

УДК 519.246.8

doi 10.26089/NumMet.v21r215

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАЛАКТИЧЕСКОГО ДИНАМО С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Д. А. Грачев<sup>1</sup>, С. А. Елистратов<sup>2</sup>

Рассматривается нелинейная модификация стохастической модели галактического динамо, в рамках которой коэффициент, отвечающий за турбулентную диффузию, полагается случайным процессом с обновлением. Показано, что при малых значениях напряженности магнитного поля его статистические моменты ведут себя примерно так же, как и в линейной модели (в частности, продемонстрировано наличие эффекта перемежаемости). Получены оценки для характерных времен выхода моментов на стабилизацию, которая наступает по мере приближения поля к равновесному значению. Проведено сопоставление результатов численного эксперимента, полученных при усреднении различных объемов выборки независимых случайных реализаций поля.

**Ключевые слова:** галактическое динамо, магнитное поле, уравнения со случайными коэффициентами, статистический момент.

**1. Введение.** Несмотря на значительный прогресс в развитии аналитических методов изучения эволюционных уравнений со случайными коэффициентами, исследование как уравнений в частных производных, так и обыкновенных дифференциальных уравнений подобного типа сопряжено с серьезными затруднениями. Дело в том, что аналитические результаты обычно формулируются в виде некоторых предельных утверждений, из которых совершенно неясно, начиная с какого значения асимптотического параметра (например, объема выборки) они справедливы [1]. Кроме того, возможности аналитической теории существенно ограничиваются так называемой проблемой моментов, т.е. проблемой, связанной с выводом замкнутых уравнений для моментных функций решения. Как показывает анализ, даже для достаточно простых линейных уравнений проблема усреднения оказывается весьма сложной задачей, поскольку дифференциальное уравнение для  $n$ -й степени решения может быть, вообще говоря, нелинейным [2]. Еще одним показательным примером служит метод усреднения, связанный с построением цепочек дифференциальных уравнений для моментных функций [3]. Основным препятствием, возникающим на данном пути, является тот факт, что эти цепочки обычно оказываются бесконечными, связанными и незамкнутыми (впрочем, иногда их все же удается разорвать или замкнуть: см., например, работы [4, 5], в которых построена моментная теория для уравнений Навье–Стокса).

Приведенные примеры, а также ряд других обстоятельств, указывающих на принципиальную ограниченность возможностей аналитической теории [6], естественным образом наводят на мысль о необходимости проведения численного эксперимента. Это важно еще и потому, что эволюционные уравнения со случайными коэффициентами часто возникают при моделировании различных процессов в приложениях, в частности в задачах физики и астрономии. Одной из таких задач, возникающих в теории динамо при описании эволюции крупномасштабных магнитных полей в галактиках, и посвящена данная статья.

**2. Уравнения галактического динамо. Планарное приближение.** Эволюция крупномасштабных магнитных полей в галактиках связана с механизмом динамо, суть которого состоит в переходе кинетической энергии межзвездного газа в энергию магнитного поля. Этот переход обусловлен совокупным действием двух процессов: дифференциального вращения (связанного с тем, что угловая скорость вращения галактики зависит от расстояния до ее центра) и так называемого альфа-эффекта, характеризующего

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; науч. сотр., e-mail: dengrac@mail.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: invsbl\_mn@mail.ru

турбулентные движения [7]. Если представить полное магнитное поле  $\mathbf{H}$  галактики в виде суммы

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{b},$$

где  $\mathbf{B}$  — крупномасштабное (регулярное) поле с характерным масштабом изменения порядка нескольких килопарсек, а  $\mathbf{b}$  — мелкомасштабная компонента, соответствующая турбулентным ячейкам (для галактик — это масштабы порядка 50–100 парсек), то регулярная компонента  $\mathbf{B}$  может быть найдена из уравнения Штеенбека–Краузе–Рэдлера, которое возникает путем усреднения уравнений магнитной гидродинамики по масштабам, превышающим характерные размеры турбулентности [8]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{V}$  — скорость крупномасштабных движений среды (обусловленных главным образом вращением галактики),  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий “закрученность” турбулентных движений,  $\eta = lv/3$  — коэффициент турбулентной диффузии,  $l$  — масштаб турбулентной ячейки,  $v$  — скорость турбулентных движений.

