

УДК 532.529

doi 10.26089/NumMet.v21r319

ВЛИЯНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ОБЛАКОМ ЧАСТИЦ

К. Н. Волков¹, В. Н. Емельянов², А. Г. Карпенко³, И. В. Тетерина⁴

В рамках статистического подхода, основанного на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности распределения скорости и температуры частиц, построена континуальная модель, описывающая псевдотурбулентные течения дисперсной фазы. Введение функции плотности вероятности позволяет получить статистическое описание ансамбля частиц вместо динамического описания отдельных частиц на основе уравнений движения и теплопереноса типа Ланжевена. На основе уравнений для первых и вторых моментов дисперсной фазы проводится численное моделирование нестационарного течения газозвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны с облаком частиц. Основные уравнения имеют гиперболический тип, записываются в консервативной форме и решаются с использованием численного метода типа Годунова повышенного порядка точности. Обсуждается влияние двумерных эффектов на формирование ударно-волновой структуры течения и пространственно-временные зависимости концентрации частиц и других параметров потока.

Ключевые слова: двухфазное течение, численное моделирование, ударная волна, частица, концентрация, облако частиц.

1. Введение. Задачи, связанные с формированием облаков частиц, подъемом пыли за проходящими ударными волнами, воспламенением частиц в высокоскоростных и высокотемпературных потоках, имеют важное практическое значение [1, 2]. Характерные особенности ударно-волновых процессов (большие динамические нагрузки, высокие скорости протекания, сложные волновые картины течений, резкие изменения характеристик потока во времени и пространстве, широкий спектр характерных временных и пространственных масштабов), делают затруднительным их изучение методами экспериментального наблюдения. При этом информация, полученная из данных экспериментов, не является исчерпывающей и требует последующего теоретического анализа, подкрепленного численными расчетами. Вычислительные технологии позволяют получать и визуализировать детальные двух- и трехмерные картины течений, выявлять как локальные особенности, так и интегральные характеристики протекающих процессов [3].

При движении ударной волны по слою частиц формируются вихревые структуры, похожие на те, что возникают при взаимодействии скользящих ударных волн с термальным или жидким слоями [4]. При этом наблюдается развитие неустойчивости поверхности слоя и возникновение вихревых структур, приводящих к подъему вещества из слоя и перемешиванию газов. Математические вопросы, связанные с моделированием двухфазных течений и постановкой задачи Коши для основных уравнений, обсуждаются в работах [5–7].

В работах [8, 9] численно моделируется двумерное течение за проходящей ударной волной в области, заполненной нерегулярно расположенными неподвижными цилиндрами. Рассматриваемая конфигурация качественно соответствует плотной пылевой пелене, исследуемой в экспериментальной работе [10]. Об-

¹ Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; вед. науч. сотр., e-mail: dsci@mail.ru

² Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; профессор, e-mail: vlademelyanov@gmail.com;

³ Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Петродворец, Университетский просп., д. 28, 198504, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: aspera.2003.ru@mail.ru

⁴ Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: yaiv@mail.ru

емная доля дисперсной фазы составляет 0.15, что не допускает использование модели точечных частиц, применимой к разреженным облакам частиц, когда влиянием частиц друг на друга пренебрегается [11]. Результаты, полученные после усреднения по поперечному сечению, сравниваются с одномерной моделью для демонстрации того, что одномерная модель хотя и хорошо воспроизводит общее поведение стационарного потока, но не описывает существенные нестационарные эффекты в облаке и в области за ним.

Когда падающая ударная волна достигает переднего края облака и начинает проникать в него, образуется отраженная волна, распространяющаяся в обратную от падающей ударной волны сторону, и прошедшая ударная волна, движущаяся в том же направлении. За прошедшей волной внутри облака формируется также веер волн разрежения. В момент выхода прошедшей ударной волны из облака в нем возникает еще один веер волн разрежения, а из облака вместе в прошедшей волной выходит контактный разрыв, отделяющий прошедшую волну от волн разрежения [8, 9]. Со временем в облаке формируется постоянный градиент давления.

