

УДК 519.633.6

doi 10.26089/NumMet.v20r442

## МОДИФИКАЦИЯ СХЕМЫ КАБАРЕ ДЛЯ РАЗРЕШЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ТОЧЕК В ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

А. В. Данилин<sup>1</sup>, А. В. Соловьев<sup>2</sup>

Представлен явный численный алгоритм для разрешения звуковых точек в рамках схемы Кабаре. Звуковые точки характеризуются сменой знака хотя бы одной из характеристических скоростей. Потoki в узлах расчетной сетки, которым соответствуют звуковые точки, вычисляются путем решения задачи Римана о распаде разрыва. Подход успешно испытан на задачах со сверхзвуковым переходом на волне разрежения с разбеганием двух сверхзвуковых потоков и со сверхзвуковым обтеканием прямой ступеньки.

**Ключевые слова:** системы гиперболических уравнений, схема Кабаре, вычислительная гидродинамика (CFD), консервативный метод, звуковые точки, ударные волны разрежения.

**1. Введение.** Известно, что дискретные модели газовой динамики могут приводить к возникновению ударных волн разрежения [1], что термодинамически невозможно для дифференциальных моделей, описывающих движение идеального газа [2]. Данный тип разрывных течений может возникать, например, при использовании схемы “крест” [1] и схемы Роу [3]. Указанная проблема возникает и при решении отдельных газодинамических задач с использованием схемы Кабаре, в частности при решении задачи со сверхзвуковым переходом на волне разрежения. При использовании схемы Кабаре ударные волны разрежения могут возникать в окрестностях так называемых звуковых точек, т.е. случаев, когда на заданном временном шаге в двух смежных расчетных ячейках хотя бы одна характеристическая скорость меняет знак. В этом случае на грань между расчетными ячейками приходит недостаточное или избыточное количество характеристик, что может приводить к ошибкам аппроксимации в рамках стандартного подхода по разрешению потоковых переменных в рамках схемы Кабаре.

Наличие звуковой точки на грани часто приводит к некорректной реконструкции потоковых переменных на данной грани и потере аппроксимации решения в окрестности данной звуковой точки. Указанный недостаток может приводить как к локальной, так и к глобальной нефизичности решения, а также к численной неустойчивости. Ранее решение данной проблемы предлагалось в работе [4], где решение в звуковой точке строилось исходя из непрерывности числа Маха в окрестности звуковой точки, и в работе [5], где использовался подход с вертикальной интерполяцией инвариантов, переносимых вдоль характеристик, меняющих знак.

В настоящей статье звуковые точки предлагается разрешать при помощи решения задачи о распаде разрыва, где в качестве начальных данных выступают параметры течения в прилегающих к заданной грани расчетных ячейках на полуцелом временном слое. При этом аппроксимация потоковых переменных достигается автоматически без каких-либо эмпирических предположений о характере течения. Для разрешения распада разрыва используется точное решение [6]. Предложенный подход тестируется на одномерных задачах со сверхзвуковым переходом на волне разрежения и с разбеганием двух сверхзвуковых потоков [7], а также на двумерной задаче с набеганием сверхзвукового потока на прямую ступеньку [8].

Схема Кабаре — консервативная явная конечно-объемная схема, имеющая второй порядок аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях, устойчивая при числах Куранта–Фридрихса–Леви в диапазоне от 0 до 1. В схемах, основанных на этом подходе, используются консервативные (относящиеся к центрам расчетных ячеек) и потоковые (относящиеся к граням ячеек) переменные. Для расчета по методу Кабаре применяется балансно-характеристический подход, в рамках которого для вычисления консервативных переменных используются уравнения движения в консервативной форме, а для вычисления потоковых величин — в характеристической. Подробно упомянутый подход изложен в работах [9–15].

### 2. Уравнения движения.

<sup>1</sup> Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: danilin.physics@gmail.com

<sup>2</sup> Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

**2.1. Консервативная форма уравнений движения.** Движение газовой среды описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + p)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $u$  — скорость,  $p$  — давление,  $E = \varepsilon + u^2/2$  — удельная полная энергия и  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия.

Уравнение состояния среды имеет вид

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon,$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Систему уравнений движения (1) можно представить в характеристической форме

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

где  $R = u + \int \frac{dp}{\rho c}$ ,  $Q = u - \int \frac{dp}{\rho c}$ ,  $S = \frac{p}{\rho^\gamma}$  — инварианты Римана,  $\lambda_{1,2} = u \pm c$ ,  $\lambda_3 = u$  — характеристические скорости и  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  — скорость звука.