Непосредственное изучение уравнения (1) является весьма сложной задачей, поэтому на практике, как правило, используют различные приближения. В случае, когда галактический диск достаточно тонкий, общепринятым подходом является использование так называемого планарного приближения [9, 10]. Оно позволяет переписать уравнение (1) в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка по времени, которая описывает две основные компоненты магнитного поля — радиальную  $B_r$  и угловую  $B_\varphi$ :

$$\frac{dB_r}{dt} = -\frac{\pi\alpha}{2h} B_\varphi - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_r, \quad \frac{dB_\varphi}{dt} = -r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_\varphi. \quad (2)$$

Далее мы вводим в модель галактического динамо стохастические эффекты и переходим от рассмотрения детерминированных уравнений к уравнениям со случайными коэффициентами. Остановимся на этом подробнее и поясним, чем мотивировано данное стремление.

**3. Модель галактического динамо со случайной турбулентной диффузией. Нелинейная модификация коэффициента альфа-эффекта.** Основные параметры, которые входят в уравнения динамо, однозначно определяются кинематическими характеристиками межзвездной среды: угловой скоростью вращения галактики, скоростью турбулентных движений и др. [11]. При этом в большинстве случаев полагают, что данные величины мало меняются в пределах галактического диска и при расчетах их можно считать постоянными. Такой подход представляется вполне разумным при изучении магнитных полей “спокойных” галактик, в которых основную роль играет атомарный водород, однако он явно не оправдан по отношению к объектам, в которых происходят процессы, сильно меняющие свойства межзвездной среды ввиду массового появления горячих областей ионизованного водорода [12] (в первую очередь, это процессы звездообразования, взрывы сверхновых и т.д.). Данное обстоятельство делает весьма перспективным рассмотрение моделей динамо, в которых управляющие параметры описываются стохастическими закономерностями при помощи некоторых случайных функций с заданным набором статистических характеристик [13, 14]. В настоящей статье мы рассматриваем одну из таких моделей, в которой случайным полагается коэффициент, отвечающий за турбулентную диффузию.

Вновь обратимся к системе (2). Полагая, что “спокойной” области галактики соответствует коэффициент турбулентной диффузии  $\eta_0$ , введем “безразмерное” время  $t' = \frac{\eta_0}{h^2} t$  [9] и два безразмерных параметра

$$R_\alpha = \frac{\pi\alpha h}{2\eta_0}, \quad R_\omega = \frac{1}{\eta_0} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} h^2.$$

Обычно считают, что  $R_\alpha \sim 1$ ,  $R_\omega \sim 10$  (напомним, что  $h$  — полутолщина диска). В результате система уравнений (2) примет вид

$$\frac{dB_r}{dt'} = -R_\alpha B_\varphi - k B_r, \quad \frac{dB_\varphi}{dt'} = -R_\omega B_r - k B_\varphi, \quad (3)$$

где  $k = \pi^2 \eta / 4 \eta_0$  — коэффициент, показывающий, во сколько раз значение турбулентной диффузии в исследуемой области отличается от значения, соответствующего “спокойной” области галактики с небольшой

долей ионизованной компоненты водорода. Далее мы опускаем штрихи и понимаем под временем только его безразмерный вариант.

Подробное численное исследование стохастической системы (3) проведено в недавнем цикле работ [15–17], в которых были построены типичные реализации магнитного поля, его среднее, а также высшие статистические моменты и многоточечные корреляторы. Результаты, полученные в рамках численного моделирования, хорошо согласуются при этом с предсказаниями аналитической теории. В частности, численный эксперимент позволяет обнаружить эффект перемежаемости, который выражается в прогрессивном росте статистических моментов и многоточечных корреляторов поля даже тогда, когда рост его типичной реализации еще не начался [17]. Кроме того, этот эффект показал, что влияние флуктуаций коэффициента  $k$  турбулентной диффузии на поведение магнитного поля носит пороговый характер. Иначе говоря, при малых значениях эти флуктуации лишь слегка возмущают зависимость решения от времени, однако по мере того как они достигают некоторой пороговой величины, рост поля сменяется затуханием.