Двумерные расчеты на основе лагранжевого подхода к описанию дисперсной фазы проводятся в работах [12, 13]. Исследуется взаимодействие ударной волны с облаками частиц, имеющими различную форму в начальный момент времени. Начальная концентрация частиц в облаке полагается равной 0.04%. Континуальное описание газовой и дисперсной фаз применяется в работах [14, 15] для двумерных расчетов и в работах [16, 17] — для трехмерного моделирования. В работе [18] трехмерные расчеты проводятся для различных чисел Маха падающей ударной волны (в диапазоне 2.2–3), объемной концентрации частиц (в диапазоне 0.05–0.1) и их размеров (в диапазоне 50–100 мкм). Полученные результаты показывают, что рейнольдсовы напряжения играют важную роль в балансе слагаемых в уравнении изменения количества движения на границе облака и оказывают существенное влияние на интенсивность отраженной ударной волны. Величина рейнольдсовых напряжений в существенной степени зависит от концентрации частиц и слабо зависит от их размера.

В экспериментальной работе [19] исследуются характеристики прошедшей и отраженной ударных волн, возникающих в результате прохождения по ударной трубе ударной волны через слой твердых частиц. Варьируется число Маха падающей волны, толщина засыпки L , проницаемость засыпки S , диаметр частиц D . Результаты измерений обработаны в виде зависимостей интенсивности прошедшей и отраженной ударных волн от безразмерного комплекса $\theta = 1.75(1 - S)L/(SD)$, характеризующего проницаемость слоя частиц, для различных чисел Маха падающей ударной волны.

В одномерных расчетах наблюдается отсутствие “полки” по давлению в отраженной волне, что связано с вкладом возмущений, отраженных от частиц вниз по потоку [20]. В расчетах наблюдается “провал” на распределении давления на правой границе облака, который присутствует в двумерном расчете и менее выражен в одномерном. Данный двумерный эффект связан с напряжениями Рейнольдса внутри облака частиц и в турбулентном следе, и для его устранения в работе [9] вводится специальный член в правую часть одномерной системы уравнений. В исследовании [21] показано, что при одинаковой интенсивности падающей ударной волны (число Маха 1.5) система из сфер ослабляет ударную волну сильнее, чем система из цилиндров аналогичного диаметра и одинаково расположенных.

При моделировании движения частиц в разреженной дисперсной среде (при небольшой объемной концентрации дисперсной фазы) основное внимание уделяется взаимодействию частиц с турбулентными вихрями несущего потока, поскольку роль взаимодействия частиц между собой незначительна. С повышением концентрации и размера частиц возрастает вклад межчастичных взаимодействий в перенос импульса и энергии дисперсной фазы. Хаотическое движение частиц, обусловленное их взаимодействием, получило название псевдотурбулентности (чтобы отличить от турбулентного движения частиц, связанного с их вовлечением в турбулентное движение несущего потока). Причиной возникновения псевдотурбулентных флуктуаций является как гидродинамическое взаимодействие между частицами, реализуемое посредством обмена импульсом и энергией со случайными полями скорости и давления окружающей среды, так и непосредственное взаимодействие частиц в результате столкновений. С ростом концентрации и размера частиц роль обмена импульсом и энергией между частицами в результате столкновений по сравнению с гидродинамическим взаимодействием возрастает. В концентрированных дисперсных средах определяющую роль в формировании статистических свойств системы играют межчастичные столкновения.

Флуктуации в дисперсной фазе определяются как отклонения от средней скорости и не являются турбулентными флуктуациями. Характеристики псевдо-турбулентности в дисперсной фазе (временные и пространственные масштабы) в существенной степени отличаются от характеристик турбулентности несущего потока [22, 23].

В настоящей статье развивается модель, предложенная в работе [24] и развитая в работе [25], которая предназначена для численного моделирования нестационарных течений газа с инертными частицами.

Введение функции плотности вероятности позволяет сформулировать статистическое описание системы частиц вместо динамического описания отдельных частиц на основе стохастического уравнения типа Ланжевена. Уравнения неразрывности, изменения количества движения и энергии для газовой и дисперсной фаз имеют гиперболический тип и решаются с использованием численного метода типа Годунова повышенного порядка точности. Проводится расчет структуры течения и пространственно-временных зависимостей параметров потока при взаимодействии сверхзвукового потока со слоем частиц. Результаты расчетов сравниваются данными, полученными для одномерной постановки задачи.

