

УДК 514.86

doi 10.26089/NumMet.v21r327

**РЕДУКЦИЯ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ
ДЛЯ АНАЛИЗА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ
ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА ПОРОДЫ В ПРОЦЕССЕ
ХИМИЧЕСКОГО РАСТВОРЕНИЯ**

Д. И. Прохоров,¹ Я. В. Базайкин,² В. В. Лисица³

В работе предложен алгоритм редукции трехмерных цифровых изображений для ускорения вычисления персистентных диаграмм, характеризующих изменения в топологии порового пространства образцов горной породы. Воксели для удаления выбираются исходя из структуры своей окрестности, что позволяет редуцировать изображение за линейное время. Показано, что эффективность алгоритма существенно зависит от сложности устройства порового пространства и размеров шагов фильтрации.

Ключевые слова: персистентные гомологии, редукция цифрового изображения, химическое воздействие на горную породу.

1. Введение. В последнее время все чаще требуется оценить характеристики процесса, выражающегося в изменении порового пространства породы с течением времени. Такие задачи возникают, например, при кислотной обработке пласта [1, 2], при захоронении углекислого газа в карбонатных пластах [3, 4], при биологически-активированной кальцитизации сыпучих материалов [5] и др. Динамику этого процесса можно выразить как набор последовательных цифровых изображений горной породы, где последовательность отвечает дискретному времени, а каждое цифровое изображение представляет пространственную дискретизацию породы, например, томографическое изображение. В вычислительной топологии такая последовательность (если она монотонна) называется фильтрацией, и естественной мыслью является подсчет топологических инвариантов фильтрации, называемых персистентными числами Бетти. Одним из преимуществ персистентных чисел Бетти является то, что они оценивают топологическую сложность фильтрации (т.е. количество относительных гомологических циклов, взятых по отношению к уровню фильтрации). Другое свойство, очень важное для приложений, — их устойчивость по отношению к возмущению фильтрации. Это значит, что небольшая погрешность в данных ведет к небольшой погрешности в персистентной диаграмме (персистентная диаграмма сводит в себе всю необходимую информацию о персистентных числах Бетти).

В трехмерном пространстве только 0, 1 и 2-мерные числа Бетти не равны нулю. При этом вычисление 0 и 2-мерных, основанное на системе непересекающихся множеств [6] и двойственности цифровых пространств, не требует больших вычислительных ресурсов. Совсем другая ситуация с одномерными, для их вычисления используется алгоритм Эдельсбруннера–Летшера–Зомородяна, который имеет кубическую сложность от размера изображения [6].

Основной идеей работы является использование алгоритма редукции изображения, согласованного с алгоритмом Эдельсбруннера–Летшера–Зомородяна вычисления персистентных диаграмм. Были проведены сравнительные тесты как на моделях образцов породы, полученных методами статистического моделирования, в частности, с использованием метода усеченного гауссовского поля, так и на реальных образцах, подвергнутых растворению. Показано, что применение алгоритма редукции позволяет ускорить

¹ Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск; мл. науч. сотр., e-mail: d.prokhorov@g.nsu.ru

² Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск; д. ф.-м. н., доцент, зав. лаб., e-mail: bazaikin@math.nsc.ru

³ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 3, 630090, г. Новосибирск; д. ф.-м. н., зав. лаб., e-mail: LisitsaVV@ipgg.sbras.ru

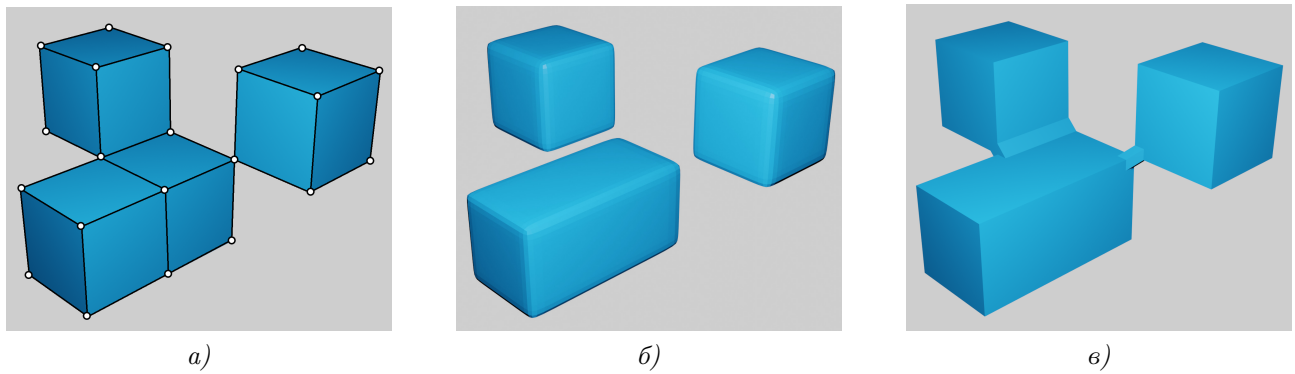


Рис. 1. Фрагмент цифрового изображения (а) и его топологическая реализация для случаев 6- (б) и 26-связанности (в).