Линейная модель (3) галактического динамо, возникающая в рамках планарного приближения, довольно широко используется в ходе теоретических исследований [9, 10], однако ее адекватность конкретным физическим задачам все же не беспредельна. В самом деле, как уже отмечалось, механизм галактического динамо обусловлен переходом кинетической энергии турбулентных движений межзвездного газа в энергию магнитного поля. С физической точки зрения это означает, что как только эти энергии станут сопоставимы, рост поля должен замедляться. Чтобы учесть данное обстоятельство, в модель вводят нелинейность, а именно: заменяют коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, его нелинейной модификацией (см., например, [15]):

$$R_\alpha = R_{\alpha_0} \left( 1 - \frac{B_r^2 + B_\varphi^2}{B^{*2}} \right).$$

Здесь  $B^*$  — магнитное поле, соответствующее равномерному распределению энергии между турбулентными движениями и крупномасштабным полем галактики (далее для удобства мы измеряем поле в единицах  $B^*$ ). В результате такой замены система (3) примет вид

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_{\alpha_0} B_\varphi (1 - B_r^2 - B_\varphi^2) - k B_r, \quad \frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - k B_\varphi. \quad (4)$$

В заключение этого раздела кратко остановимся на модели случайного коэффициента  $k$ , в рамках которой мы проводим численное исследование системы (4). Выбор этой модели продиктован следующими физическими соображениями. Во-первых, она должна учитывать то, что в галактике области интенсивного звездообразования и других активных процессов (т.е. “сгустки” ионизованного водорода) расположены случайным образом и существуют в течение сравнительно недолгого времени. Исходя из этой базовой предпосылки, мы выбираем для описания коэффициента турбулентной диффузии модель случайного процесса с обновлением, который имеет малое, но конечное время памяти. Во-вторых, кроме высокотемпературных областей ионизованного водорода, в галактиках присутствуют “спокойные” области, в которых основную роль играет атомарный водород. Исходя из данного соображения, мы далее полагаем, что на каждом из интервалов обновления величина турбулентной диффузии принимает с определенной вероятностью  $p$  одно из двух возможных значений (см. ниже). Первое из них соответствует области ионизованного водорода, а второе — области атомарного. При этом значение вероятности характеризует интенсивность звездообразования и прочих процессов, вызывающих неоднородность. Как показано в работе [18], величина  $p$  связана с интенсивностью звездообразования по закону  $p = 12\Sigma$ , где  $\Sigma$  — поверхностная плотность звездообразования, измеряемая в единицах  $M_{\text{Sun}}/\text{кпк}^2 \cdot \text{год}$ .

**4. Численный эксперимент.** Итак, в рамках нашей модели коэффициент  $k$  полагается случайным процессом с обновлением. Приведем конструктивное описание такого процесса.

Пусть полупрямая  $t \geq 0$  разбита на равные отрезки длины  $\delta$  (корреляционная длина, которая используется в качестве единицы длины, сам же отрезок принято называть интервалом обновления). Далее, пусть процесс  $k(t)$  теряет память точно в точках  $t_n = n \cdot \delta$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Это означает, что величины  $k_n$  на полусегментах  $[0; \delta), \dots, [n\delta; (n+1)\delta)$  предполагаются статистически независимыми и имеющими одинаковые статистические характеристики (а именно: среднее значение, дисперсию, корреляционную функцию и др.). Кроме того, предполагается статистическая независимость точек обновления от всех процессов  $k_n(t)$ . Это и есть модель процесса с обновлением. Из-за фиксированных точек обновления такой процесс ста-

статистически неоднороден (в масштабах, сопоставимых с  $\delta$ ) и его корреляционная функция  $\langle k(t_1)k(t_2) \rangle$  зависит от обеих точек  $t_1$  и  $t_2$ .