2. Математическая модель. Уравнения движения и теплообмена пробной частицы представляют собой стохастические уравнения типа Ланжевена и зависят от случайных полей скорости и температуры несущего потока, причем скорость и температура несущего газа вычисляются в точках, лежащих на траектории частицы [25].

Статистический подход, основанный на кинетическом уравнении для плотности вероятности распределений скоростей, температур и других представляющих интерес характеристик частиц, является наиболее последовательным методом построения континуальных моделей, описывающих псевдотурбулентные течения дисперсной среды. Введение PDF (Probability Density Function) позволяет получить статистическое описание ансамбля частиц вместо динамического описания отдельных частиц на основе уравнений движения и теплопереноса типа Ланжевена [25]. При статистическом моделировании происходит некоторая потеря информации в отношении индивидуальных особенностей поведения отдельных частиц. Однако неполнота динамической информации о поведении отдельных частиц компенсируется увеличением информации о статистических закономерностях движения и теплообмена коллектива частиц (дисперсной фазы в целом).

Оператор осреднения (spatial filtering operator) определяется соотношением

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int f(\boldsymbol{\xi}) H_{\Delta}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

где \bar{f} — среднее значение функции f , H_{Δ} — фильтр (kernel function). Ядро является неотрицательным и удовлетворяет условию нормировки. Ширина фильтра Δ выбирается достаточно малой и такой, чтобы для газовой фазы выполнялось соотношение $\tilde{\mathbf{v}}_g = \mathbf{v}_g$.

Средняя числовая концентрация $\tilde{\alpha}$ (particle number density), средняя скорость \tilde{v}_i и средняя температура $\tilde{\vartheta}$ дисперсной фазы находятся из соотношений

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \int \bar{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, t) dv d\vartheta; \quad \tilde{v}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha} \int v_i \bar{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, t) dv d\vartheta; \quad \tilde{\vartheta}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha} \int \vartheta \bar{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, t) dv d\vartheta.$$

Здесь \bar{W} — средняя плотность распределения вероятности состояний системы.

Уравнения, описывающие движение и теплообмен дисперсной фазы, получаются из уравнения Лиувилля для функции плотности вероятности распределения частиц по координатам, скоростям и температурам. Уравнение Лиувилля позволяет получить уравнения для первых и вторых моментов дисперсной фазы.

Моменты 1-го порядка представляют собой средние значения газодинамических параметров потока, зависящие от положения пространственно-временной точки. Уравнения для первых моментов имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{v}_i}{\partial x_i} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{v}_j \tilde{v}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\tau_v} \tilde{\alpha} (u_i - \tilde{v}_i); \tag{2}$$

$$\frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{\vartheta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha} \tilde{\vartheta} \tilde{v}_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\tau_{\vartheta}} \tilde{\alpha} (T - \tilde{\vartheta}). \tag{3}$$

Здесь $\tau_v = \rho_p d_p^2 / (18\mu)$ — время динамической релаксации, $\tau_{\vartheta} = c_p \rho_p d_p / (3\lambda \text{Nu}_p)$ — время тепловой релаксации, причем $\tau_{\vartheta} = (3\text{Pr}\beta / \text{Nu}_p) \tau_v$, где $\beta = c_p^m / c_p$ — отношение удельной теплоемкости дисперсной фазы к удельной теплоемкости газа при постоянном давлении (ρ — плотность, μ — динамическая вязкость).

Одноточечные корреляционные моменты 2-го порядка определяют кинетическую энергию турбулентности, перенос количества движения и тепла дисперсной фазы. Двухточечные моменты 2-го порядка характеризуют спектр турбулентности и размер крупномасштабных турбулентных вихрей, позволяя

судить о корреляции пульсаций различных величин в удаленных на разные расстояния друг от друга пространственно-временных точках. Уравнения для вторых моментов имеют вид

$$\frac{\partial \widetilde{\alpha \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\alpha \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j v_k}}{\partial x_k} = \frac{1}{\tau_v} \widetilde{\alpha} (u_i \widetilde{v}_j + \widetilde{v}_i u_j - 2 \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j); \quad (4)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\alpha \vartheta v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\alpha \vartheta v_i v_k}}{\partial x_k} = \frac{1}{\tau_v} \widetilde{\alpha} (\vartheta u_i - \widetilde{\vartheta v}_j) + \frac{1}{\tau_\vartheta} \widetilde{\alpha} (T \widetilde{v}_i - \widetilde{\vartheta v}_j). \quad (5)$$