**3. Численный алгоритм.** Решение дискретной задачи рассматривается на отрезке  $[0, L] = [0, 1]$ , на котором вводится равномерная расчетная сетка с  $N$  расчетными ячейками и  $N + 1$  узлами. Как уже отмечалось, схема Кабаре оперирует двумя типами переменных: консервативными и потоковыми. Первые относятся к центрам ячеек, отвечают за среднее значение величин в ячейке и обозначаются полуцелыми нижними индексами  $i + 1/2$ ; вторые относятся к узлам сетки, отвечают за перенос величин между ячейками и обозначаются целыми нижними индексами  $i$ . Схема Кабаре оперирует тремя временными слоями: начальным, полуцелым и новым, которые обозначаются соответствующими верхними индексами  $n$ ,  $n + 1/2$ ,  $n + 1$ .

Дискретизация уравнений движения по схеме Кабаре осуществляется следующим образом:

$$\frac{\Phi_{i+1/2}^{n+1} - \Phi_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{F_{i+1}^{n+1} - F_i^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{2\Delta x} = 0.$$

Здесь  $\Phi = (\rho, \rho u, \rho E)$  — вектор консервативных переменных,  $F = (\rho u, \rho u^2 + p, u(\rho E + p))$  — вектор потоков.

Для устойчивости рассматриваемого явного алгоритма на шаг по времени накладывается условие Куранта–Фридрихса–Леви:

$$\tau = \text{CFL} \min_i \left( \frac{\Delta x}{|u_{i+1/2}^n| + c_{i+1/2}^n} \right),$$

где  $0 < \text{CFL} \leq 1$  — число Куранта.

Схема Кабаре состоит из трех последовательно выполняемых фаз. На первой фазе вычисляются консервативные переменные на полуцелом временном слое:

$$\frac{\Phi_{i+1/2}^{n+1/2} - \Phi_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{2\Delta x} = 0.$$

На второй фазе вычисляются потоковые величины на новом временном слое. Для этого рассчитываются локальные инварианты Римана  $I = (R, S, Q)$  в двух смежных ячейках на начальном и полуцелом временных слоях ( $I_{i-1/2}^n, I_{i-1/2}^{n+1/2}, I_{i+1/2}^n, I_{i+1/2}^{n+1/2}$ ) и в прилегающих к ним узлах на начальном временном слое ( $I_{i-1}^n, I_i^n, I_{i+1}^n$ ):

$$R = u + G_{L,R} p, \quad Q = u - G_{L,R} p, \quad S = \frac{p}{\rho^\gamma},$$

где  $G_{L,R} = \left( \frac{1}{\rho c} \right)_{i-1/2, i+1/2}^{n+1/2}$  — величины, фиксированные при вычислении инвариантов  $R$  и  $Q$  в левой и правой ячейках соответственно. Далее, в зависимости от направления характеристических скоростей на

начальном временном слое выполняется экстраполяция инвариантов Римана в узел расчетной ячейки на новом временном слое с их коррекцией в соответствии с принципом максимума [10]:

$$R_i^{n+1} = \begin{cases} \text{corr}\left(2R_{i-1/2}^{n+1/2} - R_{i-1}^n\right), & \lambda_1^L + \lambda_1^R \geq 0; \\ \text{corr}\left(2R_{i+1/2}^{n+1/2} - R_{i+1}^n\right), & \lambda_1^L + \lambda_1^R < 0; \end{cases} \quad Q_i^{n+1} = \begin{cases} \text{corr}\left(2Q_{i-1/2}^{n+1/2} - Q_{i-1}^n\right), & \lambda_2^L + \lambda_2^R \geq 0; \\ \text{corr}\left(2Q_{i+1/2}^{n+1/2} - Q_{i+1}^n\right), & \lambda_2^L + \lambda_2^R < 0; \end{cases}$$

$$G_R = \begin{cases} 1/\rho c_{i-1/2}^{n+1/2}, & \lambda_1^L + \lambda_1^R \geq 0; \\ 1/\rho c_{i+1/2}^{n+1/2}, & \lambda_1^L + \lambda_1^R < 0; \end{cases} \quad G_Q = \begin{cases} 1/\rho c_{i-1/2}^{n+1/2}, & \lambda_2^L + \lambda_2^R \geq 0; \\ 1/\rho c_{i+1/2}^{n+1/2}, & \lambda_2^L + \lambda_2^R < 0; \end{cases}$$

$$S_i^{n+1} = \begin{cases} \text{corr}\left(2S_{i-1/2}^{n+1/2} - S_{i-1}^n\right), & \lambda_3^L + \lambda_3^R \geq 0; \\ \text{corr}\left(2S_{i+1/2}^{n+1/2} - S_{i+1}^n\right), & \lambda_3^L + \lambda_3^R < 0. \end{cases}$$

