

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v21r431

## ОБ АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ

Н. В. Ключнев<sup>1</sup>

Существующая технология численного анализа устойчивости течений вязкой несжимаемой жидкости в каналах постоянного сечения была ранее расширена на случай локальных пространственных аппроксимаций на неструктурированных сетках, приводящих к задачам с большими разреженными матрицами. Для пространственной аппроксимации при этом используется метод конечных элементов, а для решения частных проблем собственных значений, возникающих при исследовании устойчивости течений, эффективный метод ньютоновского типа. В данной работе проводится подробное численное исследование предложенного подхода на примере двумерной конфигурации — течения Пуазейля в канале эллиптического сечения. Работоспособность подхода демонстрируется для широкого диапазона отношений длин полуосей сечения вплоть до отношения, при котором данное течение становится линейно неустойчивым. Показана сходимость ведущей части спектра по шагу сетки и совпадение результатов с результатами, полученными на основе аппроксимации спектральным методом коллокаций.

**Ключевые слова:** гидродинамическая устойчивость, метод конечных элементов, неструктурированная сетка, разреженные матрицы, канал эллиптического сечения, частичная проблема собственных значений, приближенный метод Ньютона.

**1. Введение.** Технология численного анализа временной и пространственной устойчивости течений вязкой несжимаемой жидкости в каналах постоянного сечения, разработанная и обоснованная в [1, 2, 3, 4], была расширена [5] на случай локальных пространственных аппроксимаций на неструктурированных расчетных сетках, приводящих к задачам с большими разреженными матрицами. Изначально эта технология была ориентирована на работу с матрицами не очень больших порядков, к которым приводят, например, спектральные методы аппроксимации, широко применяемые при численном исследовании устойчивости течений [6, 7], поскольку наиболее неустойчивые возмущения являются, как правило, достаточно гладкими функциями. Однако для областей сложной формы использование спектральных методов затруднено необходимостью в большинстве случаев отображать исследуемую область на область определения ортогональных полиномов, так как их корни используются для построения расчетной сетки, что позволяет значительно увеличить устойчивость расчета к ошибкам округления. Кроме того, в случае круглого или эллиптического сечения после перехода к эллиптико-полярным координатам система уравнений Навье–Стокса становится сингулярной, поскольку некоторые коэффициенты обращаются в бесконечность в центре канала. Эта техническая проблема имеет несколько стандартных путей решения [8, 9, 10], однако она существенно усложняет [11] слабую постановку, отсутствие которой не позволяет в большинстве случаев сохранить на дискретном уровне некоторые важные свойства операторов исходной непрерывной задачи, такие как симметричность и отрицательная определенность оператора Лапласа и соотношение между градиентом и дивергенцией, что может приводить к возникновению численных артефактов (к последним относятся так называемые нефизические возмущения, наблюдавшиеся в работе [9]).

Таким образом, в случае каналов с сечениями сложной формы естественно использовать другие способы аппроксимации, например, локальные методы, приводящие к большим разреженным матрицам. В рамках работы [5] было предложено использовать метод конечных элементов, хорошо зарекомендовавший себя в задачах вычислительной аэрогидродинамики (см., например, [12]). Он легко формулируется для неструктурированных сеток, которые позволяют аппроксимировать задачи в областях сложной формы без применения отображений. Также этот метод включает в себя слабую постановку задачи, что позволяет

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., 4, 125047, Москва; науч. сотр., e-mail: n\_klyushnev@mail.ru

сохранить на дискретном уровне важные свойства исходных операторов. Одна из основных вычислительных задач в рассматриваемой технологии — решение проблем собственных значений, к которому сводится расчет нейтральных кривых и вычисление соответствующих критических чисел Рейнольдса. В случае больших разреженных матриц решают частичные проблемы собственных значений, для чего используют эффективный метод, предложенный в [13, 14]. Он является комбинацией приближенного метода обратных итераций с тюнингом и метода ньютоновского типа. С помощью первого, который сходится практически с любого начального приближения, но имеет только линейную скорость сходимости, ищется начальное приближение для второго, сходящегося квадратично, но локально. По сравнению с другими методами, широко используемыми для решения таких задач (методы Якоби–Давидсона, Арнольди и несимметричный метод Ланцоша), такой метод логически более прост и более надежен, а также требует значительно меньшего объема оперативной памяти.

В данной работе описанный выше подход численно исследован на примере течения Пуазейля в канале эллиптического сечения при различных значениях отношения длин полуосей. Исследование устойчивости этого течения, в отличие от случая канала круглого сечения, рассмотренного в [5], является задачей биглобальной устойчивости [15], поскольку профиль течения не осесимметричен и задача существенно зависит от двух переменных. Такие задачи уже не поддаются анализу с помощью известных аналитических подходов, а их численный анализ значительно усложняется, поскольку приводит к вычислительным задачам существенно большей алгебраической размерности. Именно для исследования биглобальной устойчивости течений были разработаны используемые в данной технологии эффективные методы вычисления с заданной точностью характеристик устойчивости. Ранее эта технология была успешно применена для детального исследования устойчивости течений в каналах прямоугольного сечения [16, 17] и в каналах с продольным оребрением стенок (волнистым [18, 19] и гребенчатым [20]). Эти работы показали, в частности, что характеристики устойчивости существенно зависят от формы сечения канала. В данной работе будет рассмотрен широкий диапазон значений отношения длин полуосей эллиптического сечения канала, в том числе такие значения, при котором течение Пуазейля является линейно неустойчивым.

В разделе 2 данной работы дается постановка задачи, в разделе 3 описаны некоторые элементы используемой технологии исследования устойчивости течений. В разделе 4 кратко описана пространственная аппроксимация методом конечных элементов и спектральным методом коллокаций, с помощью которого будет проводиться верификация полученных результатов, а также описаны используемые в работе открытые программные пакеты. В разделе 5 приводятся результаты численных экспериментов для различных значений отношения длин полуосей сечения канала. В разделе 6 подводится итог работы.

**2. Постановка задачи.** В декартовой системе координат с продольным направлением  $x$ , вертикальным направлением  $y$  и поперечным  $z$  рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерном бесконечном в продольном направлении канале

$$\{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, y^2/a^2 + z^2/b^2 < 1\} \quad (1)$$

постоянного эллиптического сечения  $\Sigma = \{(y, z) : y^2/a^2 + z^2/b^2 < 1\}$ , где  $a$  и  $b$  — заданные положительные величины, выражающие длины малой и большой полуосей сечения. Обозначим компоненты скорости вдоль этих направлений, давление, коэффициент кинематический вязкости и плотность среды через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\nu$  и  $\rho$  соответственно. Введем также параметр  $A = \frac{b}{a}$ , выражающий отношение длин большой и малой полуосей сечения. Движение жидкости в этом канале определяется следующими трехмерными уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta u = 0, \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \Delta v = 0, \\ \frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \Delta w = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$$

означает полную производную по времени функции  $f$ , а  $\Delta$  — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Одним из решений уравнений (2) с условием прилипания на стенках канала (1) является стационарное течение  $u = U, v = 0, w = 0, p = -\tau x$ , с заданным постоянным  $\tau > 0$ , называемое течением Пуазейля, где  $U = U(y, z)$  — профиль течения, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\tau}{\nu\rho}$$

в области  $\Sigma$  с нулевыми граничными условиями. Нас будет интересовать устойчивость этого решения к малым возмущениям.