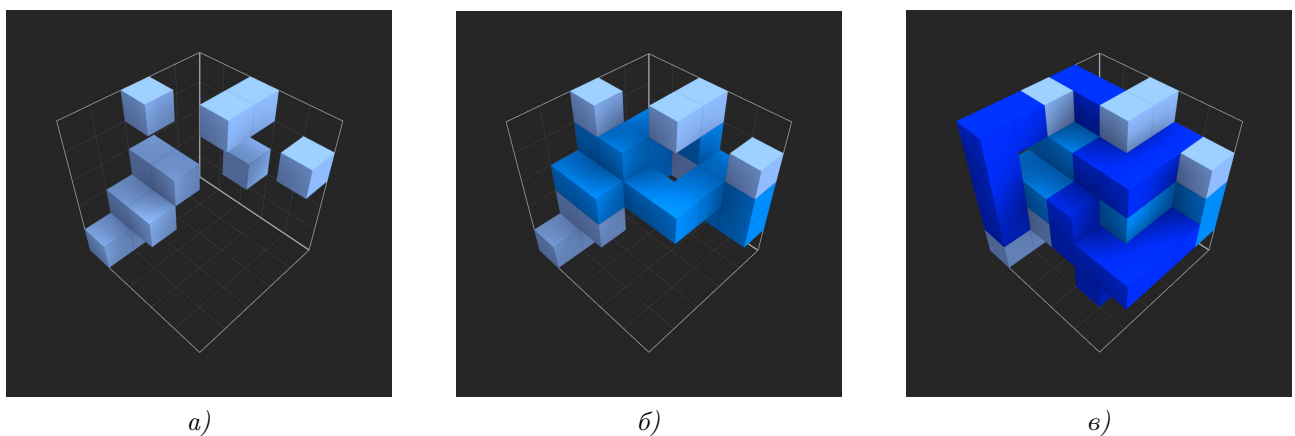


Рис. 2. Фильтрация цифрового изображения (а) \subseteq (б) \subseteq (в).

вычисление персистентных чисел Бетти, хотя эффективность ускорения зависит от пористости, длины корреляции образцов и величины дискретного шага времени.

2. Цифровые изображения. Для получения топологической модели вводится функция, которая по исходному значению вокселя определяет его новое бинарное значение. Таким образом, получается изображение, где каждый воксель имеет один из двух цветов 0 или 1. Один цвет соответствует породе, другой порам. Затем, в зависимости от того, структуру чего нужно изучить, выбирается цвет. Каждому вокселю данного цвета ставится в соответствие его топологическая модель. *Вокселем* с центром в точке $p = \left(m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$ называется множество $C_p = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | m \leq x \leq m + 1, n \leq y \leq n + 1, k \leq z \leq k + 1\}$. Множество вокселей образует топологическое пространство $X = \cup_{i=1}^N C_{p_i}$, где p_1, \dots, p_N — конечный набор точек с полуцелыми координатами, C_{p_i} — воксель с центром в точке p_i . Топология на X определяется количеством соседей данного вокселя, связанных с ним, и может задаваться несколькими способами: *6-связность* возникает в том случае, когда соседями вокселя являются только те воксели, которые имеют с ним общую грань; *26-связность* отвечает ситуации, когда соседями вокселя являются воксели, имеющие с ним общую грань, ребро или вершину (рис. 1). Топологическое пространство X называется *трехмерным цифровым изображением*.

При численном моделировании связность пространства напрямую зависит от выбора численного метода и зачастую соответствует 6-связности, поскольку при использовании метода конечных разностей и метода конечных объемов потоки определяются через грани ячеек, а решения в ячейках, имеющих общее ребро или вершину, напрямую не связаны [7, 8]. Поэтому, воксели, входящие в дополнение (матрица породы) имеют 26-связность.

Эволюция изображения X , например, динамика расширения порового пространства, задает *фильтрацию* — вложенную последовательность изображений $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots \subseteq X^m = X$ (рис. 2).

Для каждой пары индексов $0 \leq i < j \leq m$ вложение $X_i \subseteq X_j$ индуцирует гомоморфизм p -мерных групп гомологий (здесь и далее рассматриваются группы клеточных гомологий с коэффициентами в \mathbb{Z}_2):

$$f_p^{i,j} : H_p(X_i) \rightarrow H_p(X_j).$$

Персистентной группой размерности p называется образ рассмотренного выше гомоморфизма: $H_p^{i,j} = \text{Im}(f_p^{i,j})$. Соответственно, ранг этой группы $\beta_p^{i,j}$ называется p -мерным персистентным числом Бетти.

Один из способов вычислить персистентные числа Бетти — алгоритм Эдельсбруннера–Летшера–Зомородяна. Его исходная реализация описана для симплициального комплекса — конечного множества симплексов, удовлетворяющего двум условиям:

- 1) $\sigma \in K, \tau$ — грань $\sigma \Rightarrow \tau \in K$;
- 2) $\sigma, \tau \in K \Rightarrow \sigma \cap \tau$ — грань σ и грань τ .