Компоненты тензора подсеточных напряжений и компоненты вектора подсеточного теплового потока имеют вид

$$\sigma_{ij} = \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_j, \quad q_i = \widetilde{\vartheta v}_i - \widetilde{\vartheta v}_i.$$

Одноточечные моменты 3-го порядка описывают диффузию турбулентности, а двухточечные моменты 3-го порядка — перераспределение энергии по спектру турбулентности. Уравнения для третьих моментов заменяются алгебраическими соотношениями [26]

$$\widetilde{v_i v_j v_k} = \widetilde{v_j v_k v_i} + \widetilde{v_i v_j v_k} + \widetilde{v_i v_k v_j} - 2 \widetilde{v_i v_j v_k}; \quad (6)$$

$$\widetilde{\vartheta v_i v_k} = \widetilde{\vartheta v_k v_i} + \widetilde{\vartheta v_i v_k} + \widetilde{v_i v_k \vartheta} - 2 \widetilde{v_i v_k \vartheta}. \quad (7)$$

Соотношения (6) и (7) позволяют получить замкнутую формулировку задачи.

Движение и теплообмен дисперсной фазы описываются уравнениями (1)–(3) для переменных $\widetilde{\alpha}$, \widetilde{v}_i и $\widetilde{\vartheta}$, а также уравнениями (4) и (5) для переменных $\widetilde{v_i v_j}$ и $\widetilde{\vartheta v_i}$.

3. Двумерная модель. Рассмотрим уравнения, описывающие двумерное течение невязкого сжимаемого газа с частицами. Действие вязких сил учитывается лишь при взаимодействии газа с частицами. Индексы g и p соответствуют газу и частицам.

3.1. Газ. Уравнение, описывающее нестационарное течение невязкого сжимаемого газа, в консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_g}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_g}{\partial y} = \mathbf{S}_g. \quad (8)$$

Уравнение состояния идеального газа записывается в виде $p = \rho RT$.

Уравнение (8) дополняется соотношением, позволяющим вычислить удельную полную энергию:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2).$$

Вектор консервативных переменных \mathbf{Q}_g и векторы потоков \mathbf{F}_g и \mathbf{G}_g имеют вид

$$\mathbf{Q}_g = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1 u_1 + p \\ \rho u_1 u_2 \\ (E + p) u_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_g = \begin{bmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_2 u_2 + p \\ (E + p) u_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь t — время, x и y — пространственные координаты, ρ — плотность, u_1 и u_2 — компоненты скорости в направлении осей x и y , p — давление, T — температура, E — удельная полная энергия, R — газовая постоянная, γ — отношение удельных теплоемкостей.

В безразмерных переменных полагается, что $R = 1/\gamma$ и $\mu = 1/\text{Re}$.

Уравнение (8) записывается в линеаризованной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial t} + A_g \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial x} + B_g \frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial y} = \mathbf{S}_g, \quad (9)$$

где $A_g = \partial \mathbf{F}_g / \partial \mathbf{Q}_g$ и $B_g = \partial \mathbf{G}_g / \partial \mathbf{Q}_g$ — якобианы. В физических переменных якобианы имеют вид

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} [(\gamma - 3)u_1^2 + (\gamma - 1)u_2^2] & (3 - \gamma)u_1 & -(\gamma - 1)u_2 & \gamma - 1 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 \\ -\gamma u_1 E + (\gamma - 1)u_1(u_1^2 + u_2^2) & \gamma E - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(3u_1^2 + u_2^2) & -(\gamma - 1)u_1 u_2 & \gamma u_1 \end{bmatrix},$$

$$B_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 \\ \frac{1}{2} [(\gamma - 1)u_1^2 + (\gamma - 3)u_2^2] & -(\gamma - 1)u_1 & (3 - \gamma)u_2 & \gamma - 1 \\ -\gamma u_2 E + (\gamma - 1)u_2(u_1^2 + u_2^2) & -(\gamma - 1)u_1 u_2 & \gamma E - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(u_1^2 + 3u_2^2) & \gamma u_2 \end{bmatrix}.$$