В рамках численного эксперимента мы для определенности считаем, что процесс  $k$  является кусочно-постоянной случайной функцией, которая принимает с определенной вероятностью одно из двух заданных значений (как уже отмечалось выше, первое из этих значений соответствует области ионизованного водорода, а второе — области атомарного). Следуя работам [15] и [19], мы полагаем, что на каждом интервале обновления

$$k = \begin{cases} 7.5 & \text{с вероятностью } p, \\ 2.5 & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

При численном решении системы (4) мы взяли в качестве интервала обновления величину  $\delta = 0.1$ . При переходе к “размерным” единицам такое значение соответствует временным масштабам порядка  $10^7$  лет, что близко к характерному времени существования “горячих” областей ионизованного водорода в галактике. Далее, используя стандартный генератор случайных чисел, встроенный в среду программирования C++, мы строим решения системы (4), после чего проводим усреднения по соответствующим объемам выборки независимых случайных реализаций магнитного поля. Перейдем непосредственно к результатам.

Прежде всего, мы исследовали поведение статистических моментов поля

$$\sqrt[m]{\langle B(t)^m \rangle}$$

при фиксированном объеме выборки, но при разных значениях вероятности  $p$ , характеризующей интенсивность процессов, вызывающих неоднородность. Напомним, что ранее, в контексте изучения линейной модели (3), варьированием этого параметра численно удалось подтвердить пороговый характер эволюции крупномасштабного магнитного поля [15]. Как оказалось, аналогичным образом обстоит дело и в нелинейной модели (4) с той лишь разницей, что при малых  $p$  магнитное поле, приближаясь к равновесному значению, начинает совершать колебания в его окрестности, и неограниченный рост моментов прекращается. На рис. 1 представлены соответствующие результаты для среднего поля, полученные усреднением  $10^4$  его независимых реализаций (поведение моментов более высоких порядков при разных  $p$  полностью аналогично, поэтому отдельных графиков для них мы здесь не приводим).

Отдельного внимания заслуживает рассмотрение поведения статистических моментов магнитного поля при малых значениях напряженности, когда само поле еще не вышло на равновесное значение, см. рис. 2 и рис. 3. Видно, что в этом случае картина примерно такая же, как и в линейной модели [17]: при малых  $p$  моменты растут (рис. 2), причем скорость экспоненциального роста  $m$ -го момента

$$\gamma_m = \frac{\ln \sqrt[m]{\langle B(t)^m \rangle}}{t}$$

тем больше, чем больше его порядковый номер  $m$  (эффект перемержаемости, связанный с появлением в выборке очень редких, но при этом аномально быстро растущих реализаций решения, наличие которых, однако, и вносит решающий вклад в формирование его среднего и моментов высших порядков [1, 20]). Мы также проверили, что увеличение объема выборки, по которому проводится усреднение, систематически приводит к увеличению длины участка экспоненциального роста данного момента (на рис. 2 точками на графиках отмечены участки этого роста). Количественные данные о характеристиках роста моментов для значения вероятности  $p = 0.1$  приведены в табл. 1. Здесь  $N$  — размер выборки,  $h_m$  и  $\gamma_m$  — длина участка и скорость роста соответственно  $m$ -го статистического момента ( $m = 1, 2, 3$ ). В этой таблице проверена также устойчивость результата по отношению к изменению объема выборки  $N$ .

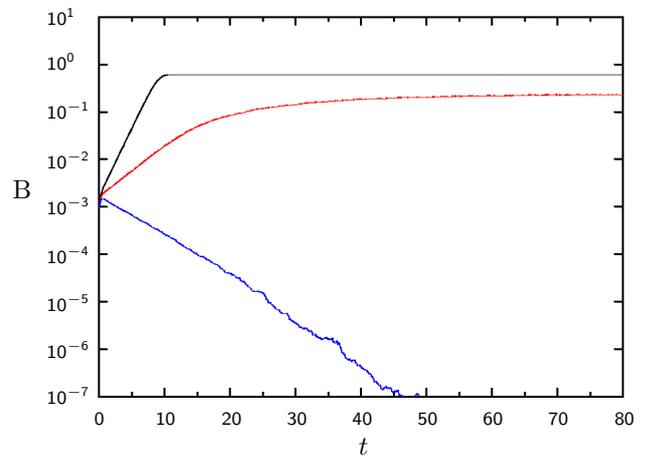


Рис. 1. Зависимость среднего поля от времени для различных значений вероятности  $p$ . Черный цвет соответствует  $p = 0.0$ , красный —  $p = 0.1$ , синий —  $p = 0.2$