Здесь  $\lambda_{1,2}^L = u_{i-1/2}^n \pm c_{i-1/2}^n$ ,  $\lambda_3^L = u_{i-1/2}^n$  — характеристические скорости в ячейке слева от рассматриваемого узла,  $\lambda_{1,2}^R = u_{i+1/2}^n \pm c_{i+1/2}^n$ ,  $\lambda_3^R = u_{i+1/2}^n$  — характеристические скорости в ячейке справа от рассматриваемого узла.

Коррекция инвариантов проводится в соответствии с принципом максимума [10] (на примере инварианта  $R$ ):

$$\begin{cases} \text{corr}\left(2R_{i-1/2}^{n+1/2} - R_{i-1}^n\right) = \max\left[\min\left(\max\left(R_i^n, R_{i-1/2}^n, R_{i-1}^n\right), 2R_{i-1/2}^{n+1/2} - R_{i-1}^n\right), \min\left(R_i^n, R_{i-1/2}^n, R_{i-1}^n\right)\right], \\ \text{corr}\left(2R_{i+1/2}^{n+1/2} - R_{i+1}^n\right) = \max\left[\min\left(\max\left(R_i^n, R_{i+1/2}^n, R_{i+1}^n\right), 2R_{i+1/2}^{n+1/2} - R_{i+1}^n\right), \min\left(R_i^n, R_{i+1/2}^n, R_{i+1}^n\right)\right]. \end{cases}$$

В завершение второй фазы вычисляются потоковые величины на новом временном слое на основе инвариантов Римана:

$$p_i^{n+1} = \frac{R_i^{n+1} - Q_i^{n+1}}{G_R + G_Q}, \quad u_i^{n+1} = \frac{G_R Q_i^{n+1} + G_Q R_i^{n+1}}{G_R + G_Q}, \quad \rho_i^{n+1} = \left(\frac{p_i^{n+1}}{S_i^{n+1}}\right)^{1/\gamma}, \quad E_i^{n+1} = \frac{p_i^{n+1}}{(\gamma - 1)\rho_i^{n+1}} + \frac{(u_i^{n+1})^2}{2}.$$

На третьей фазе вычисляются консервативные переменные на новом временном слое:

$$\frac{\Phi_{i+1/2}^{n+1} - \Phi_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau} + \frac{F_{i+1}^{n+1} - F_i^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

Рассмотренный алгоритм обобщается на двумерный и трехмерный случаи в работах [4, 15].

**4. Обработка звуковых точек.** Описанный выше алгоритм вычисления потоковых переменных обрабатывает любые случаи течений однообразно без выделения звуковых точек. В случаях, когда в данном узле существует звуковая точка, этот алгоритм может приводить к нефизичности решения или к невозможности расчета, что проиллюстрировано численными экспериментами, приведенными ниже. Индикатором возникновения таких ситуаций является изменение знака хотя бы одной из характеристических скоростей в ячейках, прилегающих к данному узлу:

$$\lambda_1^L \cdot \lambda_1^R < 0, \quad \lambda_2^L \cdot \lambda_2^R < 0, \quad \lambda_3^L \cdot \lambda_3^R < 0.$$

Для вычисления потоков в случае возникновения звуковой точки предлагается использовать точное решение задачи Римана [6] с параметрами на разрыве, соответствующими консервативным переменным на полуцелом временном слое из ячеек, соседствующих с данной гранью:

$$F_i^{n+1} = F\left(\Phi_{i-1/2}^{n+1/2}, \Phi_{i+1/2}^{n+1/2}\right).$$

В многомерном случае для вычисления характеристических скоростей используется проекция скоростей на нормаль к грани, разделяющей рассматриваемые ячейки.