Якобиан A_g представляется в виде $A_g = R_g \Lambda_g L_g$, где Λ_g — диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные значения якобиана, L_g и R_g — матрицы, состоящие из левых и правых собственных векторов якобиана, причем $L_g = R_g^{-1}$. Якобиан имеет четыре вещественных собственных значения

$$\lambda_1 = u_1 - c, \quad \lambda_2 = u_1, \quad \lambda_3 = u_1, \quad \lambda_4 = u_1 + c.$$

Правые собственные векторы якобиана имеют вид

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 - c \\ u_2 \\ H - u_1 c \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad r_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 + c \\ u_2 \\ H + u_1 c \end{bmatrix}.$$

Якобиан B_g представляется в виде $B_g = R_g \Lambda_g L_g$, где Λ_g — диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные значения якобиана, L_g и R_g — матрицы, состоящие из левых и правых собственных векторов якобиана, причем $L_g = R_g^{-1}$. Якобиан имеет четыре вещественных собственных значения

$$\lambda_1 = u_2 - c, \quad \lambda_2 = u_2, \quad \lambda_3 = u_2, \quad \lambda_4 = u_2 + c.$$

Правые собственные векторы якобиана имеют вид

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 - c \\ H - u_2 c \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad r_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 + c \\ H + u_2 c \end{bmatrix}.$$

Источниковый член в уравнении (8) учитывает межфазный обмен импульсом и теплом:

$$\mathbf{S}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p \tilde{\alpha} (\tilde{v}_1 - u_1) / \tau_v \\ m_p \tilde{\alpha} (\tilde{v}_2 - u_2) / \tau_v \\ \beta m_p \tilde{\alpha} (\tilde{\vartheta} - T) / \tau_\vartheta + m_p \tilde{\alpha} (\sigma_{11} + \tilde{v}_1 \tilde{v}_1 - u_1 \tilde{v}_1) / \tau_\vartheta + m_p \tilde{\alpha} (\sigma_{22} + \tilde{v}_2 \tilde{v}_2 - u_2 \tilde{v}_2) / \tau_\vartheta \end{bmatrix}.$$

3.2. Частицы. Уравнение, описывающее движение и теплообмен дисперсной фазы, в консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_p}{\partial y} = \mathbf{S}_p. \tag{10}$$

Вектор консервативных переменных \mathbf{Q}_p имеет вид

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha}\tilde{v}_1 \\ \tilde{\alpha}\tilde{v}_2 \\ \tilde{\alpha}\tilde{\vartheta} \\ \tilde{\alpha}(\sigma_{11} + \tilde{v}_1\tilde{v}_1) \\ \tilde{\alpha}(\sigma_{12} + \tilde{v}_1\tilde{v}_2) \\ \tilde{\alpha}(\sigma_{22} + \tilde{v}_2\tilde{v}_2) \\ \tilde{\alpha}(q_1 + \tilde{v}_1\tilde{\vartheta}) \\ \tilde{\alpha}(q_2 + \tilde{v}_2\tilde{\vartheta}) \end{bmatrix}.$$

Тензор подсеточных напряжений и вектор подсеточного теплового потока дисперсной фазы находятся из соотношений

$$\sigma_{ij} = \widetilde{v_i v_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j, \quad q_i = \widetilde{\vartheta v_i} - \tilde{\vartheta} \tilde{v}_i.$$

Векторы потоков \mathbf{F}_p и \mathbf{G}_p выражаются через компоненты вектора консервативных переменных $\mathbf{Q}_p = \{Q_i\}$, где $i = 1, \dots, 9$, и имеют вид