Запишем произвольное решение системы (2), близкое к течению Пуазейля, в виде

$$\begin{aligned} u &= U + \delta u' + \mathcal{O}(\delta^2), \quad v = \delta v' + \mathcal{O}(\delta^2), \quad w = \delta w' + \mathcal{O}(\delta^2), \\ p &= -\tau x + \delta p' + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\delta$  — малый параметр, а  $u', v', w', p'$  — некоторые функции  $x, y, z$  и  $t$ , не зависящие от  $\delta$ , и подставим его в (2). Потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли (2) при всех значениях  $\delta$  в окрестности 0, и, отбросив нелинейные по  $\delta$  члены, получим следующую систему линейных уравнений относительно  $u', v', w'$  и  $p'$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} v' + \frac{\partial U}{\partial z} w' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} - \nu \Delta u' &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} - \nu \Delta v' &= 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \nu \Delta w' &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

с нулевыми граничными условиями для  $u', v', w'$  на стенке канала. Определим число Рейнольдса как  $\text{Re} = U(0, 0)a/\nu$ , где  $U(0, 0)$  — максимальная скорость течения Пуазейля, которая достигается в центре канала, и произведем нормировку, сохранив за переменными старые обозначения: скорость мы нормируем на  $U(0, 0)$ , пространственные координаты на  $a$ , время на  $a/U(0, 0)$ , давление на  $\rho U^2(0, 0)$  и  $\tau$  на  $\rho U^2(0, 0)/a$ . В результате получим следующую систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} v' + \frac{\partial U}{\partial z} w' + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u' &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta v' &= 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta w' &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

которая будет описывать эволюцию малых возмущений в канале

$$\{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, y^2 + z^2/A^2 < 1\} \tag{6}$$

постоянного эллиптического сечения

$$\Sigma = \{(y, z) : y^2 + z^2/A^2 < 1\}.$$

**3. Анализ линейной устойчивости течения.** Исследование временной линейной устойчивости течения Пуазейля сводится [6, 7, 21] к изучению устойчивости нулевого решения системы (5) к возмущениям вида

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(x, y, z, t) &= \mathbf{u}''(y, z)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ p'(x, y, z, t) &= p''(y, z)e^{i(\alpha x - \omega t)}; \end{aligned} \quad (7)$$

здесь  $i$  — мнимая единица,  $\alpha$  — фиксированное вещественное продольное волновое число,  $\omega$  — комплексная частота,  $\mathbf{u}'' = u''\mathbf{e}_x + v''\mathbf{e}_y + w''\mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{e}_z$  — единичные орты по направлениям координатных осей. При  $\alpha = \omega = 0$  возмущения (7) являются действительными функциями, в противном случае — комплексными, однако самостоятельный физический смысл имеют их действительные и мнимые части, которые также удовлетворяют системе (5).

Подставив (7) в (5) и отбросив для простоты двойные штрихи, получим относительно спектрального параметра  $\omega$  и функций  $(\mathbf{u}, p)$  проблему собственных значений

$$\omega \mathbf{u} = iJ\mathbf{u} + \frac{i}{\text{Re}}L\mathbf{u} + iGp, \quad F\mathbf{u} = 0, \quad (8)$$

где

$$J = - \begin{bmatrix} i\alpha U & \partial U / \partial y & \partial U / \partial z \\ 0 & i\alpha U & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha U \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -i\alpha \\ -\partial / \partial y \\ -\partial / \partial z \end{bmatrix},$$

$$F = [i\alpha, \partial / \partial y, \partial / \partial z], \quad L = -\alpha^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2,$$

рассматриваемую в области  $\Sigma$  с нулевыми граничными условиями. В первом уравнении (8) мы перенесли мнимую единицу в правую часть, поскольку в связи с удобством волновой интерпретации возмущений нас интересуют именно значения комплексной частоты  $\omega$ , являющиеся точками спектра полученной проблемы собственных значений.

В этом разделе мы будем предполагать, что проблема (8) была аппроксимирована некоторым образом по пространственным переменным, и в результате аппроксимации мы получили следующую обобщенную алгебраическую проблему собственных значений:

$$\omega M\mathbf{u} = iJ_\alpha \mathbf{u} + \frac{i}{\text{Re}}L_\alpha \mathbf{u} + iG_\alpha p, \quad F_\alpha \mathbf{u} = 0,$$

где  $\mathbf{u}$  и  $p$  — векторы коэффициентов разложения компонент скорости и давления по некоторым выбранным базисным функциям соответственно,  $M$  — квадратная числовая матрица, а  $J_\alpha$ ,  $L_\alpha$ ,  $G_\alpha$ ,  $F_\alpha$  — дискретные аналоги операторов в (8), представляющие собой числовые матрицы. В блочном виде эту проблему можно записать следующим образом:

$$\omega \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iJ_\alpha + (i/\text{Re})L_\alpha & iG_\alpha \\ F_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В разделе 4 мы опишем два способа пространственной аппроксимации, которые будут использоваться в данной работе, приводящие к алгебраической проблеме собственных значений вида (9).

Предположим, что матрица  $M$  невырожденная, при  $\alpha > 0$  прямоугольные матрицы  $G_\alpha$  и  $F_\alpha$  имеют полный ранг и выполняется условие

$$\text{rank } G_\alpha = \text{rank } F_\alpha = \text{rank } F_\alpha M^{-1} G_\alpha. \quad (10)$$

В таком случае к проблеме (9) может быть применена алгебраическая редукция, предложенная и обоснованная в [1, 22], которая заключается в проектировании задачи на подпространство соленоидальных сеточных функций. Такая редукция сводит обобщенную проблему (9) к обыкновенной проблеме собственных значений с матрицей существенно меньшего порядка: после редукции порядок сокращается на  $2n_p$ , где  $n_p$  — размерность дискретного пространства для поиска давления. Для осуществления этой редукции сначала вычислим  $QR$ -разложения [23] матриц  $F_\alpha^*$  и  $G_\alpha$ :

$$F_\alpha^* = [Q_F, \tilde{Q}_F] \begin{bmatrix} R_F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_\alpha = [Q_G, \tilde{Q}_G] \begin{bmatrix} R_G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где  $Q_F$  и  $Q_G$  — унитарные прямоугольные матрицы, дополняющие матрицы  $\tilde{Q}_F$  и  $\tilde{Q}_G$  до квадратных унитарных,  $R_F$  и  $R_G$  — квадратные невырожденные верхние треугольные матрицы, а  $F_\alpha^*$  означает матрицу, комплексно сопряженную матрице  $F_\alpha$ . Произвольный вектор  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющий второму уравнению в (9), однозначно представим в виде  $\mathbf{u} = \tilde{Q}_F \tilde{\mathbf{u}}$ . Подставим это представление в первое уравнение в (9) и, умножив результат слева на  $\tilde{Q}_G^*$ , придем к уравнению:

$$\omega \tilde{Q}_G^* M \tilde{Q}_F \tilde{\mathbf{u}} = i \tilde{Q}_G^* J_\alpha \tilde{Q}_F \tilde{\mathbf{u}} + \frac{i}{\text{Re}} \tilde{Q}_G^* L_\alpha \tilde{Q}_F \tilde{\mathbf{u}} + i \tilde{Q}_G^* G_\alpha p.$$

Учитывая, что  $\tilde{Q}_G^* G_\alpha = 0$ , получим следующую обыкновенную проблему собственных значений:

$$\omega \tilde{\mathbf{u}} = i H \tilde{\mathbf{u}}, \tag{12}$$

где  $H = (\tilde{Q}_G^* M \tilde{Q}_F)^{-1} (\tilde{Q}_G^* (J_\alpha + L_\alpha / \text{Re}) \tilde{Q}_F)$ . Отметим, что поскольку при вычислении  $QR$ -разложения не может быть учтена разреженная структура матриц, описанная выше редукция применима только к матрицам не очень большого порядка, в том числе в случае, когда большинство элементов матрицы равно нулю.

**4. Пространственная аппроксимация.** В данной работе проблема собственных значений (8) аппроксимировалась двумя способами. Первый способ — метод Галеркина с использованием треугольных конечных элементов Тейлора–Худа [12, 24, 25], то есть линейных непрерывных базисных функций для аппроксимации давления и квадратичных непрерывных базисных функций для аппроксимации компонент скорости. На рис. 1 изображены такие базисные функции для одномерного случая. Эта пара конечных элементов удовлетворяет [12] условиям inf-sup (условиям Ладыженской–Бабушки–Бреци), что необходимо для устойчивой аппроксимации уравнений Навье–Стокса. При такой аппроксимации матрица  $M$  в (9) — это матрица масс, а дискретные аналоги операторов удовлетворяют (10) при  $\alpha > 0$  и обладают также следующими свойствами, унаследованными от непрерывных операторов:

$$G_\alpha = F_\alpha^*, \quad L_\alpha = L_\alpha^* < 0.$$

Кроме того, все матрицы в (9) являются разреженными. Эти матрицы вычислялись с помощью открытого программного пакета FEniCS [25], позволяющего произвести слабую постановку, используя специальный высокоуровневый язык UFL, и автоматизировать дискретизацию задачи методом конечных элементов на заданной сетке.