**5. Численные эксперименты.**

**5.1. Задача Сода со звуковой точкой на волне разрежения.** Расчетная область — отрезок  $[0, L] = [0, 1]$ . В расчетной области задана сетка, состоящая из  $N = 100$  расчетных ячеек. Число Куранта

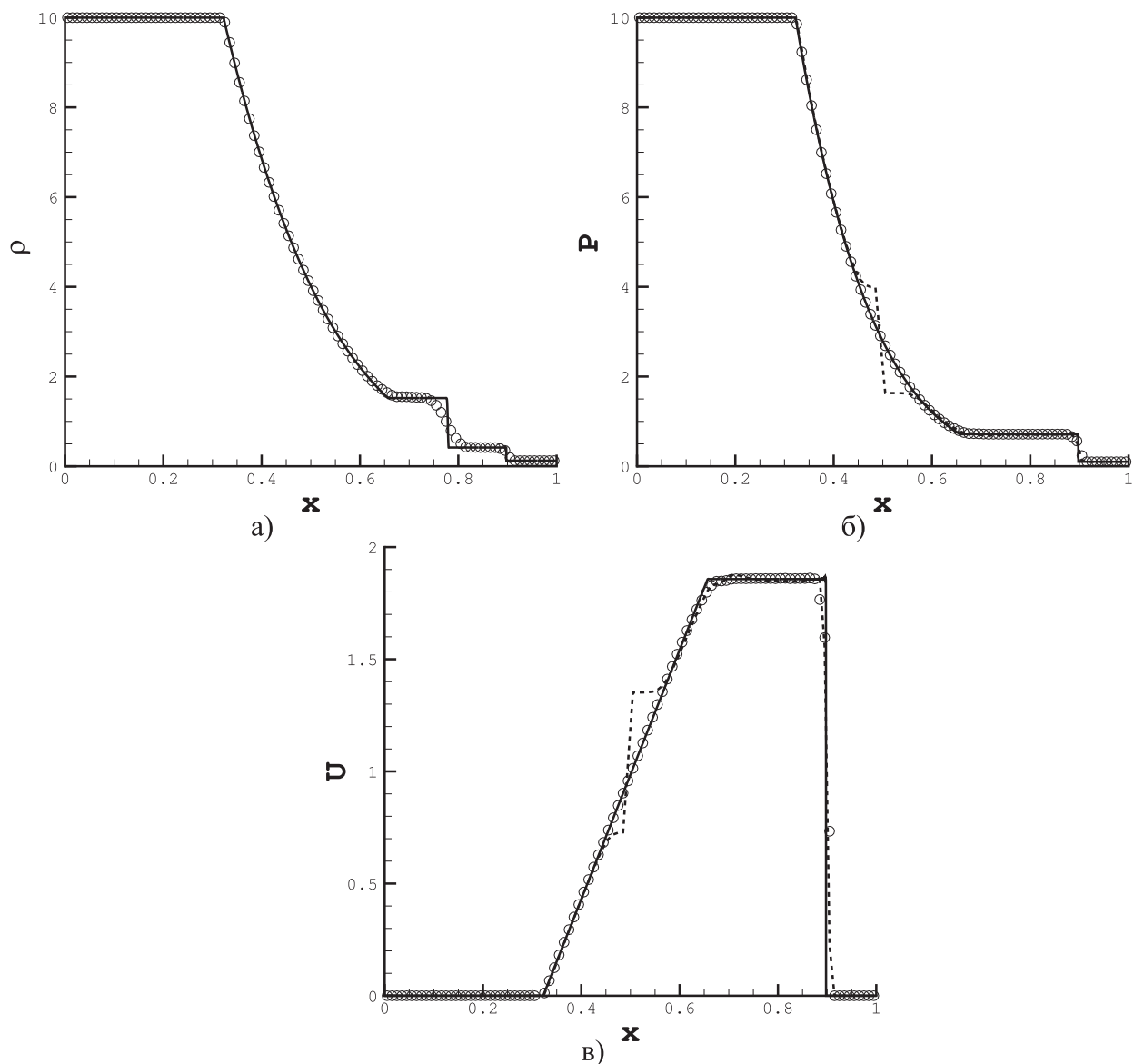


Рис. 1. Решение задачи Сода со сверхзвуковым переходом на волны разрежения на момент времени  $t = 0.15$ : кружки — со специальной обработкой звуковых точек, штриховая линия — без специальной обработки звуковых точек, сплошная линия — точное решение, плотность (а), давление (б), скорость (в),  $N = 100$ ,  $CFL = 0.3$

$CFL$  равно 0.3, показатель адиабаты газа  $\gamma = 1.4$ . В начальный момент времени задаются разрывные начальные условия с разрывом в точке  $x = 0.5$ : слева от разрыва  $(\rho, u, p) = (10, 0, 10)$ , справа от разрыва  $(\rho, u, p) = (0.125, 0, 1)$ . Указанные начальные условия взяты из работы [4].

В рассматриваемой задаче образуется ударная волна, идущая вправо, и волна разрежения, идущая влево, на которой возникает точка сверхзвукового перехода. В ходе расчета при помощи стандартного алгоритма Кабаре в расчетном узле, на который приходится звуковая точка, возникает ударная волна разрежения. При применении описанного выше алгоритма обработки звуковых точек этот численный артефакт не возникает: таким образом, достигается аппроксимация точного решения. Сравнение результатов наших расчетов с аналитическим решением приведено на рис. 1.