На этом комплексе задается фильтрация — вложенная последовательность подкомплексов $\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$.

Следовательно, первой задачей, возникающей при вычислении персистентных гомологий цифрового изображения, является триангуляция изображения и задание на полученном комплексе полной фильтрации. Стоит отметить, что триангуляция не обязательна. В [9] показано, что кубические гомологии эквивалентны симплициальным. А значит изображение можно преобразовать к единичному кубическому комплексу, что более естественно. Он определяется аналогично симплициальному, но вместо k -симплексов в определении используются k -мерные единичные кубы.

Таким образом, в случае 26-связности можно считать каждый воксель трехмерным кубом. А в случае 6-связности удобнее использовать более эффективный подход, описанный в [10].

Приведем описание алгоритма Эдельсбруннера–Летшера–Зомородяна. Пусть все симплексы в комплексе пронумерованы в соответствии с фильтрацией [6]. Имеем последовательность симплексов $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Данные хранятся в линейном массиве $R[1..n]$, элементами которого являются списки симплексов.

Алгоритм 1. Алгоритм Эдельсбруннера–Летшера–Зомородяна

```

1: for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
2:    $L \leftarrow$  список граней  $\sigma_j$ 
3:    $R[j] \leftarrow NULL$ 
4:   while  $L \neq NULL$  and  $R[i] \neq NULL$ , где  $i$  — максимальный из номеров симплексов  $L$  do
5:      $L \leftarrow L \Delta R[i]$ 
6:   end while
7:   if  $L \neq NULL$  then
8:      $R[i] \leftarrow L$ 
9:   end if
10: end for
    
```

Выполнение последнего условия дает следующую информацию: цикл, рожденный в момент i , уничтожается в момент j . Невыполнение соответствует рождению цикла в момент j . Итерации внутреннего цикла while называются коллизиями, большую часть времени работы алгоритма занимает их выполнение.

Рассмотрим пример, в котором σ_k и σ_{k+1} — треугольники, а $\sigma_{k-5}, \dots, \sigma_{k-1}$ — их ребра, причем σ_{k-1} — общее. Пусть эти симплексы принадлежат $K^l \setminus K^{l-1}$. При добавлении σ_{k-2} и σ_{k-1} возникают коллизии и рождаются одномерные циклы. Эти циклы умирают при добавлении σ_k и σ_{k+1} . Так как все эти симплексы относятся к одному шагу фильтрации, то они не учитываются в конечном результате. В больших комплексах, в том числе и в кубических, таких коллизий, которые не несут информацию о персистентных группах гомологий, может быть очень много. Следовательно, возникает вопрос, можно ли уменьшить их количество? Ответ на этот вопрос положителен, один из способов — удалить соответствующие симплексы.

3. Алгоритм редукции. Алгоритмы редукции симплициальных и кубических комплексов, основанные на ретракции, достаточно просты. В них последовательно удаляются свободные грани, то есть

происходит ретракция симплексов (кубов). Сейчас также известны более эффективные алгоритмы коредукции [11], используемые, в том числе, и для вычисления персистентных гомологий [12].

В данной работе описан алгоритм, основанный на ретракции. Его главная особенность в том, что он работает не с комплексом, а напрямую с фильтрацией трехмерного изображения, имеющего 6-связность, удаляя воксели, которые не влияют на баркод.

Начнем с описания структуры данных, используемых алгоритмом. Первая из них нужна для хранения изображения и дополнительной информации о вокселях. Изображение хранится как трехмерный массив. Каждый элемент этого массива содержит следующую информацию: *value* показывает, входит ли данный воксель в изображение (в этом случае $value = Image$) или нет ($value = Addition$), *step* — шаг фильтрации, на котором воксель был добавлен в изображение, *in_stack* показывает, содержится ли воксель в структуре данных, которая будет описана далее. Вторая структура данных — массив стеков. В i -м элементе массива хранится стек, который содержит тройки индексов вокселей в трехмерном массиве, добавленных на i -м шаге фильтрации.

Перейдем к самому алгоритму. Он заключается в последовательном удалении вокселей, начиная с тех, что были добавлены позже. Для каждого вокселя просматривается окрестность размера $3 \times 3 \times 3$, в зависимости от конфигурации данной окрестности принимается решение о его удалении. Проверяются два условия: отсутствие в окрестности вокселей с более поздних шагов фильтрации и непрерывность удаления. Алгоритм подробно описан в листинге 2., а условия удаления в листинге 3..