$$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_8 \\ -Q_1 \left[(2Q_2^3)/Q_1^3 - (3Q_2Q_5)/Q_1^2 \right] \\ Q_1 \left[(2Q_2Q_6)/Q_1^2 + (Q_3Q_5)/Q_1^2 - (2Q_2^2Q_3)/Q_1^3 \right] \\ Q_1 \left[(Q_2Q_7)/Q_1^2 + (2Q_3Q_6)/Q_1^2 - (2Q_2^2Q_3)/Q_1^3 \right] \\ Q_1 \left[(Q_4Q_5)/Q_1^2 + (2Q_2Q_8)/Q_1^2 - (2Q_2^2Q_4)/Q_1^3 \right] \\ Q_1 \left[(Q_4Q_6)/Q_1^2 + (Q_2Q_9)/Q_1^2 + (Q_3Q_8)/Q_1^2 - (2Q_2Q_3Q_4)/Q_1^3 \right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_9 \\ Q_1 \left[(2Q_2Q_6)/Q_1^2 + (Q_3Q_5)/Q_1^2 - (2Q_2^2Q_3)/Q_1^3 \right] \\ Q_1 \left[(Q_2Q_7)/Q_1^2 + (2Q_3Q_6)/Q_1^2 - (2Q_2^2Q_3)/Q_1^3 \right] \\ -Q_1 \left[(2Q_3^3)/Q_1^3 - (3Q_3Q_7)/Q_1^2 \right] \\ Q_1 \left[(Q_4Q_6)/Q_1^2 + (Q_2Q_9)/Q_1^2 + (Q_3Q_8)/Q_1^2 - (2Q_2Q_3Q_4)/Q_1^3 \right] \\ Q_1 \left[(Q_4Q_7)/Q_1^2 + (2Q_3Q_9)/Q_1^2 - (2Q_3^2Q_4)/Q_1^3 \right] \end{bmatrix}.$$

Источниковый член S_p учитывает межфазный обмен импульсом и теплом:

$$S_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\alpha}(u_1 - \tilde{v}_1)/\tau_v \\ \tilde{\alpha}(u_2 - \tilde{v}_2)/\tau_v \\ \tilde{\alpha}(T - \tilde{\vartheta})/\tau_\vartheta \\ -2\tilde{\alpha}(\sigma_{11} + \tilde{v}_1\tilde{v}_1 - u_1\tilde{v}_1)/\tau_v \\ -\tilde{\alpha}(2\sigma_{12} - u_1\tilde{v}_2 - u_2\tilde{v}_1 + 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2)/\tau_v \\ -2\tilde{\alpha}(\sigma_{22} + \tilde{v}_2\tilde{v}_2 - u_2\tilde{v}_2)/\tau_v \\ -\tilde{\alpha}(q_1 - T\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2)/\tau_\vartheta - \tilde{\alpha}(q_1 - u_1\tilde{\vartheta} + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2)/\tau_v \\ -\tilde{\alpha}(q_2 - T\tilde{v}_2 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2)/\tau_\vartheta - \tilde{\alpha}(q_2 - u_2\tilde{\vartheta} + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2)/\tau_v \end{bmatrix}.$$

Уравнение (10), описывающее движение и теплообмен дисперсной фазы, является гиперболическим. В квазилинейной форме уравнение (10) приобретает вид

$$\frac{\partial Q_p}{\partial t} + A_p \frac{\partial Q_p}{\partial x} + B_p \frac{\partial Q_p}{\partial y} = S_p, \tag{11}$$

где $A_p = \partial F_p / \partial Q_p$ и $B_p = \partial G_p / \partial Q_p$ — якобианы. Якобианы имеют вид