**5.2. Задача с разбеганием сверхзвуковых потоков.** Расчетная область — отрезок  $[0, L] = [0, 1]$ . В расчетной области задана сетка, состоящая из  $N = 100$  ячеек. Число Куранта  $CFL$  равно 0.1, показатель адиабаты газа  $\gamma = 1.4$ . В начальный момент времени задаются разрывные начальные условия с разрывом в точке  $x = 0.5$ : слева от разрыва  $(\rho, u, p) = (1, -2, 0.4)$ , справа от разрыва  $(\rho, u, p) = (1, 2, 0.4)$ . Указанные начальные данные задачи взяты из работы [7].

В рассматриваемой задаче разбегающиеся сверхзвуковые потоки формируют две симметричные вол-

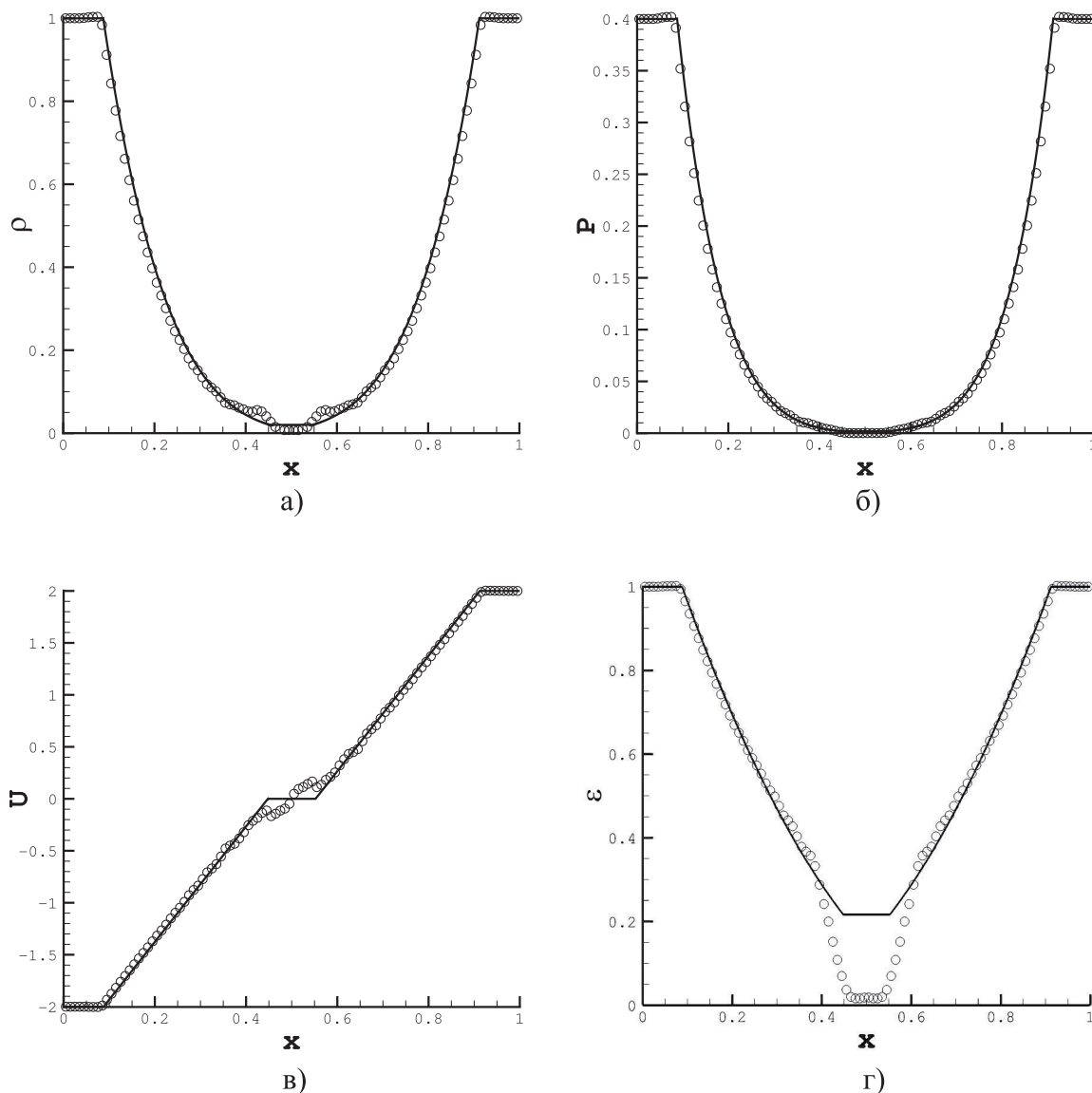


Рис. 2. Решение задачи Сода со сверхзвуковым переходом на волны разрежения на момент времени  $t = 0.15$ : кружки — со специальной обработкой звуковых точек, штриховая линия — без специальной обработки звуковых точек, сплошная линия — точное решение, плотность (а), давление (б), скорость (в), удельная внутренняя энергия (г),  $N = 100$ ,  $CFL = 0.1$

ны разрежения с неподвижным контактным разрывом с сильным падением давления. В начальный момент времени в точку разрыва не приходит ни одна характеристика, что формирует ситуацию, в которой расчет задачи по схеме Кабаре без дополнительной обработки звуковых точек не представляется возможным: в ходе решения давление в узле, разделяющем потоки, падает ниже нуля, что