Легко показать, что алгоритм редукции имеет линейную сложность от количества вокселей в изображении. Другими словами, если размер изображения $s_1 \times s_2 \times s_3$, то асимптотическая оценка времени работы алгоритма $O(s_1 s_2 s_3)$. Чтобы заполнить стеки, нужно просмотреть все воксели в изображении, что требует $c_1 s_1 s_2 s_3$ операций. Пусть число вокселей в стеках $m \leq s_1 s_2 s_3$. Так как воксели добавляются в стек только в случае удаления их соседа, то каждый воксель изображения просматривается не более семи раз. Покажем, что выполнение функции *CanRemove* занимает константное время. Чтобы найти компоненты связности, используется поиск в глубину. Для графа, у которого N вершин и M ребер, сложность поиска оценивается как $O(N + M)$. Если рассматривать изображение как граф, у которого вершины — воксели, а ребра — отношение соседства, то при 6-связности $M \leq 3N$, при 26-связности $M \leq 7N$. Следовательно, на нахождение числа компонент связности изображения в окрестности необходимо не более чем $27c_2$ операций (для дополнения $27c_3$). Нахождение эйлеровой характеристики сводится к последовательному просмотру вокселей, что требует $27c_4$ операций. Значит всего алгоритм выполняет не более $c_1 s_1 s_2 s_3 + 7 * 27m(2c_2 + c_3 + 2c_4) \leq s_1 s_2 s_3 (c_1 + 189 * (2c_2 + c_3 + 2c_4)) = c_5 s_1 s_2 s_3$ операций.

4. Численные эксперименты.

4.1. Статистические модели. В первой серии экспериментов алгоритм применялся к фильтрации, полученной с помощью “равномерного” растворения горной породы, описанного в [7]. Здесь предполагалось, что концентрация реагента постоянна, что приводит к одинаковой скорости движения границы раздела поровое пространство — матрица породы. Исходные изображения были получены методом усеченного гауссовского поля [13]. Основные параметры при генерации изображений — пористость и длина корреляции, обе величины безразмерные. Длина корреляции измеряется в метрах, но так как в данном исследовании длина вокселя несущественна, то она безразмерна как

$$\frac{\text{длина корреляции, м.}}{\text{длина стороны вокселя, м.}}$$

Для тестирования было сгенерировано 160 изображений размера $250 \times 250 \times 250$ вокселей, по 10 для каждой из следующих пар параметров: пористость от 0.05 до 0.2 с шагом 0.05, длина корреляции от 5 до 20 с шагом 5. В процессе моделирования для каждого образца сделано 100 снимков.

Для всех изображений были вычислены 1-мерные баркоды до и после редукции, проведено их сравнение. Для каждого эксперимента баркоды совпали с точностью до перестановки, что подтверждает правильность реализации алгоритма.

Также было измерено время вычисления 1-мерных баркодов. Коэффициент ускорения, усредненный по параметрам образцов, изображен на рисунке 3. Здесь важно отметить, что коэффициент ускорения рассчитывался без учета времени, затраченного на редукцию. Это обусловлено тем, что алгоритм Эдельсбруннера–Летшера–Зомородяна имеет кубическую сложность, а алгоритм редукции линейную, следовательно с увеличением размера изображения время, затраченное на редукцию, становится незначительным.

Алгоритм 2. Алгоритм редукции

```

1:  $X \leftarrow$  массив изображения
2: for all  $(i, j, k)$  do
3:    $X[i][j][k].value \leftarrow$  значение вокселя в изображении
4:    $X[i][j][k].step \leftarrow$  шаг фильтрации, на котором воксель был добавлен
5:    $X[i][j][k].in\_stack \leftarrow true$ 
6:   if  $X[i][j][k].value = Image$  then
7:      $stack\_array[X[i][j][k].step].push((i, j, k))$ 
8:   end if
9: end for
10:  $l \leftarrow$  номер последнего шага фильтрации
11: while  $l \geq 0$  do
12:   if  $stack\_array[l].empty$  then
13:      $l \leftarrow l - 1$ 
14:     continue
15:    $(i, j, k) \leftarrow stack\_array[l].pop()$ 
16:    $X[i][j][k].in\_stack \leftarrow false$ 
17:   if  $CanRemove((i, j, k))$  then
18:      $X[i][j][k].value \leftarrow Addition$ 
19:      $list \leftarrow$  список координат вокселей, которые являются соседями вокселя с координатам  $(i, j, k)$ 
     в 6-связности, у которых  $value = Image, step = l, in\_stack = false$ 
20:     for all  $(i1, j1, k1) \in list$  do
21:        $X[i1][j1][k1].in\_stack \leftarrow true$ 
22:        $stack\_array[l].push((i1, j1, k1))$ 
23:     end for
24:   end if
25: end if
26: end while
27:  $X$  хранит искомое изображение после редукции

```

Алгоритм 3. Функция $CanRemove$

```

1: function  $CANREMOVE(i, j, k)$ 
2:    $T \leftarrow$  окрестность размера  $3 \times 3 \times 3$  с центром в  $(i, j, k)$ 
3:   if  $\exists(i1, j1, k1) \mid T[i1][j1][k1].step \leq T[i][j][k].step$  then
4:     return false
5:   end if
6:    $image\_component_1 \leftarrow$  число компонент связности изображения в  $T$ 
7:    $addition\_component_1 \leftarrow$  число компонент связности дополнения в  $T$ 
8:    $\chi_1 \leftarrow$  эйлерова характеристика изображения в  $T$ 
9:    $T[i][j][k].value \leftarrow Addition$ 
10:   $image\_component_2 \leftarrow$  число компонент связности изображения в  $T$ 
11:   $\chi_2 \leftarrow$  эйлерова характеристика изображения в  $T$ 
12:  return  $addition\_component_1 = 1$  and  $image\_component_1 = image\_component_2$  and  $\chi_1 = \chi_2$ 
13: end function