Для построения неструктурированной треугольной расчетной сетки в эллипсе  $\Sigma$  использовался открытый программный пакет Salome [26]. На рис. 2 изображена сетка для  $A = 6$ , состоящая из 2226 элементов, использованная в одном из расчетов, описанных в следующем разделе. Все сетки для конечноэлементных расчетов в данной работе сгущались к границе, поскольку модуль производной профиля течения Пуазейля растет при удалении от центра канала. Для построения двумерной сетки внутри области использовался алгоритм Netgen 2D, а для разбиения границы эллипса на отрезки — алгоритм Wire Discretisation. При измельчении сетки изменялись четыре основных параметра этих алгоритмов: максимальный и минимальный линейные размеры двумерных элементов  $s_{\max}$  и  $s_{\min}$ , скорость роста размера двумерных элементов  $g$  и максимальная длина отрезка на границе эллипса  $l_{\max}$ . Если, например, значение параметра  $g$  равно 0.2, то это означает, что размеры соседних элементов не могут отличаться больше, чем на 20%. Изображенная на рис. 2 сетка была построена при  $s_{\max} = 0.25$ ,  $s_{\min} = l_{\max} = 0.1$  и  $g = 0.2$  при нормировке на малую полуось эллипса.

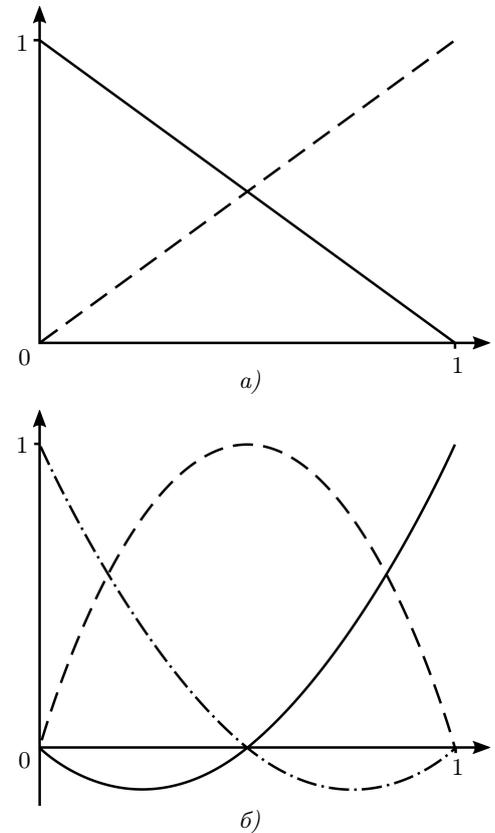


Рис. 1. Используемые конечноэлементные базисные функции Тейлора–Худа в одномерном случае: а) линейные для аппроксимации давления; б) квадратичные для аппроксимации скорости

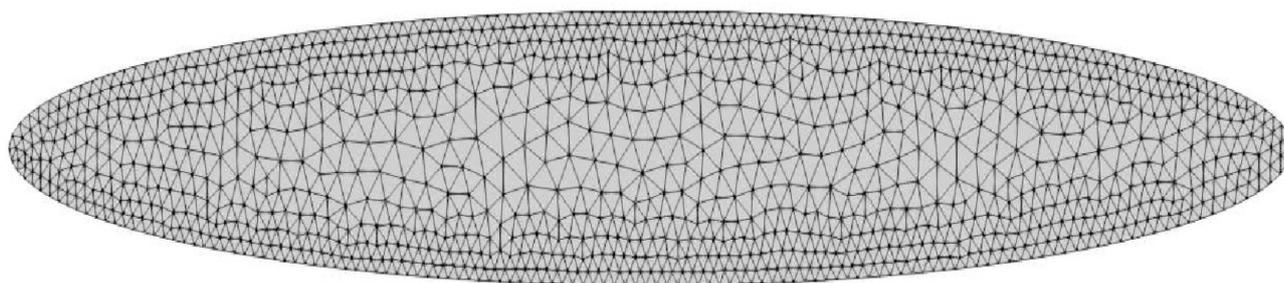


Рис. 2. Неструктурированная расчетная сетка в области  $\Sigma$  при  $A = 6$ , состоящая из 2226 треугольных элементов

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, при применении описанной алгебраической редукции не может быть учтена разреженная структура матриц, поэтому при аппроксимации методом конечных элементов мы применяли редукцию только для достаточно грубых сеток, которые использовались для вычисления полного спектра проблемы (12) (подробнее об используемых конечноэлементных сетках см. в начале следующего раздела). При этом редукция сокращала порядок матриц лишь на  $\approx 20\%$ , поскольку размерность дискретного пространства для поиска давления в случае элементов Тейлора–Худа существенно меньше, чем для поиска компонент скорости. В случае мелких сеток мы решали частичную обобщенную проблему собственных значений (9), используя специальный метод для матричных пучков с большими разреженными матрицами, предложенный и подробно описанный в [13, 14].

Этот метод предназначен для вычисления понижающих подпространств [23], отвечающих изолированным подмножествам минимальных по модулю конечных собственных значений регулярных неэрмитовых матричных пучков. Пусть матричный пучок имеет вид  $(C - \lambda B)$ , а искомые собственные значения лежат вблизи точки комплексной плоскости  $\sigma$  и достаточно хорошо отделены от остальной части спектра, тогда их можно найти, применив этот метод к смещенному матричному пучку  $(\tilde{C} - \lambda B)$ , где  $\tilde{C} = C - \sigma B$ , при этом матрица  $\tilde{C}$  должна быть невырожденной. Одним из способов выбрать сдвиг  $\sigma$  в том случае, когда матричный пучок был получен в результате пространственной аппроксимации какой-либо задачи, является получение приближения к искомому подмножеству собственных значений на более грубой расчетной сетке. Точно локализовать искомое подмножество позволяет вычисление полного спектра. В численных экспериментах, результаты которых приведены в следующем разделе, сдвиг выбирался именно таким образом — равным ведущему собственному значению полного спектра, вычисленного на достаточно грубой сетке.

Данный метод является комбинацией приближенного метода обратных итераций с тюнингом и метода ньютоновского типа. Первый сходится практически с любого начального приближения, однако имеет только линейную скорость сходимости. Второй метод имеет квадратичную скорость сходимости, однако сходится только локально, то есть для его использования требуется хорошее начальное приближение, которое и ищется с помощью приближенного метода обратных итераций. Основная часть вычислительных затрат обоих методов связана с решением систем линейных алгебраических уравнений. Для их решения в данной работе использовался метод обобщенных минимальных невязок (GMRES) с правым предобусловливанием, которое строилось на основе неполного LU-разложения. Далее в работе для краткости мы будем называть эту комбинацию методов методом Ньютона.

Второй способ аппроксимации проблемы собственных значений (8) — спектральный метод коллокаций на основе полиномов Лежандра, подробно такая аппроксимация описана в [9]. Для построения сетки мы использовали эллиптические-полярные координаты: область поперечного сечения канала отображалась в прямоугольник  $[-\pi, \pi] \times [-1, 1]$  в координатах  $(\theta, r)$ , в котором строилась расчетная сетка. В качестве базисных функций по  $\theta$  использовались тригонометрические интерполяционные полиномы, а в качестве базисных функций по  $r$  — интерполяционные полиномы Лагранжа. Расчетная сетка по направлению  $\theta$  строилась равномерной, а по направлению  $r$  узлами являлись корни производной полинома Лежандра. Такая сетка позволяет добиться большой устойчивости к ошибкам округления при полиномиальной интерполяции. Корни производной полинома Лежандра сгущаются к границе отрезка  $[-1, 1]$ , что обеспечивает также и необходимое в рассматриваемой задаче сгущение сетки к границе области  $\Sigma$ .