приводит к распаду численного решения и остановке счета. Использование специального подхода к обработке звуковых точек решает эту проблему. На рис. 2 представлено сравнение решения данной задачи на основе нашего алгоритма обработки звуковых точек с аналитическим решением. Рассмотренный тест демонстрирует значимость используемого подхода к разрешению звуковых точек для повышения робастности алгоритма в целом.

**5.3. Задача с обтеканием прямой ступеньки сверхзвуковым потоком.** Расчетная область — прямоугольник  $[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 3] \times [0, 1]$ ; на расстоянии 0.6 от левой границы расчетной области начинается ступенька высотой 0.2, продолжающаяся до правой границы. В расчетной области задана сетка, состоящая из  $N_x \times N_y = 240 \times 80$  ячеек. Число Куранта  $CFL$  равно 0.45, показатель адиабаты газа  $\gamma = 1.4$ . В начальный момент времени расчетная область заполнена газом с параметрами  $(\rho, u, v, p) =$

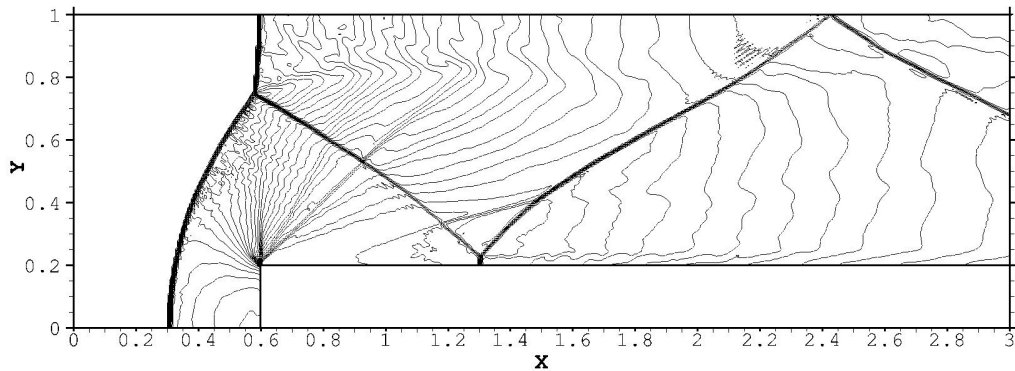


Рис. 3. Линии уровня плотности в задаче с обтеканием прямой ступеньки сверхзвуковым потоком на момент времени  $t = 4$ ,  $M = 3$ ,  $CFL = 0.45$

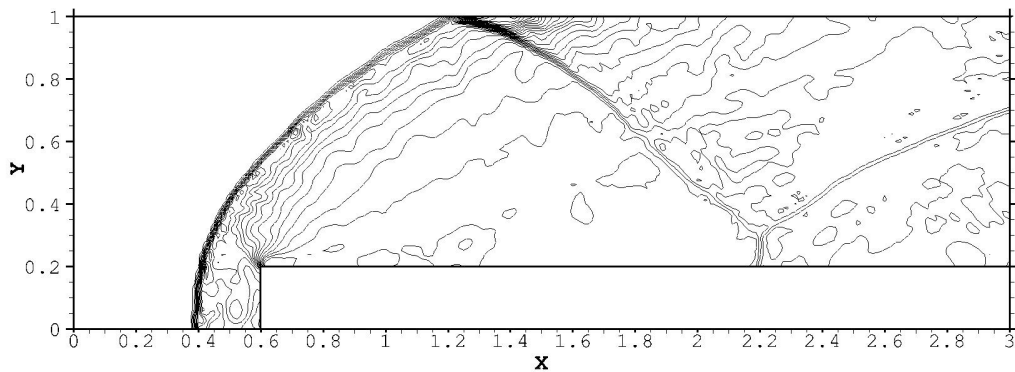


Рис. 4. Линии уровня плотности в задаче с обтеканием прямой ступеньки сверхзвуковым потоком на момент времени  $t = 4$ ,  $M = 10$ ,  $CFL = 0.45$