```

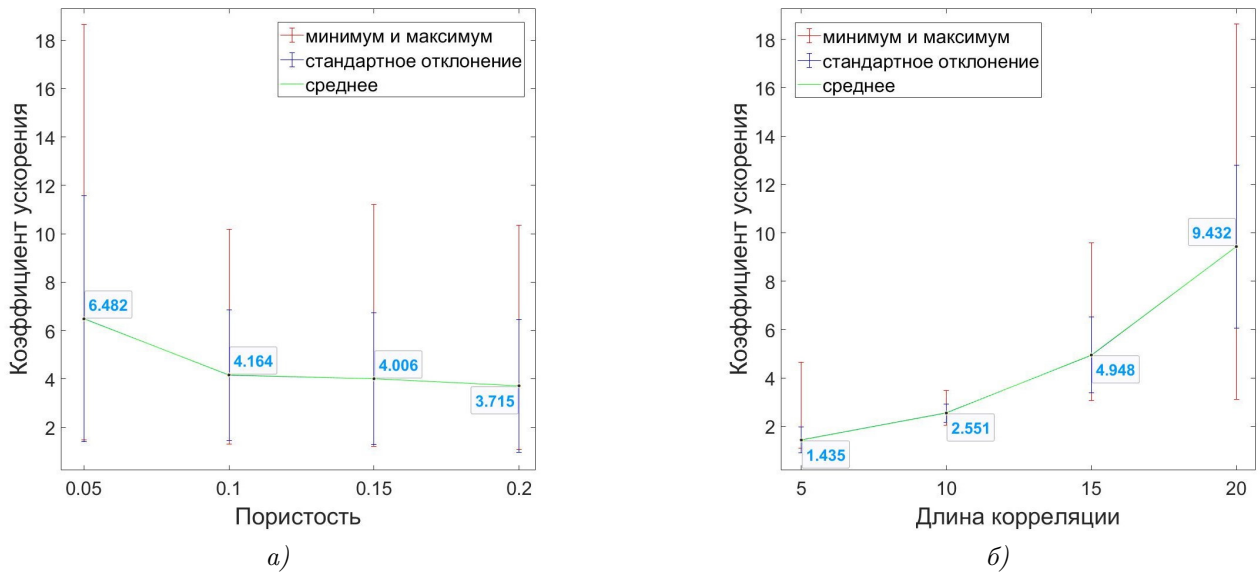


Рис. 3. Среднее значение ускорения расчета персистентных чисел Бетти в зависимости от пористости (а) и длины корреляции (б).

На рис. 3 видно, что наибольшего ускорения удается достичь для образцов с меньшей пористостью и большей длиной корреляции. Это связано с тем, что образцы с большей площадью поверхности растворяются быстрее и формируют более сложную топологическую структуру. Усреднение внутри каждой группы образцов (табл. 1) также подтверждает это предположение. В большинстве групп стандартное отклонение не велико (табл. 2). Только для образцов с длиной корреляции 5 и пористостью 0.05 его величина достаточно большая относительно среднего значения. Это указывает на то, что оценка среднего для данной группы не слишком точна и нужно провести больше экспериментов. В табл. 3, 4 показано максимальное и минимальное ускорение соответственно.

Таблица 1

Среднее (по реализациям) ускорение алгоритма в зависимости от пористости и длины корреляции

$l \backslash \rho$	0.05	0.1	0.15	0.2
5	1.9	1.4	1.3	1.2
10	3.1	2.5	2.4	2.2
15	6.9	5.1	4.3	3.5
20	14.0	7.7	8.0	8.0

Таблица 2

Стандартное отклонение (по реализациям) ускорения алгоритма в зависимости от пористости и длины корреляции

$l \backslash \rho$	0.05	0.1	0.15	0.2
5	0.98	0.06	0.06	0.09
10	0.31	0.18	0.09	0.10
15	1.58	0.88	0.38	0.22
20	2.83	2.08	1.66	1.63

Таблица 3

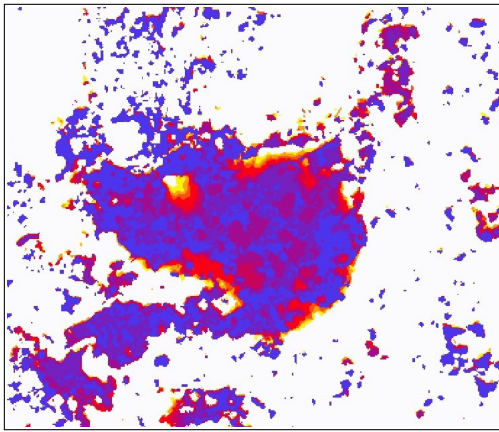
Максимальное ускорение алгоритма в зависимости от пористости и длины корреляции