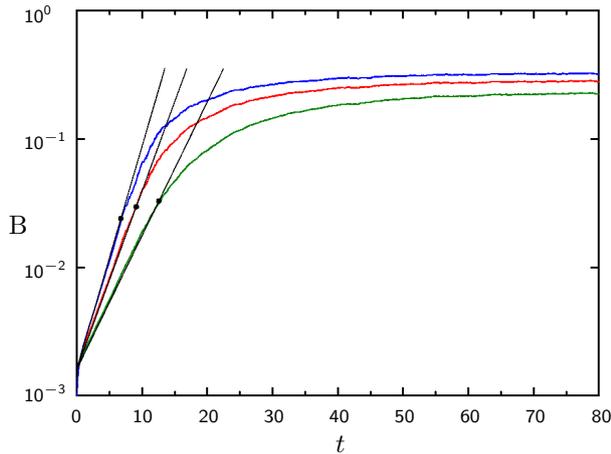


Рис. 2. Статистические моменты магнитного поля при  $p = 0.1$ . Зеленым цветом показано среднее решение, красным — среднеквадратичное, синим — момент третьего порядка

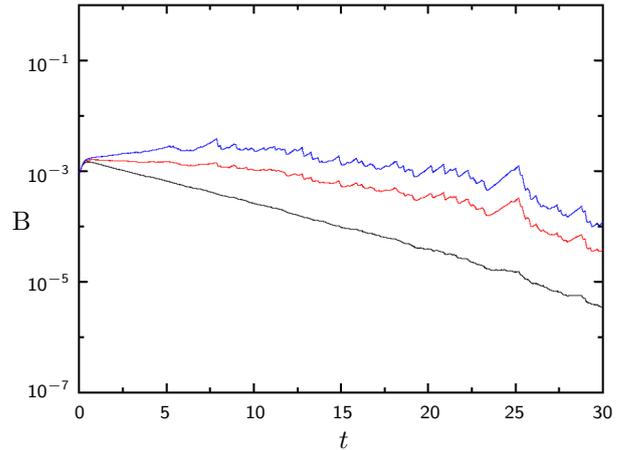


Рис. 3. Статистические моменты магнитного поля при  $p = 0.2$ . Черным цветом показано среднее решение, красным — среднеквадратичное, синим — момент третьего порядка

Таблица 1

Основные характеристики роста статистических моментов магнитного поля для выборки размера  $N$

$N$	Длина участка роста			Скорости роста		
	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
$10^3$	8.1	6.7	5.3	0.117	0.183	0.186
$10^4$	14.2	13.1	11.7	0.179	0.183	0.187
$5 \cdot 10^4$	16.3	14.8	13.5	0.179	0.184	0.187

Таблица 2

Время выхода на стабилизацию  $m$ -го статистического момента магнитного поля для выборки размера  $N$

$N$	Время выхода		
	$t_1$	$t_2$	$t_3$
$10^3$	38	70	80
$10^4$	42	72	82
$5 \cdot 10^4$	40	72	80

Мы также рассмотрели вопрос о том, как влияет изменение объема выборки на время выхода моментов на стабилизацию (при фиксированном значении вероятности  $p$ ). Как оказалось, это время примерно одинаково для разных объемов выборки, хотя и несколько растет с увеличением порядкового номера момента. На рис. 4 приведены графики для среднего поля, полученные усреднением  $10^3$  и  $10^4$  реализаций соответственно. Видно, что выход на стабилизацию наступает примерно при значении  $t = 40$ . Отметим, что поскольку поле, приближаясь к равновесному значению, начинает совершать колебания в его окрестности [15], то увеличение объема выборки систематически приводит к более “гладким” графикам, что тоже наглядно видно из рис. 4 (аналогично ведут себя и старшие моменты). Более подробные результаты, характеризующие зависимость времени выхода на стабилизацию  $t_m$  момента  $m$ -го порядка от размера выборки  $N$ , представлены в табл. 2 (бралось значение вероятности  $p = 0.1$ ).