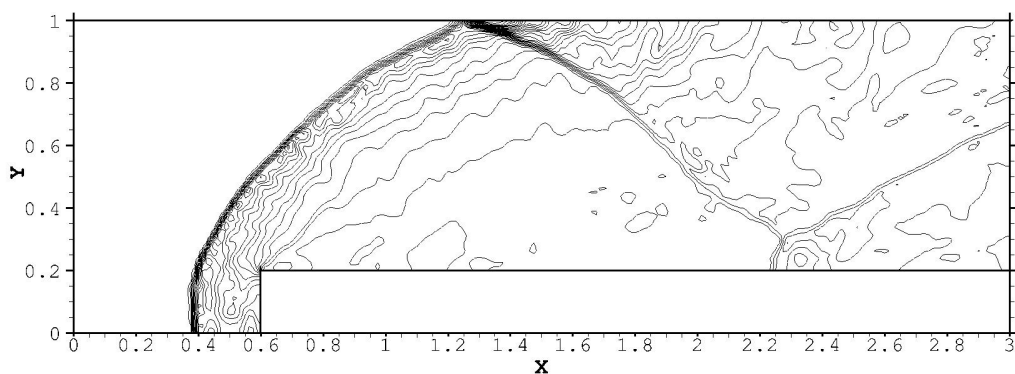


Рис. 5. Линии уровня плотности в задаче с обтеканием прямой ступеньки сверхзвуковым потоком на момент времени  $t = 4$ ,  $M = 20$ ,  $CFL = 0.45$

(1.4,  $M$ , 0, 1); через левую границу в расчетную область втекает сверхзвуковой поток газа с числом Маха  $M = 3, 10, 20$  с параметрами  $(\rho, u, v, p) = (1.4, M, 0, 1)$ ; на правой границе расчетной области задаются условия свободного выхода; на остальных гранях задаются условия непротекания с проскальзыванием. Указанные начальные условия взяты из работы [8].

В ходе расчета с использованием немодифицированной схемы Кабаре в первой ячейке, находящейся над ступенькой, возникает сверхзвуковое течение, направленное вверх, приводящее к дефициту характе-

ристик на нижней грани данной ячейки и, как следствие, к отсутствию аппроксимации и возникновению вакуума в данной ячейке. Использование алгоритма для разрешения звуковых точек позволяет разрешить отмеченную проблему. На рис. 3–5 представлены результаты расчетов на момент времени  $t = 4$  с числами Маха  $M = 3, 10, 20$  соответственно. Картина течения для  $M = 3$  соответствует результатам расчетов, приведенным в [8].

**6. Заключение.** В настоящей статье в рамках подхода Кабаре предложен метод разрешения звуковых точек путем аппроксимации потоков в звуковых точках через решение задачи о распаде разрыва. Предложенный подход позволяет аппроксимировать потоки в звуковых точках без априорных знаний о характере течения. Проведенные численные эксперименты показали, что разработанный алгоритм позволяет избежать возникновения ударных волн разрежения и повышает робастность алгоритма Кабаре в целом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абакумов М.В., Мухин С.И., Попов Ю.П., Рогожкин Д.В.* Об ударных волнах разрежения в вычислительной газовой динамике. Препринт № 3 ИПМ им. М. В. Келдыша. М.: ИПМ им. Келдыша, 2006.
2. *Давыдов Ю.М.* Применение метода дифференциального приближения для исследования и построения нелинейных разностных схем // Численные методы механики сплошной среды. 1980. **11**, № 4. 41–59.
3. *Кузнецов О.А.* Численное исследование схемы Роу с модификацией Эйнфельда для уравнений газовой динамики. Препринт № 043 ИПМ им. М. В. Келдыша. М., 1998.
4. *Кондаков В.Г.* Обобщение схемы Кабаре на многомерные уравнения задач газовой динамики. Дисс. ... степени кандидата ф.-м. наук. М., 2014.
5. *Головизнин В.М., Соловьев А.В., Исаков В.А.* Аппроксимационный алгоритм обработки звуковых точек в схеме “кабаре” // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 166–176.
6. *Райзер Ю.П.* Введение в гидрогазодинамику и теорию ударных волн для физиков. Долгопрудный: Интеллект, 2011.
7. *Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjögren B.* On Godunov-type methods near low densities // Journal of Computational Physics. 1991. **92**, N 2. 273–295.
8. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics. 1984. **54**, N 1. 115–173.
9. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 101–116.
10. *Головизнин В.М., Карabasов С.А.* Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 12. 107–123.
11. *Головизнин В.М., Карabasов С.А., Кобринский И.М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 9. 29–48.
12. *Головизнин В.М.* Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Математическое моделирование. 2006. **18**, № 11. 14–30.
13. *Karabasov S.A., Goloviznin V.M.* Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. **228**, N 19. 7426–7451.
14. *Данилин А.В., Соловьев А.В.* Модификация схемы “кабаре” для расчета течения многокомпонентных газовых смесей // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 18–25.
15. *Данилин А.В., Соловьев А.В., Зайцев А.М.* Модификация схемы “кабаре” для численного моделирования течений многокомпонентных газовых смесей в двумерных областях // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 436–445.