$l \backslash \rho$	0.05	0.1	0.15	0.2
5	4.6	1.5	1.4	1.3
10	3.5	2.8	2.5	2.3
15	9.6	6.5	4.9	3.8
20	18.6	10.2	11.2	10.4

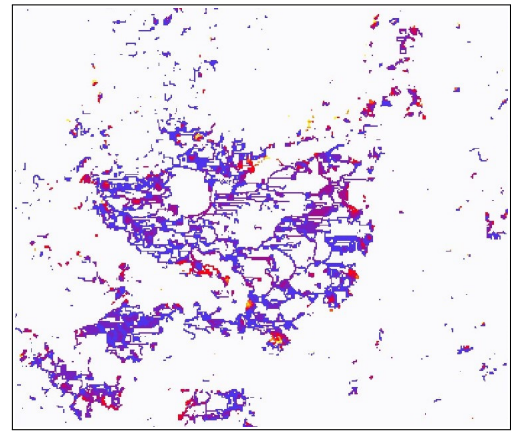
Таблица 4

Минимальное ускорение алгоритма в зависимости от пористости и длины корреляции

$l \backslash \rho$	0.05	0.1	0.15	0.2
5	1.5	1.3	1.2	1.1
10	2.5	2.2	2.2	2.0
15	4.7	3.9	3.8	3.0
20	10.8	3.1	6.0	5.9

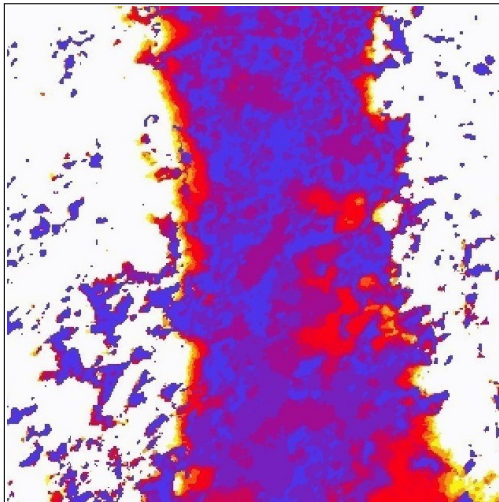


a)

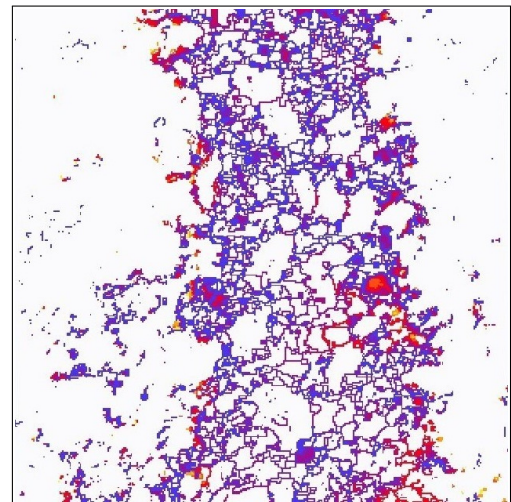


б)

Рис. 4. Горизонтальный срез фильтрации эксперимента АН до (а) и после редукции (б).
(Здесь и далее увеличение теплоты цвета соответствует увеличению шага фильтрации.)

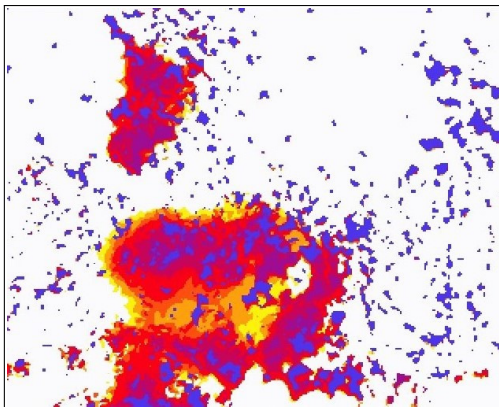


a)

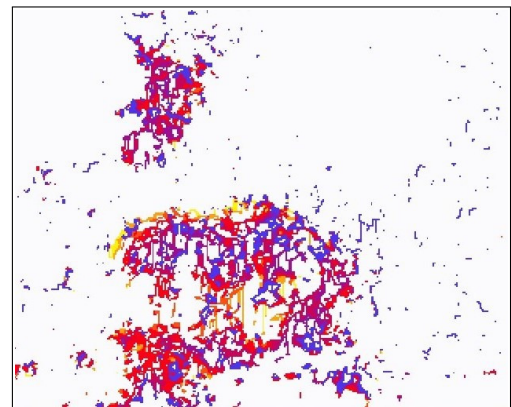


б)

Рис. 5. Вертикальный срез фильтрации эксперимента АН до (а) и после редукции (б).



a)



б)

Рис. 6. Горизонтальный срез фильтрации эксперимента АЛ до (а) и после редукции (б).

