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: sadin@yandex.ru*

[2] *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, Saint Petersburg, 197198, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: belyaev.boris.spb@gmail.com*

[3] *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, Saint Petersburg, 197198, Russia; Postgraduate, e-mail: david_lxii@mail.ru*

Received July 20, 2019

Abstract: A number of computational properties of the previously proposed new modification of a large-particle method are studied on the basis of a nonlinear correction of artificial viscosity at the first (Eulerian) stage and a hybridization of fluxes at the second (Lagrangian and final) stage supplemented by a two-step Runge-Kutta algorithm in time. The method has a second order of approximation in space and time on smooth solutions. The computational efficiency of the method is shown compared to several modern high resolution schemes using the forward facing step problem and the double Mach reflection problem.

Keywords: large-particle method, high resolution, test problems, computational properties.

References

1. P. Colella and P. R. Woodward, “The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations,” J. Comput. Phys. **54** (1), 174–201 (1984).

2. G.-S. Jiang and C.-W. Shu, “Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes,” J. Comput. Phys. **126** (1), 202–228 (1996).

3. B. Cockburn and C.-W. Shu, “Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems,” J. Sci. Comput. **16** (3), 173–261 (2001).

4. F. Kemm, “On the Proper Setup of the Double Mach Reflection as a Test Case for the Resolution of Gas Dynamics Codes,” Comput. Fluids **132**, 72–75 (2016).

5. I. Yu. Tagirova and A. V. Rodionov, “Application of Artificial Viscosity for Suppressing the Carbuncle Phenomenon in Godunov-Type Schemes,” Mat. Model. **27** (10), 47–64 (2015) [Math. Models Comput. Simul. **8** (3), 249–262 (2016)].

6 D. V. Sadin, “TVD Scheme for Stiff Problems of Wave Dynamics of Heterogeneous Media of Nonhyperbolic Nonconservative Type,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **56** (12), 2098–2109 (2016) [Comput. Math. Math. Phys. **56** (12), 2068–2078 (2016)].

7. D. V. Sadin, “Schemes with Customizable Dissipative Properties as Applied to Gas-Suspensions Flow Simulation,” Mat. Model. **29** (12), 89–104 (2017).

8. D. V. Sadin, “Application of Scheme with Customizable Dissipative Properties for Gas Flow Calculation with Interface Instability Evolution,” Nauch.-Tekhn. Vestn. Inform. Tekhnol. Mekhan. Optik. **18** (1), 153–157 (2018).

9. D. V. Sadin and V. A. Davidchuk, “Comparison of a Modified Large-Particle Method with Some High Resolution Schemes. One-Dimensional Test Problems,” Vychisl. Metody Programm. **20**, 138–146 (2019).

10. D. V. Sadin, S. D. Lyubarskii, and Yu. A. Gravchenko, “Features of an Underexpanded Pulsed Impact Gas-Dispersed Jet with a High Particle Concentration,” Zh. Tekh. Fiz. **87** (1), 22–26 (2017) [Tech. Fiz. **62** (1), 18–23 (2017)].

11. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and V. G. Kondakov, “Generalization of the CABARET Scheme to Two-Dimensional Orthogonal Computational Grids,” Mat. Model. **25** (7), 103–136 (2013) [Math. Models Comput. Simul. **6** (1), 56–79 (2014)].

12. R. Landshoff, *A Numerical Method for Treating Fluid Flow in the Presence of Shocks*, Technical Report LA-1930 (Los Alamos Nat. Lab., Los Alamos, 1955).

13. R. B. Christensen, *Godunov Methods on a Staggered Mesh — An Improved Artificial Viscosity*, Preprint UCRL-JC-105269 (Lawrence Livermore Nat. Lab., Livermore, 1990).

14. A. F. Emery, “An Evaluation of Several Differencing Methods for Inviscid Fluid Flow Problems,” J. Comput. Phys. **2** (3), 306–331 (1968).

15. X. Liu, S. Zhang, H. Zhang, and C.-W. Shu, “A New Class of Central Compact Schemes with Spectral-Like Resolution II: Hybrid Weighted Nonlinear Schemes,” J. Comput. Phys. **284**, 133–154 (2015).

16. P. V. Bulat and K. N. Volkov, “Simulation of Supersonic Flow in a Channel with a Step on Nonstructured Meshes with the Use of the Weno Scheme,” Inzh. Fiz. Zh. **88** (4), 848–855 (2015) [J. Eng. Phys. Thermophys. **88** (6), 1582–1582 (2015)]

17. S. A. Isaev and D. A. Lysenko, “Testing of Numerical Methods, Convective Schemes, Algorithms for Approximation of Flows, and Grid Structures by the Example of a Supersonic Flow in a Step-Shaped Channel with the Use of the CFX and Fluent Packages,” Inzh. Fiz. Zh. **82** (2), 326–330 (2009) [J. Eng. Phys. Thermophys. **82** (2), 321–326 (2009)].

18. M. P. Galanin and E. B. Savenkov, *Numerical Analysis Methods for Mathematical Models* (Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Moscow, 2010) [in Russian].

19. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “Calculations of Two-Dimensional Test Problems by the Method of Adaptive Viscosity,” Mat. Model. **22** (5), 57–66 (2010) [Math. Models Comput. Simul. **2** (6), 724–732 (2010)].

20. M. P. Galanin, E. B. Savenkov, and S. A. Tokareva, “Solving Gas Dynamics Problems with Shock Waves using the Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Method,” Mat. Model. **20** (11), 55–66 (2008). [Math. Models Comput. Simul. **1** (5), 635–645 (2009)].

21. A. N. Semenov, M. K. Berezkina, and I. V. Krasovskaya, “Classification of Shock Wave Reflections from a Wedge. Part 2: Experimental and Numerical Simulations of Different Types of Mach Reflections,” Zh. Tekh. Fiz. **79** (4), 52–58 (2009) [Tech. Phys. **54** (4), 497–503 (2009)].

22. J. Shi, Y.-T. Zhang, and C.-W. Shu, “Resolution of High Order WENO Schemes for Complicated Flow Structures,” J. Comput. Phys. **186** (2), 690–696 (2003).

23. N. M. Evstigneev, “On the Construction and Properties of WENO-Schemes Order Five, Seven, Nine, Eleven and Thirteen. Part 2. Numerical Examples,” Comput. Res. Model. **8** (6), 885–910 (2016).

24. R. Liska and B. Wendroff, “Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations,” SIAM J. Sci. Comput. **25** (3), 995–1017 (2003).