Поскольку в эллипτικο-полярных координатах коэффициенты в системе Навье–Стокса зависят от угла только через  $\sin 2\theta$  и  $\cos 2\theta$ , поиск решений системы можно свести к поиску решений, обладающих одной из следующих четырех симметрий:

$$\begin{aligned} &(u_{-+}, v_{+-}, w_{-+}, p_{-+}), \\ &(u_{--}, v_{++}, w_{--}, p_{--}), \\ &(u_{++}, v_{--}, w_{++}, p_{++}), \\ &(u_{+-}, v_{-+}, w_{+-}, p_{+-}), \end{aligned} \tag{13}$$

где, например,  $u_{+-}$  означает, что  $u$  симметрична относительно большой оси эллиптического сечения и антисимметрична относительно малой (см., например, [27]).

В результате аппроксимации этим методом матрица  $M$  в (9) является единичной, а дискретные аналоги операторов являются плотными матрицами, удовлетворяющими (10) при  $\alpha > 0$ . Алгебраическая редукция в этом случае сокращает порядок результирующих матриц примерно вдвое, так как размерность дискретного пространства для поиска давления практически такая же, как для поиска каждой компоненты скорости. Поскольку этот метод обладает высоким порядком аппроксимации, он позволяет вычислить спектр проблемы (8) с высокой точностью на сетке с небольшим количеством узлов, а благодаря использованию редукции и учету симметрий задачи сделать это удастся, решая полную проблему собственных значений (12) с матрицами не очень большого порядка.

**5. Численные эксперименты.** В этом разделе мы приведем результаты численных экспериментов. Спектр проблемы (12), полученный на основе аппроксимации спектральным методом коллокаций и сошедшийся по шагу сетки, мы будем считать эталонным и с ним будем сравнивать спектр проблем (12) и (9), вычисленный на основе аппроксимации методом конечных элементов. Будут рассмотрены различные значения параметра  $A$ . Для каждого  $A$  будет использовано два набора конечноэлементных сеток: грубые с максимальным количеством элементов  $\approx 4500$  и мелкие с количеством элементов до  $\approx 120000$ . Грубые сетки потребуются для вычисления полного спектра проблемы (12), ведущее собственное значение которого будет использоваться в качестве сдвига для решения частичной обобщенной проблемы собственных значений (9) с матрицами, полученными после аппроксимации на мелких сетках. Все численные эксперименты, описанные в этом разделе, были выполнены на персональных компьютерах с 32 гигабайтами оперативной памяти.

Напомним, что линейным критическим числом Рейнольдса называют

$$\text{Re}_{\text{crit}} = \inf_{\alpha} \text{Re}_{\text{crit}}^{\alpha},$$

где  $\text{Re}_{\text{crit}}^{\alpha}$  — это такое минимальное число Рейнольдса, при котором спектр проблемы (8) имеет непустое пересечение с действительной осью. При этом  $\alpha_{\text{crit}} = \arg \inf_{\alpha} \text{Re}_{\text{crit}}^{\alpha}$ . Таким образом,  $\text{Re}_{\text{crit}}$  определяется ведущим собственным значением проблемы (9) или (12), поэтому далее в этом разделе нас будет интересовать именно ведущая часть спектра этих проблем собственных значений. Отметим, что течение Пуазейля в канале эллиптического сечения линейно устойчиво при любом числе Рейнольдса, если отношение длин полуосей меньше критического значения  $A_{\text{crit}} \approx 10.4$  (см. зависимость  $\text{Re}_{\text{crit}}$  от  $A$ , рассчитанную в [27]). Поэтому во всех расчетах при  $A < A_{\text{crit}}$  были выбраны следующие параметры:  $\text{Re} = 3000$  и  $\alpha = 1$ . Для  $A = 12$  были выбраны приближения критических значений  $\text{Re}_{\text{crit}} \approx 44000$  и  $\alpha_{\text{crit}} \approx 0.775$ , рассчитанные в работе [27].

На рис. 3, 5, 7 и 9 для рассматриваемых значений  $A \in \{2, 6, 9, 12\}$  изображена ведущая часть спектра проблемы (12), вычисленная на основе метода коллокаций, а также ведущая часть спектра этой же проблемы, вычисленная на основе метода конечных элементов на нескольких грубых сетках с различным количеством элементов. Во всех этих случаях решалась полная проблема собственных значений. В случае метода коллокаций после алгебраической редукции и учета симметрий решение проблемы собственных значений было сведено к решению четырех проблем существенно меньшего порядка. В случае метода конечных элементов применялась только алгебраическая редукция. В табл. 1 для этих расчетов указаны количества узлов и элементов в расчетных сетках, порядки результирующих матриц, а также величина ведущего собственного значения.

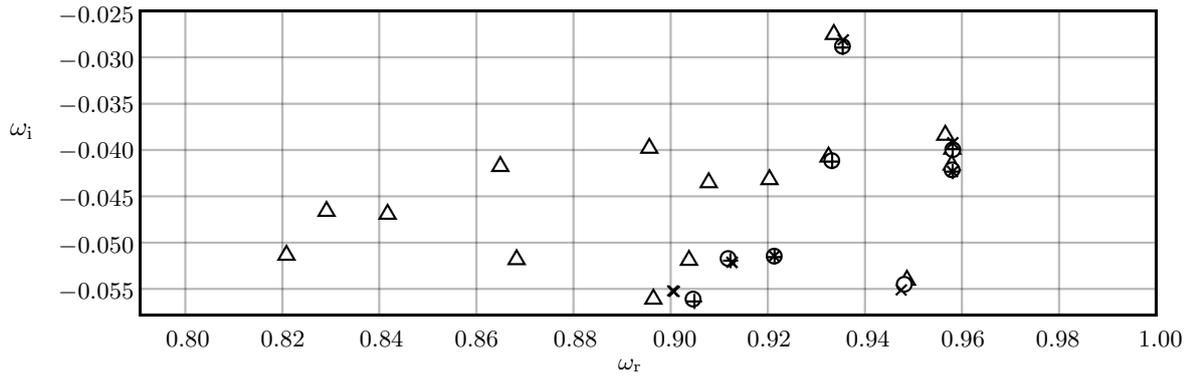


Рис. 3. Ведущая часть спектра проблемы (12) для  $A = 2$ , рассчитанная на основе метода коллокаций на сетке  $60 \times 40$  узлов (+), а также рассчитанная на основе метода конечных элементов на сетках со следующим количеством элементов: 990 ( $\Delta$ ), 2004 ( $\times$ ) и 4075 ( $\circ$ )

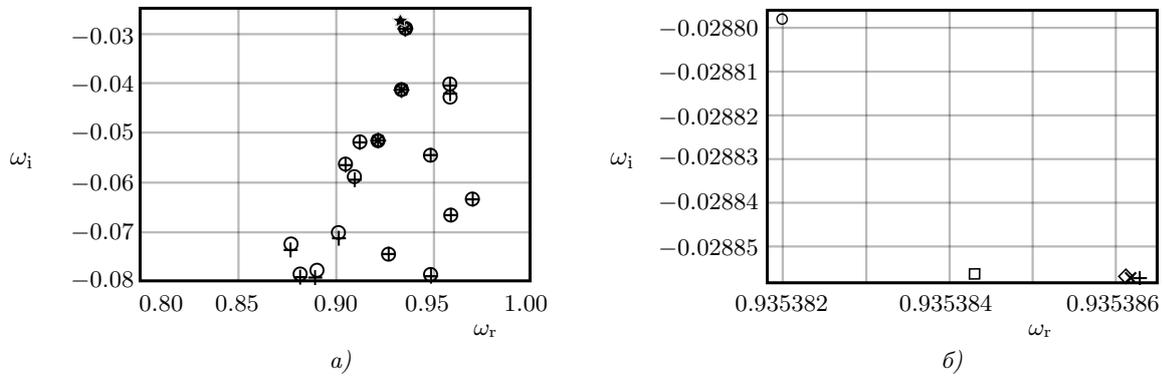


Рис. 4. Ведущая часть спектра проблемы (12): а) для  $A = 2$ , рассчитанная на основе метода коллокаций на сетке  $60 \times 40$  узлов (+) и рассчитанная на основе метода конечных элементов на сетке с 4075 элементами ( $\circ$ ), а также три собственных значения проблемы (9), ближайšie к сдвигу ( $\star$ ), рассчитанные на основе метода конечных элементов на сетках со следующим количеством элементов: 17664 ( $\square$ ), 60676 ( $\diamond$ ) и 114755 ( $\times$ ); б) ведущие собственные значения спектра