Таблица 5

Результаты работы алгоритма расчета персистентных чисел Бетти с использованием ретракции и без ретракции.

Эксперимент	АН	AL
Время ЭЛЗ, с	2485	445
Время редукции, с	240	101
Время ЭЛЗ после редукции, с	35	15
Коэффициент ускорения	71	29.67
Общее ускорение вычисления	9.04	3.84

4.2. Растворение мультиминерального карбоната насыщенным раствором в условиях пласта. Существенное отличие данных тестов от предыдущих заключается в том, что они были проделаны на реальных изображениях, полученных в результате растворения, описанного в [14]. Здесь приведем только характеристики изображений. Исходные изображения имели размер 1000^3 с длиной вокселя 5.2 мкм и соответствовали гетерогенным образцам породы, состоящим на 86.6% из доломита и на 11.1% из кальцита. Для каждого эксперимента имеется 10 снимков, показывающих динамику растворения.

Были рассмотрены эксперименты, обозначенные в работе [14] как AL и AN. В этих экспериментах образцы имели одинаковую гетерогенность, но в AL скорость потока ниже чем в AN. Из снимков получена фильтрация, с допущением того что воксели порового простарснта не становятся вокселями породы на более поздних шагах. И так как основная часть порового пространства находится в месте формирования канала, то из снимков AN были вырезаны фрагменты размера $400 \times 340 \times 400$, а из AL $260 \times 320 \times 400$.

Для обоих экспериментов было измерено время работы алгоритма Эдельсбруннера–Летшера–Зомордяна (ЭЛЗ в таблице) до и после редукции и время редукции (табл. 5). Ускорение здесь значительно выше, чем в первой серии тестов. Это связано с тем, что алгоритм редукции не удаляет воксели, имеющие соседей с большим номером шага фильтрации, а в этих образцах шагов фильтрации всего 10, и они достаточно большие.

На рис. 4–6 видно, что редукция не сохраняет геометрию изображения, но это и не требуется, достаточно сохранения топологии.

5. Заключение. В работе представлен алгоритм ретракции цифрового изображения пористой среды. Алгоритм применим для ускорения вычисления персистентных чисел Бетти, которые используются при характеристике изменения строения порового пространства в процессе химического взаимодействия флюида с породой. Показано, что использование алгоритма позволяет ускорить вычисление персистентных чисел Бетти до 70 раз в зависимости от сложности строения порового пространства и динамики процесса растворения породы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ гранты 18–05–00031, 18–01–00579 и поддержана грантом Президента РФ для молодых ученых — докторов наук МД–20.2019.5. Расчеты проводились на кластере НКС–1П Сибирского суперкомпьютерного центра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ghommem M., Zhao W., Dyer S., Qiu X., Brady D.* Carbonate acidizing: modeling, analysis, and characterization of wormhole formation and propagation // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2015. **131**. 18–33.
2. *McLeod H.O.* Matrix acidizing // *Journal of Petroleum Technology*. 1984. **36**, N 12. 2055–2069.
3. *Huang F., Bergmann P., Juhlin C., Ivandic M., Luth S., Ivanova A., Kempka T., Henningses J., Sopher D., Zhang F.* The first post-injection seismic monitor survey at the Ketzin pilot CO₂ storage site: results from time-lapse analysis // *Geophysical Prospecting*. 2018. **66**, N 1. 62–84.
4. *Vanorio T., Mavko G., Vialle S., Spratt K.* The rock physics basis for 4D seismic monitoring of CO₂ fate: are we there yet? // *The Leading Edge*. 2010. **29**, N 2. 113–240.
5. *Cui M.-J., Zheng J.-J., Zhang R.-J., Lai H.-J., Zhang J.* Influence of cementation level on the strength behaviour of bio-cemented sand // *Acta Geotechnica*. 2017. **12**, N 5. 971–986.
6. *Edelsbrunner H., Harer J.L.* Computational topology: an introduction. Providence: AMS Press, 2010.
7. *Гадьльшина К.А., Хачкова Т.С., Лисица В.В.* Численное моделирование химического взаимодействия флюида с горной породой // *Вычислительные методы и программирование*. 2019. **20**. 457–470.

8. Васильев Р.В., Герке К.М., Карсанина М.В., Корост Д.В. Решение уравнения Стокса в трехмерной геометрии конечно-разностным методом // Математическое моделирование. 2015. **27**, № 6. 67–80.
9. Базайкин Я.В. Лекции по вычислительной топологии. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017.
10. Wagner H., Chen C., Vuçini E. Efficient computation of persistent homology for cubical data // Topological Methods in Data Analysis and Visualization II. Mathematics and Visualization. Heidelberg: Springer, 2012. 91–106.
11. Mrozek M., Batko B. Coreduction homology algorithm // Discrete & Computational Geometry. 2009. **41**, N 1. 96–118.
12. Mrozek M., Wanner T. Coreduction homology algorithm for inclusions and persistent homology // Comput. Math. Appl. 2010. **60**, N 10. 2812–2833.
13. Hyman J.D., Winter C.L. Stochastic generation of explicit pore structures by thresholding Gaussian random fields // Journal of Computational Physics. 2014. **277**. 16–31.
14. Al-Khulafi Y., Lin Q., Blunt M.J., Bijeljic B. Pore-scale dissolution by CO₂ saturated brine in a multi-mineral carbonate at reservoir conditions: impact of physical and chemical heterogeneity. 2019. <http://dx.doi.org/10.5285/52b08e7f-9fba-40a1-b0b5-dda9a3c83be2>.