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{v}_1^2 - 3\sigma_{11}\tilde{v}_1 & 3\sigma_{11} - 3\tilde{v}_1^2 & 0 & 0 & 3\tilde{v}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{v}_2\tilde{v}_1^2 - 2\sigma_{12}\tilde{v}_1 - \sigma_{11}\tilde{v}_2 & 2\sigma_{12} - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2 & \sigma_{11} - \tilde{v}_1^2 & 0 & \tilde{v}_2 & 2\tilde{v}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{v}_1\tilde{v}_2^2 - 2\sigma_{12}\tilde{v}_2 - \sigma_{22}\tilde{v}_1 & \sigma_{22} - \tilde{v}_2^2 & 2\sigma_{12} - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2 & 0 & 0 & 2\tilde{v}_2 & \tilde{v}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1^2 - 2q_1\tilde{v}_1 - \sigma_{11}\tilde{\vartheta} & 2q_1 - 2\tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 & 0 & \sigma_{11} - \tilde{v}_1^2 & \tilde{\vartheta} & 0 & 0 & 2\tilde{v}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1\tilde{v}_2 - q_1\tilde{v}_2 - \sigma_{12}\tilde{\vartheta} - q_2\tilde{v}_1 & q_2 - \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2 & q_1 - \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 & \sigma_{12} - \tilde{v}_1\tilde{v}_2 & 0 & \tilde{\vartheta} & 0 & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{v}_2\tilde{v}_1^2 - 2\sigma_{12}\tilde{v}_1 - \sigma_{11}\tilde{v}_2 & 2\sigma_{12} - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2 & \sigma_{11} - \tilde{v}_1^2 & 0 & \tilde{v}_2 & 2\tilde{v}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{v}_1\tilde{v}_2^2 - 2\sigma_{12}\tilde{v}_2 - \sigma_{22}\tilde{v}_1 & \sigma_{22} - \tilde{v}_2^2 & 2\sigma_{12} - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2 & 0 & 0 & 2\tilde{v}_2 & \tilde{v}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{v}_2^3 - 3\sigma_{22}\tilde{v}_2 & 0 & 3\sigma_{22} - 3\tilde{v}_2^2 & 0 & 0 & 0 & 3\tilde{v}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1\tilde{v}_2 - q_1\tilde{v}_2 - \sigma_{12}\tilde{\vartheta} - q_2\tilde{v}_1 & q_2 - \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2 & q_1 - \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 & \sigma_{12} - \tilde{v}_1\tilde{v}_2 & 0 & \tilde{\vartheta} & 0 & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_1 & 0 \\ \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2^2 - 2q_2\tilde{v}_2 - \sigma_{22}\tilde{\vartheta} & 0 & 2q_2 - 2\tilde{\vartheta}\tilde{v}_2 & \sigma_{22} - \tilde{v}_2^2 & 0 & 0 & \tilde{\vartheta} & 0 & 2\tilde{v}_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Якобиан A_p представляется в виде $A_p = R_p \Lambda_p L_p$, где Λ_p — диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные значения якобиана, L_p и R_p — матрицы, состоящие из левых и правых собственных векторов якобиана, причем $L_p = R_p^{-1}$. Якобиан имеет девять вещественных собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tilde{v}_1 - (3\sigma_{11})^{1/2}, & \lambda_2 &= \tilde{v}_1 + (3\sigma_{11})^{1/2}, & \lambda_3 &= \tilde{v}_1, & \lambda_4 &= \tilde{v}_1, & \lambda_5 &= \tilde{v}_1, \\ \lambda_6 &= \tilde{v}_1 + \sigma_{11}^{1/2}, & \lambda_7 &= \tilde{v}_1 + \sigma_{11}^{1/2}, & \lambda_8 &= \tilde{v}_1 - \sigma_{11}^{1/2}, & \lambda_9 &= \tilde{v}_1 - \sigma_{11}^{1/2}. \end{aligned}$$