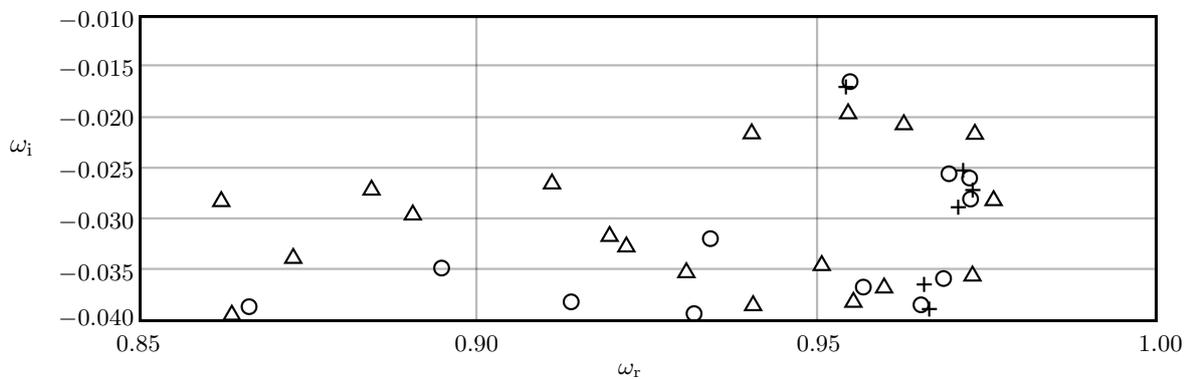


Рис. 5. Ведущая часть спектра проблемы (12) для  $A = 6$ , рассчитанная на основе метода коллокаций на сетке  $120 \times 80$  узлов (+), а также рассчитанная на основе метода конечных элементов на сетках со следующим количеством элементов: 2226 ( $\Delta$ ) и 4232 ( $\circ$ )

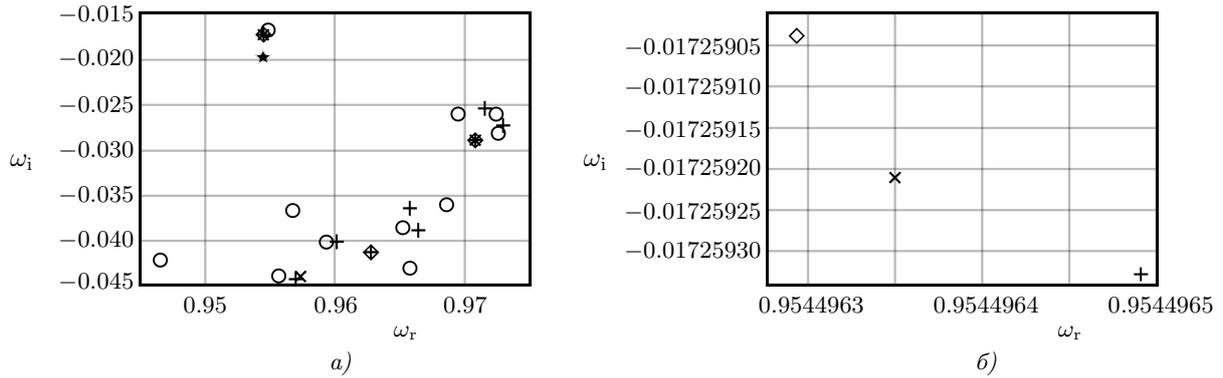


Рис. 6. Ведущая часть спектра проблемы (12): а) для  $A = 6$ , рассчитанная на основе метода коллокаций на сетке  $120 \times 80$  узлов (+) и рассчитанная на основе метода конечных элементов на сетке с 4232 элементами (o), а также три собственных значения проблемы (9), ближайшие к сдвигу (\*), рассчитанные на основе метода конечных элементов на сетках с количеством элементов 60204 (o) и 114394 (x); б) ведущие собственные значения спектра

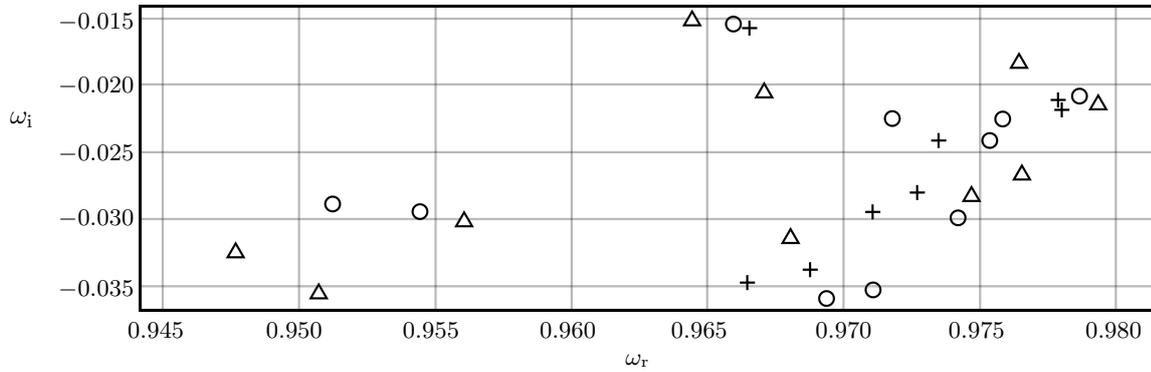


Рис. 7. Ведущая часть спектра проблемы (12) для  $A = 9$ , рассчитанная на основе метода коллокаций на сетке  $200 \times 120$  узлов (+), а также рассчитанная на основе метода конечных элементов на сетках со следующим количеством элементов: 2328 ( $\Delta$ ) и 4543 (o)

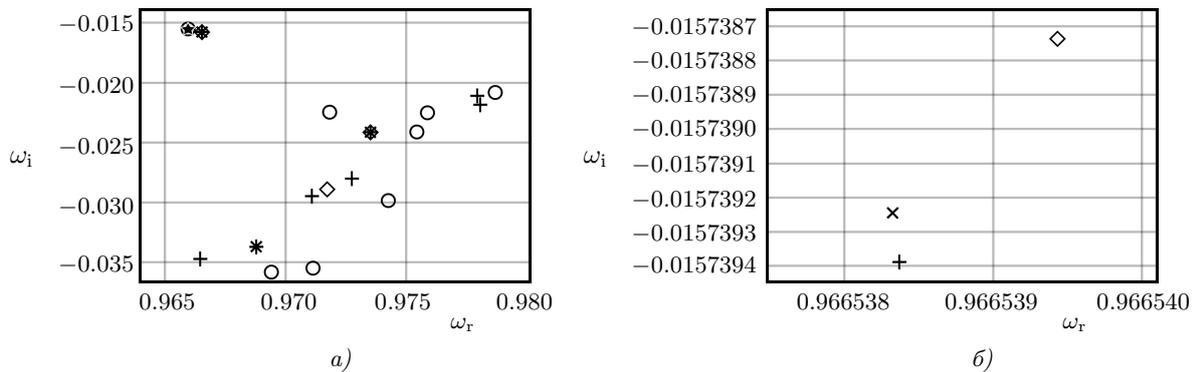


Рис. 8. Ведущая часть спектра проблемы (12): а) для  $A = 9$ , рассчитанная на основе метода коллокаций на сетке  $200 \times 120$  узлов (+) и рассчитанная на основе метода конечных элементов на сетке с 4543 элементами (o), а также три собственных значения проблемы (9), ближайшие к сдвигу (\*), рассчитанные на основе метода конечных элементов на сетках с количеством элементов 61007 (o) и 117521 (x); б) ведущие собственные значения спектра