Поступила в редакцию  
15.10.2019

## A Modification of the CABARET Scheme for Resolving the Sound Points in Gas Flows

A. V. Danilin<sup>1</sup> and A. V. Solovjev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Junior Scientist, e-mail: danilin.physics@gmail.com

<sup>2</sup> Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

**Abstract:** An explicit numerical algorithm for resolving the sound points in the framework of the CABARET scheme is proposed. The sound points are characterized by a sign change in at least one of characteristic velocities. The flows in mesh nodes corresponding to sound points are calculated by solving the Riemann problem. This approach is successfully tested on a problem with sound transitions on rarefaction waves, on a problem with two diverging supersonic flows, and on a problem with supersonic flow over a forward facing step.

**Keywords:** systems of hyperbolic equations, CABARET scheme, computational fluid dynamics (CFD), conservative methods, sound points, rarefaction shock waves.

### References

1. M. V. Abakumov, S. I. Mukhin, Yu. P. Popov, and D. V. Rogozhkin, *Shock Waves of Rarefaction in Computational Gas Dynamics*, Preprint No. 3 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2006).
2. Yu. M. Davydov, "Application of the Differential Approximation Method to Study and Construction of Nonlinear Difference Schemes," *Numer. Methods Continuum Mech.* **11** (4), 41–59 (1980).
3. O. A. Kuznetsov, *Numerical Testing of Roe–Einfeldt Scheme for Hydrodynamics*, Preprint No. 043 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 1998).
4. V. G. Kondakov, *A Generalization of the Cabaret Scheme to Multidimensional Gas Dynamics Equations*, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (Moscow State Univ., Moscow, 2014).
5. V. M. Goloviznin, A. V. Solovjev, and V. A. Isakov, "An Approximation Algorithm for the Treatment of Sound Points in the CABARET Scheme," *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 166–176 (2016).
6. Yu. P. Raizer, *Introduction to Hydrogasdynamics and the Theory of Shock Waves for Physicists* (Intellekt, Dolgoprudnyi, 2011) [in Russian].
7. B. Einfeldt, C. D. Munz, P. L. Roe, and B. Sjögren, "On Godunov-Type Methods near Low Densities," *J. Comput. Phys.* **92** (2), 273–295 (1991).
8. P. Woodward and P. Colella, "The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *J. Comput. Phys.* **54** (1), 115–173 (1984).
9. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, "Some Characteristics of Finite Difference Scheme Cabaret," *Mat. Model.* **10** (1), 101–116 (1998).
10. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, "Nonlinear Correction of Cabaret Scheme," *Mat. Model.* **10** (12), 107–123 (1998).
11. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, "Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables," *Mat. Model.* **15** (9), 29–48 (2003).
12. V. M. Goloviznin, "Balanced Characteristic Method for 1D Systems of Hyperbolic Conservation Laws in Eulerian Representation," *Mat. Model.* **18** (11), 14–30 (2006).
13. S. A. Karabasov and V. M. Goloviznin, "Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics," *J. Comput. Phys.* **228** (19), 7426–7451 (2009).
14. A. V. Danilin and A. V. Solovjev, "A Modification of the CABARET Scheme for the Computation of Multicomponent Gaseous Flows," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 18–25 (2015).
15. A. V. Danilin, A. V. Solovjev, and A. M. Zaitsev, "A Modification of the CABARET Scheme for Numerical Simulation of Multicomponent Gaseous Flows in Two-Dimensional Domains," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 436–445 (2015).