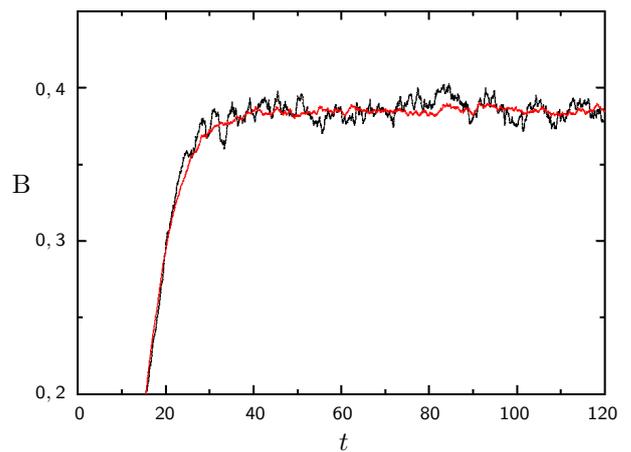


Рис. 4. Зависимость среднего поля от времени при  $p = 0.1$ . Черный цвет соответствует объему выборки  $N = 10^3$ , красный —  $N = 10^4$  независимых реализаций

**5. Заключение.** Итак, мы рассмотрели нелинейную модификацию задачи галактического динамо, в рамках которой величина турбулентной вязкости с определенной вероятностью  $p$  принимает одно из двух возможных значений. При этом в качестве соответствующих коэффициентов брались кусочно-постоянные случайные функции с конечным временем памяти, которое близко к характерному времени существования “горячих” областей ионизованного водорода в галактике. Проведенное исследование показало, что при малой интенсивности процессов, вызывающих неоднородность ( $p = 0.1$ ), статистические моменты магнитного поля на начальных стадиях ведут себя так же, как и в линейном случае (а именно демонстрируют прогрессивный рост, который по мере приближения поля к равновесному значению сменяется стабилизацией). С другой стороны, как и в линейном случае, при больших значениях  $p$  происходит разрушение крупномасштабных структур, и рост поля и его моментов сменяется затуханием.

Полученные результаты интересно сравнить с результатами, полученными ранее при моделировании нелинейного режима в рамках лагранжева подхода [21], суть которого, как и суть концепции планарного приближения, состоит в переходе от уравнений в частных производных к уравнениям с обыкновенными производными (делается это за счет выбора системы отсчета, движущейся вместе со средой, и отбрасывания членов со вторыми производными [22]). Как и в настоящей статье, в [21] выбиралась нелинейность квадратичного типа, а на начальном (линейном) режиме статистические моменты также демонстрировали прогрессивный рост. Однако принципиальным отличием оказывается то, что в рамках лагранжева подхода не удается обнаружить выход нелинейного режима на стационарное финальное распределение (моменты продолжают расти, хотя и не так быстро, как на начальном этапе [21]). Конечно, только лишь из этого обстоятельства рискованно делать вывод о том, что планарное приближение более адекватно с физической точки зрения реальным задачам, нежели лагранжев подход (в контексте упрощения моделей путем замены в уравнениях частных производных обычными). По-видимому, вопрос о соотношении различных приближений, их физической целесообразности и выборе наилучшего с точки зрения численного моделирования еще не раз возникнет в дальнейшем и потребует более глубокого и пристального анализа.