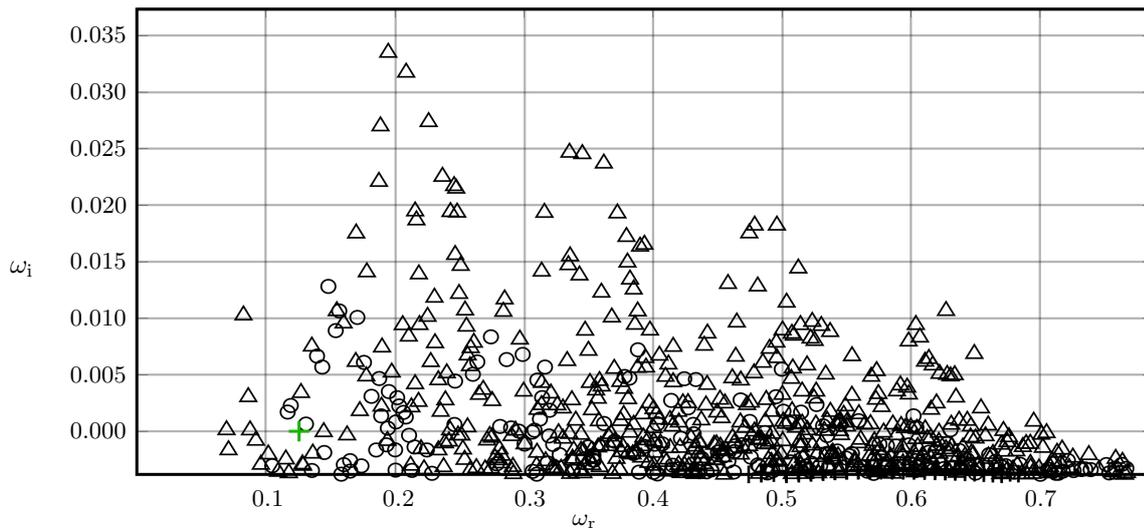


Рис. 9. Ведущая часть спектра проблемы (12) для  $A = 12$  и критических значений  $Re_{crit}$  и  $\alpha_{crit}$ , рассчитанная на основе метода коллокаций на сетке  $200 \times 120$  узлов (+), а также рассчитанная на основе метода конечных элементов на сетках со следующим количеством элементов: 4683 ( $\triangle$ ) и 7122 ( $\circ$ )

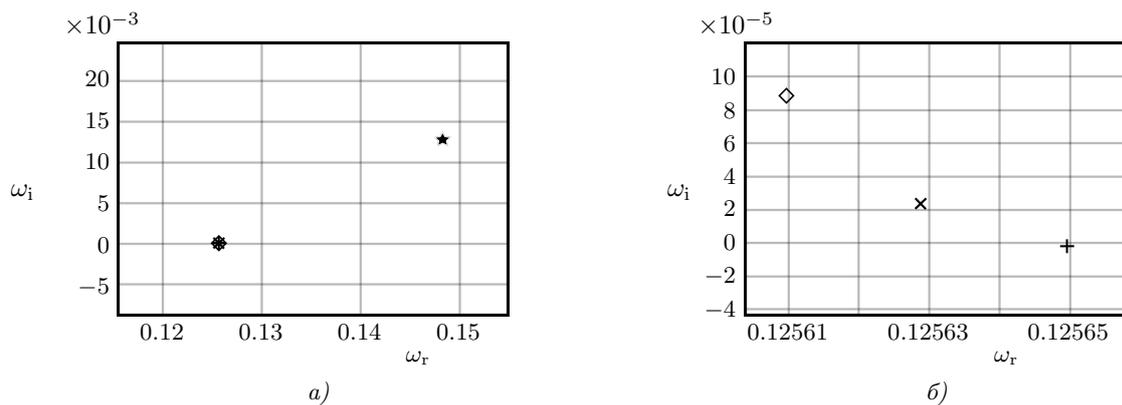


Рис. 10. Ведущее собственное значение проблемы (12): а) для  $A = 12$  и критических значений  $Re_{crit}$  и  $\alpha_{crit}$ , рассчитанное на основе метода коллокаций на сетке  $200 \times 120$  узлов (+), а также собственное значение проблемы (9), ближайшее к сдвигу (\*), рассчитанное на основе метода конечных элементов на сетках с количеством элементов 61138 ( $\diamond$ ) и 121339 ( $\times$ ); б) собственные значения, вычисленные при тех же условиях, в более крупном масштабе

Из рисунков видно, что собственные значения, вычисленные на основе метода конечных элементов, приближаются к эталонным с измельчением сетки. Однако по мере увеличения отношения длин полуосей эллиптического сечения канала они становятся дальше от эталонных из-за растущей ошибки аппроксимации. По этой же причине нам была нужна все более мелкая сетка, чтобы добиться сходимости по шагу сетки ведущих собственных значений при расчете на основе метода коллокаций. Наибольшую ошибку аппроксимации можно наблюдать при наибольшем значении  $A = 12$ . Как видно из рис. 9, спектр, вычисленный на основе метода конечных элементов, хотя и приближается к мнимой оси с измельчением сетки, существенно отличается от эталонного: большое количество собственных значений лежит в верхней полуплоскости, в то время как при критических параметрах  $Re_{crit}$  и  $\alpha_{crit}$  лишь ведущее собственное значение должно лежать на действительной оси.

На рис. 4, 6, 8 и 10 приведены результаты конечноэлементных расчетов при дальнейшем измельчении расчетной сетки. В этих случаях полная проблема собственных значений уже не может быть решена, поэтому решалась частичная обобщенная проблема собственных значений (9) с помощью метода Ньютона [13, 14], кратко описанного в предыдущем разделе. Искались три собственных значения, ближайших к сдвигу, который в случаях  $A = 2$  и  $A = 6$  выбирался равным ведущему собственному значению полного

Таблица 1  
 Ведущее собственное значение проблемы (12). В графе “Сетка” для метода конечных элементов (FEM) приведено количество элементов в расчетной сетке, а для спектрального метода коллокаций (CL) приведены количества узлов  $n_\theta \times n_r$  по направлениям  $\theta$  и  $r$ . В графе “ $N$ ” указаны порядки результирующих матриц

A	Метод	Сетка	N	$\omega_1$	
				Real	Im
2	FEM	990	5069	0.93366500	-0.02752359
	FEM	2004	10457	0.93522341	-0.02808000
	FEM	4075	21606	0.93538199	-0.02879754
	CL	60 × 40	1200	0.93538629	-0.02885720
6	FEM	2226	11370	0.95445894	-0.01977641
	FEM	4232	22032	0.95480183	-0.01671550
	CL	120 × 80	4800	0.95449649	-0.01725933
9	FEM	2328	11784	0.96440232	-0.01512513
	FEM	4543	23557	0.96596419	-0.01538724
	CL	120 × 80	4800	0.96653836	-0.01573939
12	FEM	4683	24054	0.18384083	0.02761970
	FEM	7122	37045	0.14827753	0.01282343
	CL	200 × 120	12000	0.12564953	-1.5 × 10 <sup>-6</sup>

Таблица 2

Ближайшие к сдвигу собственные значения, вычисленные на основе аппроксимации методом конечных элементов (FEM) на мелких сетках. В графе “Сетка” приведено количество элементов в расчетной сетке, а для спектрального метода коллокаций (CL) приведены количества узлов  $n_\theta \times n_r$  по направлениям  $\theta$  и  $r$ . В графе “ $N$ ” указаны порядки результирующих матриц