Поступила в редакцию
23 июля 2020

Digital Image Reduction for Analysis of Topological Changes in the Pore Space of the Rock Matrix during Chemical Dissolution

D. I. Prokhorov¹, Ya. V. Bazaikin², and V. V. Lisitsa³

¹ Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IPGG SB RAS); prospekt Koptuga 4, Novosibirsk, 630090, Russia; Junior Scientist, e-mail: d.prokhorov@g.nsu.ru

² Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IPGG SB RAS); prospekt Koptuga 4, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Associate Professor, Head of Laboratory, e-mail: bazaikin@math.nsc.ru

³ Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IPGG SB RAS); prospekt Koptuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Head of Laboratory, e-mail: LisitsaVV@ipgg.sbras.ru

Received July 23, 2020

Abstract: A new algorithm for the reduction of three-dimensional digital images is proposed to improve the performance of persistence diagrams computing. These diagrams represent changes in topology of the pore space in the rock matrix. The algorithm has a linear complexity, since the removal of the voxel is based on the structure of its neighborhood. It is shown that the efficiency of the algorithm depends heavily on the complexity of the pore space and the size of filtering steps.

Keywords: persistence homology, digital image reduction, chemical dissolution.

References

1. M. Ghommem, W. Zhao, S. Dyer, et al., “Carbonate Acidizing: Modeling, Analysis, and Characterization of Wormhole Formation and Propagation,” J. Petrol. Sci. Eng. **131**, 18–33 (2015).
2. H. O. McLeod, “Matrix Acidizing,” J. Petroleum Technol. **36** (12), 2055–2069 (1984).
3. F. Huang, P. Bergmann, C. Juhlin, et al., “The First Post-Injection Seismic Monitor Survey at the Ketzin Pilot CO₂ Storage Site: Results from Time-Lapse Analysis,” Geophys. Prospect. **66** (1), 62–84 (2018).
4. T. Vanorio, G. Mavko, S. Vialle, and K. Spratt, “The Rock Physics Basis for 4D Seismic Monitoring of CO₂ Fate: Are We There Yet?,” Lead. Edge **29** (2), 113–240 (2010).

5. M.-J. Cui, J.-J. Zheng, R.-J. Zhang, et al., “Influence of Cementation Level on the Strength Behaviour of Bio-Cemented Sand,” *Acta Geotech.* **12** (5), 971–986 (2017).
6. H. Edelsbrunner and J.L. Harer, *Computational Topology: An Introduction* (AMS Press, Providence, 2010).
7. K. A. Gadylyshina, T. S. Khachkova, and V. V. Lisitsa, “Numerical Modeling of Chemical Interaction between a Fluid and Rocks,” *Vychisl. Metody Programm.* **20**, 457–470 (2019).
8. R. V. Vasilyev, K. M. Gerke, M. V. Karsanina, and D. V. Korost, “Solution of the Stokes Equation in Three-Dimensional Geometry by the Finite-Difference Method,” *Mat. Model.* **27** (6), 67–80 (2015) [*Math. Models Comput. Simul.* **8** (1), 63–72 (2016)].
9. Ya. V. Bazaikin, *Lectures on Computational Topology* (Novosibirsk Gos. Univ., Novosibirsk, 2017) [in Russian].
10. H. Wagner, C. Chen, and E. Vuçini, “Efficient Computation of Persistent Homology for Cubical Data,” in *Topological Methods in Data Analysis and Visualization II. Mathematics and Visualization* (Springer, Heidelberg, 2012), pp. 91–106.
11. M. Mrozek and B. Batko, “Coreduction Homology Algorithm,” *Discrete Comput. Geom.* **41** (1), 96–118 (2009).
12. M. Mrozek and T. Wanner, “Coreduction Homology Algorithm for Inclusions and Persistent Homology,” *Comput. Math. Appl.* **60** (10), 2812–2833 (2010).
13. J.D. Hyman and C.L. Winter, “Stochastic Generation of Explicit Pore Structures by Thresholding Gaussian Random Fields,” *J. Comput. Phys.* **277**, 16–31 (2014).
14. Y. Al-Khulaifi, Q. Lin, M. J. Blunt, and B. Bijeljic, “Pore-Scale Dissolution by CO₂ Saturated Brine in a Multi-Mineral Carbonate at Reservoir Conditions: Impact of Physical and Chemical Heterogeneity,” (2019) <http://dx.doi.org/10.5285/52b08e7f-9fba-40a1-b0b5-dda9a3c83be2>. Cited August 18, 2020.