Авторы благодарны Д. Д. Соколову за полезные обсуждения при подготовке статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-32-00124).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zel'dovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. The Almighty chance. Singapore: World Scientific, 1991.
2. Грачев Д.А. Тензорный подход к проблеме усреднения дифференциальных уравнений с  $\delta$ -коррелированными случайными коэффициентами // Математические заметки. 2010. **87**, № 3. 359–368.
3. Шапиро В.Е., Логинов В.М. Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск: Наука, 1983.
4. Фурсиков А.В. Проблема замыкания цепочек моментных уравнений, соответствующих трехмерной системе уравнений Навье–Стокса в случае больших чисел Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1991. **319**, № 1. 83–87.
5. Фурсиков А.В. Моментная теория для уравнений Навье–Стокса со случайной правой частью // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. **56**, № 6. 1273–1315.
6. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
7. Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D. Galactic magnetism: recent development and perspectives // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1996. **34**. 155–206.
8. Krause F., Raedler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Oxford: Pergamon Press, 1980.
9. Moss D. On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1995. **275**, N 1. 191–194.
10. Phillips A. A Comparison of the asymptotic and no-z approximations for galactic dynamos // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2001. **94**, N 1–2. 135–150.
11. Arshakian T.G., Beck R., Krause M., Sokoloff D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the square kilometre array // Astron. Astrophys. 2009. **494**, N 1. 21–32.
12. Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Ефремов Ю.Н. Темп звездообразования и магнитные поля спиральных галактик // Письма в астрономический журнал. 2012. **38**, № 9. 611–616.
13. Proctor M.R.E. Effects of fluctuation on  $\alpha\Omega$  dynamo models // Mon. Not. R. Astron. Soc.: Lett. 2007. **382**, N 1. L39–L42.
14. Richardson K.J., Proctor M.R.E. Fluctuating  $\alpha\Omega$  dynamos by iterated matrices // Mon. Not. R. Astron. Soc.: Lett. 2012. **422**, N 1. L53–L56.
15. Михайлов Е.А., Пушкарев В.В. Флуктуации коэффициента турбулентной диффузии в уравнениях галактического динамо // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 447–454.
16. Mikhailov E.A., Grachev D.A. Galaxy dynamo in inhomogeneous interstellar medium // Communications of the Byurakan Astrophysical Observatory. 2018. **65**, N 2. 346–352.

17. Грачев Д.А., Елистратов С.А., Михайлов Е.А. Статистические моменты и многоточечные корреляторы магнитного поля в модели галактического динамо со случайной турбулентной диффузией // Вычислительные методы и программирование. 2019. **20**. 88–96.
18. Михайлов Е.А. Звездообразование и модель галактического динамо с потоками спиральности // Письма в астрономический журнал. 2014. **40**, N 7. 445–453.
19. Михайлов Е.А., Пушкарев В.В. Влияние звездообразования на крупномасштабные структуры галактического магнитного поля // Астрофизический бюллетень. 2018. **73**, № 4. 451–456.
20. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде // Успехи физических наук. 1987. **152**, № 1. 3–32.
21. Грачев Д.А., Жданов А.Г. Моделирование нелинейного режима для лагранжевых решений некоторых стохастических эволюционных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. **52**, № 10. 1890–1903.
22. Грачев Д.А., Михайлов Е.А. Численное моделирование двухточечного коррелятора для лагранжевых решений некоторых эволюционных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 277–283.

Поступила в редакцию  
27 февраля 2020

---

## Numerical Modeling of Statistical Moments in a Galactic Dynamo Problem with Nonlinearity

D. A. Grachev<sup>1</sup> and S. A. Elistratov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: dengrac@mail.ru*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Student, e-mail: invsbl\_mn@mail.ru*

Received February 27, 2020

**Abstract:** In this paper we consider a nonlinear modification of a stochastic model of the galactic dynamo in which the coefficient of turbulent diffusion is assumed to be a random process with renewal. It is shown that, in the case of small magnetic field strength, its statistical moments behave almost in the same manner as in the linear model; it is also shown that the intermittency effect exists. The characteristic time periods of moment stabilization are estimated when the magnetic field approaches its equilibrium. The numerical results obtained by averaging various samplings of its independent random implementations are compared.