A	Метод	Сетка	N	$\omega_1$		$\omega_2$		$\omega_3$	
				Real	Im	Real	Im	Real	Im
2	FEM	17664	113980	0.93538430	-0.02885677	0.93332295	-0.04126557	0.92122555	-0.05152457
	FEM	60676	391368	0.93538613	-0.02885697	0.93332520	-0.04126617	0.92122878	-0.05152470
	FEM	114755	742449	0.93538618	-0.02885721	0.93332529	-0.04126633	0.92122916	-0.05152510
	CL	60 × 40	1200	0.93538629	-0.02885720	0.93332541	-0.04126634	0.92122933	-0.05152507
6	FEM	60204	387665	0.95449629	-0.01725904	0.97081662	-0.02889793	-	-
	FEM	114394	738375	0.95449635	-0.01725921	0.97081698	-0.02889800	-	-
	CL	120 × 80	4800	0.95449649	-0.01725933	0.97081694	-0.02889814	-	-
9	FEM	61007	391962	0.96653943	-0.01573874	0.97349325	-0.02412016	-	-
	FEM	117521	757773	0.96653832	-0.01573925	0.97349167	-0.02411840	-	-
	CL	120 × 80	4800	0.96653836	-0.01573939	0.97349175	-0.02411812	-	-
12	FEM	61138	392541	0.12560971	8.9 × 10 <sup>-5</sup>	-	-	-	-
	FEM	121339	782315	0.12562877	2.4 × 10 <sup>-5</sup>	-	-	-	-
	CL	200 × 120	12000	0.12564953	-1.5 × 10 <sup>-6</sup>	-	-	-	-

спектра, рассчитанного на самой грубой сетке из приведенных в табл. 1. В случае  $A = 9$  из-за погрешности аппроксимации при расчете на сетке с 2328 элементами формально ведущим стало собственное значение из другой ветви спектра, не приведенной на рис. 8. Только расчет полного спектра на более мелкой сетке с 4543 элементами, ведущее значение которого было выбрано в качестве сдвига, позволил определить истинную ветвь. В случае  $A = 12$  ведущее собственное значение полного спектра, полученного с использованием сетки с 4683 элементами, не подошло в качестве сдвига, поскольку из-за большой ошибки аппроксимации оно отстоит слишком далеко от правильного значения, и нам не удалось добиться сходимости используемого метода Ньютона. Поэтому мы рассчитали полный спектр на еще более мелкой сетке с 7122 элементами, ведущее собственное значение которого, выбранное в качестве сдвига, позволило

получить сходимость метода Ньютона для ведущего собственного значения. Следует обратить внимание, что на этих рисунках масштабы изображения по вертикальной и горизонтальной осям значительно отличаются, поэтому вычисленные на мелких сетках собственные значения визуально могут не казаться ближайшими к сдвигу. В табл. 2 для этих расчетов указаны количества узлов и элементов в расчетных сетках, порядки результирующих матриц, а также величины рассчитанных собственных значений. В случаях  $A = 6$  и  $A = 9$  приведены только два собственных значения, а в случае  $A = 12$  одно, поскольку для остальных метод Ньютона не сошелся.

Из этих результатов видно, что с увеличением отношения длин полуосей эллиптического сечения  $A$  для аппроксимации задачи обоими методами ожидаемо требуется все более мелкая сетка, и все меньшее количество ведущих собственных значений для мелких конечноэлементных сеток удается рассчитать с помощью используемого метода Ньютона. Однако вплоть до  $A = 12$  этот подход позволяет достаточно точно вычислить ведущее собственное значение, которое определяет устойчивость течения.

**6. Заключение.** В работе была численно исследована на примере течения Пуазейля в канале эллиптического сечения технология исследования устойчивости течений вязкой несжимаемой жидкости [1, 2, 3, 4], ранее расширенная [5] на случай локальных пространственных аппроксимаций, приводящих к задачам с большими разреженными матрицами. Для аппроксимации был использован метод конечных элементов с элементами Тейлора–Худа, а для решения частичных обобщенных проблем собственных значений использовался метод Ньютона, предложенный и описанный в [13, 14]. Был рассмотрен широкий диапазон значений отношения длин полуосей сечения канала  $A$ , в том числе значение  $A = 12$ , при котором данное течение является линейно неустойчивым. По мере увеличения  $A$  для получения приемлемого сдвига при решении частичных проблем собственных значений требовалось рассчитать полный спектр задачи на все более мелкой сетке, и для меньшего количества ведущих собственных значений удавалось получить сходимость используемого метода Ньютона. Однако вплоть до  $A = 12$  аппроксимация методом конечных элементов позволила вычислить ведущее собственное значение, которое определяет устойчивость течения, и получить его сходимость по шагу сетки к эталонным значениям. Примененный в работе подход не требует использования отображения области поперечного сечения канала для дискретизации задачи, а также дает возможность рассматривать каналы с поперечным сечением сложной формы.

Автор выражает благодарность Кириллу Вячеславовичу Демьянко (к.ф.-м.н., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН) за плодотворные обсуждения работы, а также анонимному рецензенту за ценные замечания, которые помогли улучшить статью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boiko A.V., Nечепуренко Ю.М.* Численный спектральный анализ временной устойчивости ламинарных течений в каналах постоянного сечения // ЖВМ и МФ. 2008. **48**, № 10. 1731–1747.
2. *Boiko A.V., Nечепуренко Ю.М.* Numerical study of stability and transient phenomena of Poiseuille flows in ducts of square cross-sections // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. **24**, N 3. 193–205.
3. *Boiko A.V., Nечепуренко Ю.М.* Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений // ЖВМ и МФ. 2010. **50**, № 6. 1109–1125.
4. *Boiko A.V., Демьянко К.В., Nечепуренко Ю.М.* Численный анализ пространственной гидродинамической устойчивости сдвиговых течений в каналах постоянного сечения // ЖВМ и МФ. 2018. **58**, № 5. 726–740.
5. *Клюшнев Н.В.* Об использовании конечно-элементной аппроксимации на неструктурированной сетке для анализа устойчивости течений жидкости в каналах постоянного сечения. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. № 30. М., 2020.
6. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. New York: Springer, 2001.
7. *Boiko A.V., Dougal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V.* Physics of transitional shear flows. Dordrecht: Springer, 2012.
8. *Fornberg B.* A pseudospectral approach for polar and spherical geometries // SIAM J. Sci. Comp. 1995. **16**, N 5. 1071–1081.
9. *Demyanko K.V.* Numerical model for the investigation of hydrodynamic stability of shear flows in pipes of elliptic cross-section // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2019. **34**, N 6. 301–316.
10. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1994. **277**. 197–225.
11. *Shen J.* Efficient spectral-Galerkin methods III: Polar and Cylindrical Geometries // SIAM J. Sci. Comput. 1997. **18**, N 6. 1583–1604.
12. *Gunzburger M.D.* Finite element methods for viscous incompressible flows. Boston: Academic Press, 1989.

13. *Demjanok K.V., Nepochurenko Yu.M., Sadkane M.* A Newton-like method for computing deflating subspaces // *J. Numer. Math.* 2015. **23**, N 4. 289–301.
14. *Demjanok K.V., Kaporin I.E., Nepochurenko Yu.M.* Inexact Newton method for the solution of eigenproblems arising in hydrodynamic temporal stability analysis // *J. Numer. Math.* 2020. **28**, N 1. 1–14.
15. *Theofilis V.* Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows // *Progress in Aerospace Sciences.* 2003. **39**, N 4. 249–315.
16. *Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М.* О зависимости линейной устойчивости течений Пуазейля в прямоугольном канале от отношения длин сторон сечения // *Докл. Акад. наук.* 2011. **440**, № 5. 618–620.
17. *Demjanok K.V., Nepochurenko Yu.M.* Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2013. **28**, N 2. 125–148.
18. *Бойко А.В., Ключнев Н.В., Нечепуренко Ю.М.* Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016.
19. *Boiko A.V., Klyushnev N.V., Nepochurenko Yu.M.* On stability of Poiseuille flow in grooved channels // *Europhys. Lett.* 2015. **111**, N 1. 14001.p1–14001.p6.
20. *Григорьев О.А., Ключнев Н.В.* Устойчивость течения Пуазейля в канале с гребенчатым оребрением // *ЖВМ и МФ.* 2018. **58**, № 4. 595–606.
21. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
22. *Нечепуренко Ю.М.* О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем Управления // *Докл. Акад. наук.* 2012. **445**, № 1. 17–19.
23. *Golub G.H., van Loan C.F.* Matrix computations. Baltimore: The John Hopkins Univ. Press, 1996.
24. *Taylor C., Hood P.* A numerical solution of the Navier–Stokes equations using the finite element technique // *Computers and Fluids.* 1973. **1**, N 1. 73–100.
25. *Logg A., Mardal K.-A., Wells G.N. (Eds).* Automated solution of differential equations by the finite element method. Berlin: Springer, 2012.
26. *Ribes A., Caremoli C.* Salomè platform component model for numerical simulation // *COMPSAC 07: Proceeding of the 31st Annual International Computer Software and Applications Conference.* Vol. 2. Washington, DC: IEEE Press, 2007. 553–564.
27. *Kerswell R.R., Davey A.* On the linear instability of elliptic pipe flow // *J. Fluid. Mech.* 1996. **316**. 307–324.

Поступила в редакцию  
12 июня 2020

## On the Stability Analysis of Flows in Channels of Elliptic Cross Section Using the Finite Element Method on Unstructured Meshes

N. V. Klyushnev<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Miusskaya ploshchad' 4, Moscow, 125047, Russia; Scientist, e-mail: n\_klyushnev@mail.ru*

Received June 12, 2020

**Abstract:** The existing technique for the numerical analysis of incompressible fluid flow stability in channels of constant cross section was earlier extended to the case of local spatial approximations on unstructured meshes, which leads to large sparse matrices. The finite element method is employed for spatial approximation and a new efficient Newton-type method is used to solve partial eigenvalues problems arising in flow stability analysis. A detailed numerical study of the proposed approach is carried out in this paper by the example of Poiseuille flow in a channel of elliptic cross section. Performance ability of the approach is demonstrated for a wide range of the cross-sectional semiaxes ratio, including the case of linear instability of the flow under consideration. The convergence of the leading part of the spectrum with respect to the grid size is shown. Our results are in good agreement with those obtained via approximation by the spectral collocation method.

**Keywords:** hydrodynamic stability, finite element method, unstructured mesh, sparse matrices, channel of elliptic cross section, partial eigenvalue problem, inexact Newton method.

## References

1. A. V. Boiko and Yu. M. Nechepurenko, “Numerical Spectral Analysis of Temporal Stability of Laminar Duct Flows with Constant Cross Sections,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **48** (10), 1731–1747 (2008) [*Comput. Math. Math. Phys.* **48** (10), 1699–1714 (2008)].
2. A. V. Boiko and Yu. M. Nechepurenko, “Numerical Study of Stability and Transient Phenomena of Poiseuille Flows in Ducts of Square Cross-Sections,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **24** (3), 193–205 (2000).
3. A. V. Boiko and Yu. M. Nechepurenko, “Technique for the Numerical Analysis of the Riblet Effect on Temporal Stability of Plane Flows,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (6), 1109–1125 (2010) [*Comput. Math. Math. Phys.* **50** (6), 1055–1070 (2010)].
4. A. V. Boiko, K. V. Demyanko, and Yu. M. Nechepurenko, “Numerical Analysis of Spatial Hydrodynamic Stability of Shear Flows in Ducts of Constant Cross Section,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **58** (5), 726–740 (2018) [*Comput. Math. Math. Phys.* **58** (5), 700–713 (2018)].
5. N. V. Klyushnev, *On Utilizing the Finite Element Method on Unstructured Meshes for Stability Analysis of Flows in Channels of Constant Cross-Section*, Preprint No. 30 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2020).
6. P. J. Schmid and D. S. Henningson, *Stability and Transition in Shear Flows* (Springer, New York, 2001).
7. A. V. Boiko, A. V. Dovgal, G. R. Grek, and V. V. Kozlov, *Physics of Transitional Shear Flows* (Springer, Dordrecht, 2012).
8. B. Fornberg, “A Pseudospectral Approach for Polar and Spherical Geometries,” *SIAM J. Sci. Comp.* **16** (5), 1071–1081 (1995).
9. K. V. Demyanko, “Numerical Model for the Investigation of Hydrodynamic Stability of Shear Flows in Pipes of Elliptic Cross-Section,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **34** (6), 301–316 (2019).
10. P. J. Schmid and D. S. Henningson, “Optimal Energy Density Growth in Hagen–Poiseuille Flow,” *J. Fluid Mech.* **277**, 197–225 (1994).
11. J. Shen, “Efficient Spectral-Galerkin Methods III: Polar and Cylindrical Geometries,” *SIAM J. Sci. Comput.* **18** (6), 1583–1604 (1997).
12. M. D. Gunzburger, *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows* (Academic Press, Boston, 1989).
13. K. V. Demyanko, Yu. M. Nechepurenko, and M. Sadkane, “A Newton-like Method for Computing Deflating Subspaces,” *J. Numer. Math.* **23** (4), 289–301 (2015).
14. K. V. Demyanko, I. E. Kaporin, and Yu. M. Nechepurenko, “Inexact Newton Method for the Solution of Eigenproblems Arising in Hydrodynamic Temporal Stability Analysis,” *J. Numer. Math.* **28** (1), 1–14 (2020).
15. V. Theofilis, “Advances in Global Linear Instability Analysis of Nonparallel and Three-Dimensional Flows,” *Prog. Aerosp. Sci.* **39** (4), 249–315 (2003).
16. K. V. Demyanko and Yu. M. Nechepurenko, “Dependence of the Linear Stability of Poiseuille Flows in a Rectangular Duct on the Cross-Sectional Aspect Ratio,” *Dokl. Akad. Nauk* **440** (5), 618–620 (2011) [*Dokl. Phys.* **56** (10), 531–533 (2011)].
17. K. V. Demyanko and Yu. M. Nechepurenko, “Linear Stability Analysis of Poiseuille Flow in a Rectangular Duct,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **28** (2), 125–148 (2013).
18. A. V. Boiko, N. V. Klyushnev, and Yu. M. Nechepurenko, *Stability of Shear Flows over a Grooved Surface* (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2016). [in Russian], doi:10.20948/mono-2016-klyushnev
19. A. V. Boiko, N. V. Klyushnev, and Yu. M. Nechepurenko, “On Stability of Poiseuille Flow in Grooved Channels,” *Europhys. Lett.* **111** (1), 14001.p1–14001.p6 (2015).
20. O. A. Grigoriev and N. V. Klyushnev, “Stability of the Poiseuille Flow in a Channel with Comb Grooves,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **58** (4), 595–606 (2018) [*Comput. Math. Math. Phys.* **58** (4), 581–592 (2018)].
21. P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
22. Yu. M. Nechepurenko, “On the Dimension Reduction of Linear Differential-Algebraic Control Systems,” *Dokl. Akad. Nauk* **445** (1), 17–19 (2012) [*Dokl. Math.* **86** (1), 457–459 (2012)].
23. G. H. Golub and C. F. van Loan, *Matrix Computations* (John Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1996; Mir, Moscow, 1999).

24. C. Taylor and P. Hood, "A Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations Using the Finite Element Technique," *Comput. Fluids* **1** (1), 73–100 (1973).
25. A. Logg, K.-A. Mardal, and G. Wells (Eds), *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method* (Springer, Berlin, 2012).
26. A. Ribes and C. Caremoli, "Salomè Platform Component Model for Numerical Simulation," in *Proc. 31st Annual Int. Computer Software and Applications Conference (COMPSAC 2007), Beijing, China, July 24–27, 2007* (IEEE Press, Washington D.C., 2007), Vol. 2, pp. 553–564.
27. R. R. Kerswell and A. Davey, "On the Linear Instability of Elliptic Pipe Flow," *J. Fluid. Mech.* **316**, 307–324 (1996).