**Keywords:** galactic dynamo, magnetic field, equations with random coefficients, statistical moment.

### References

1. Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *The Almighty Chance* (World Scientific, Singapore, 1990).
2. D. A. Grachev, "Tensor Approach to the Problem of Averaging Differential Equations with  $\delta$ -Correlated Random Coefficients," *Mat. Zametki* **87** (3), 359–368 (2010) [*Math. Notes* **87** (3–4), 336–344 (2010)].
3. V. E. Shapiro and V. M. Loginov, *Dynamical Systems under Random Actions* (Novosibirsk, Nauka, 1983) [in Russian].
4. A. V. Fursikov, "The Problem of Closure of the Chains of Moment Equations Corresponding to the Three-Dimensional Navier–Stokes System in the Case of Large Reynolds Numbers," *Dokl. Akad. Nauk* **319** (1), 83–87 (1991) [*Dokl. Math.* **44** (1), 80–85 (1992)].
5. A. V. Fursikov, "Moment Theory for the Navier–Stokes Equations with a Random Right Side," *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* **56** (6), 1273–1315 (1992) [*Izv. Math.* **41** (3), 515–555 (1993)].
6. V. I. Klyatskin, *Stochastic Equations through the Eye of the Physicist* (Fizmatlit, Moscow, 2001).

7. R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, et al., “Galactic Magnetism: Recent Development and Perspectives,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 155–206 (1996).
8. F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Pergamon Press, Oxford, 1980).
9. D. Moss, “On the Generation of Bisymmetric Magnetic Field Structures in Spiral Galaxies by Tidal Interactions,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275** (1), 191–194 (1995).
10. A. Phillips, “A Comparison of the Asymptotic and no- $z$  Approximations for Galactic Dynamos,” *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **94** (1–2), 135–150 (2001).
11. T. G. Arshakian, R. Beck, M. Krause, and D. Sokoloff, “Evolution of Magnetic Fields in Galaxies and Future Observational Tests with the Square Kilometre Array,” *Astron. Astrophys.* **494** (1), 21–32 (2009).
12. E. A. Mikhailov, D. D. Sokoloff, and Yu. N. Efremov, “Star Formation Rate and Magnetic Fields in Spiral Galaxies,” *Pis'ma Astron. Zh.* **38** (9), 611–616 (2012) [*Astron. Lett.* **38** (9), 543–548 (2012)].
13. M. R. E. Proctor, “Effects of fluctuation on  $\alpha\Omega$  dynamo models,” *Month. Not. R. Astron. Soc.: Lett.* **382** (1), L39–L42 (2007).
14. K. J. Richardson and M. R. E. Proctor, “Fluctuating  $\alpha\Omega$  Dynamos by Iterated Matrices,” *Month. Not. R. Astron. Soc.: Lett.* **422** (1), L53–L56 (2012).
15. E. A. Mikhailov and V. V. Pushkarev, “Fluctuations of the Turbulent Diffusion Coefficient in Galaxy Dynamo Equations,” *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 447–454 (2016).
16. E. A. Mikhailov and D. A. Grachev, “Galaxy Dynamo in Inhomogeneous Interstellar Medium,” *Communications of the Byurakan Astrophysical Observator* **65** (2), 346–352 (2018).
17. D. A. Grachev, S. A. Elistratov, and E. A. Mikhailov, “Statistical Moments and Multipoint Magnetic Field Correlators in a Galactic Dynamo Model with Random Turbulent Diffusion,” *Vychisl. Metody Programm.* **20**, 88–96 (2019).
18. E. A. Mikhailov, “Star Formation and Galactic Dynamo Model with Helicity Fluxes,” *Pis'ma Astron. Zh.* **40** (7), 445–453 (2014) [*Astron. Lett.* **40** (7), 398–405 (2014)].
19. E. A. Mikhailov and V. V. Pushkarev, “Influence of Star Formation on Large Scale Structures of Galactic Magnetic Fields,” *Astrofiz. Byull.* **73** (4), 451–456 (2018) [*Astrophys. Bull.* **73** (4), 425–429 (2018)].
20. Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, “Intermittency in Random Media,” *Usp. Fiz. Nauk* **152** (1), 3–32 (1987) [*Sov. Phys. Usp.* **30** (5), 353–369 (1987)].
21. D. A. Grachev and A. G. Zhdanov, “Simulation of the Nonlinear Regime for the Lagrangian Solutions of Some Stochastic Evolutionary Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **52** (10), 1890–1903 (2012).
22. D. A. Grachev and E. A. Mikhailov, “Numerical Modeling of a Two-Point Correlator for the Lagrange Solutions of Some Evolution Equations,” *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 277–283 (2017).