Правые собственные векторы якобиана имеют вид

$$r_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{11}\tilde{v}_1 - (3\sigma_{11}^3)^{1/2} \\ \sigma_{11}\tilde{v}_2 - \sigma_{12}(3\sigma_{11})^{1/2} \\ \sigma_{11}\tilde{\vartheta} - q_1(3\sigma_{11})^{1/2} \\ \frac{1}{3}\sigma_{11}(3^{1/2}\tilde{v}_1 - 3\sigma_{11}^{1/2})^2 \\ -\frac{1}{3}\sigma_{11}^{1/2}[3\sigma_{12} - \tilde{v}_2(3\sigma_{11})^{1/2}](3^{1/2}\tilde{v}_1 - 3\sigma_{11}^{1/2}) \\ \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\tilde{v}_2^2 + 2\sigma_{12}^2 - 2\tilde{v}_2\sigma_{12}(3\sigma_{11})^{1/2} \\ -\frac{1}{3}\sigma_{11}^{1/2}[3q_1 - \tilde{\vartheta}(3\sigma_{11})^{1/2}](3^{1/2}\tilde{v}_1 - 3\sigma_{11}^{1/2}) \\ 2q_1\sigma_{12} + q_2\sigma_{11} + \sigma_{11}\tilde{\vartheta}\tilde{v}_2 - q_1\tilde{v}_2(3\sigma_{11})^{1/2} - (3\sigma_{11})^{1/2}\sigma_{12}\tilde{\vartheta} \end{bmatrix}, r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, r_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{\vartheta} \\ \tilde{v}_1^2 \\ \tilde{v}_1\tilde{v}_2 \\ 0 \\ \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, r_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{11}\tilde{v}_1 + (3\sigma_{11}^3)^{1/2} \\ \sigma_{11}\tilde{v}_2 + \sigma_{12}(3\sigma_{11})^{1/2} \\ \sigma_{11}\tilde{\vartheta} + q_1(3\sigma_{11})^{1/2} \\ \frac{1}{3}\sigma_{11}(3^{1/2}\tilde{v}_1 + 3\sigma_{11}^{1/2})^2 \\ \frac{1}{3}\sigma_{11}^{1/2}[3\sigma_{12} + \tilde{v}_2(3\sigma_{11})^{1/2}](3^{1/2}\tilde{v}_1 + 3\sigma_{11}^{1/2}) \\ \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\tilde{v}_2^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\tilde{v}_2\sigma_{12}(3\sigma_{11})^{1/2} \\ \frac{1}{3}\sigma_{11}^{1/2}[3q_1 + \tilde{\vartheta}(3\sigma_{11})^{1/2}](3^{1/2}\tilde{v}_1 + 3\sigma_{11}^{1/2}) \\ 2q_1\sigma_{12} + q_2\sigma_{11} + \sigma_{11}\tilde{\vartheta}\tilde{v}_2 + q_1\tilde{v}_2(3\sigma_{11})^{1/2} + (3\sigma_{11})^{1/2}\sigma_{12}\tilde{\vartheta} \end{bmatrix}, r_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{11}\tilde{v}_2 + \sigma_{11}^{1/2}\sigma_{12} \\ -\sigma_{11}\tilde{\vartheta} - q_1\sigma_{11}^{1/2} \\ 0 \\ \sigma_{11}^{1/2}(\sigma_{12} + \sigma_{11}^{1/2}\tilde{v}_2)(\tilde{v}_1 + \sigma_{11}^{1/2}) \\ 2(\sigma_{12} + \sigma_{11}^{1/2}\tilde{v}_2)^2 \\ -\sigma_{11}^{1/2}(q_1 + \sigma_{11}^{1/2}\tilde{\vartheta})(\tilde{v}_1 + \sigma_{11}^{1/2}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$r_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{11}^{1/2} \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{11} + \tilde{v}_1\sigma_{11}^{1/2} \\ 2\sigma_{12} + 2\tilde{v}_2\sigma_{11}^{1/2} \\ 0 \\ q_1 + \tilde{\vartheta}\sigma_{11}^{1/2} \end{bmatrix}, r_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{11}^{1/2}\sigma_{12} - \sigma_{11}\tilde{v}_2 \\ \sigma_{11}\tilde{\vartheta} - q_1\sigma_{11}^{1/2} \\ 0 \\ \sigma_{11}^{1/2}(\tilde{v}_1 - \sigma_{11}^{1/2})(\sigma_{12} - \sigma_{11}^{1/2}\tilde{v}_2) \\ -2(\sigma_{12} - \sigma_{11}^{1/2}\tilde{v}_2)^2 \\ -\sigma_{11}^{1/2}(\tilde{v}_1 - \sigma_{11}^{1/2})(q_1 - \sigma_{11}^{1/2}\tilde{\vartheta}) \\ 0 \end{bmatrix}, r_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{11}^{1/2} \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{11}^{1/2}\tilde{v}_1 - \sigma_{11} \\ 2\sigma_{11}\tilde{v}_2 - 2\sigma_{12} \\ 0 \\ \sigma_{11}^{1/2}\tilde{\vartheta} - q_1 \end{bmatrix}.$$

Якобиан B_p представляется в виде $B_p = R_p \Lambda_p L_p$, где Λ_p — диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные значения якобиана, L_p и R_p — матрицы, состоящие из левых и правых собственных векторов якобиана, причем $L_p = R_p^{-1}$. Якобиан имеет девять вещественных собственных значений

$$\lambda_1 = \tilde{v}_2 - (3\sigma_{22})^{1/2}, \quad \lambda_2 = \tilde{v}_2 + (3\sigma_{22})^{1/2}, \quad \lambda_3 = \tilde{v}_2, \quad \lambda_4 = \tilde{v}_2, \quad \lambda_5 = \tilde{v}_2, \\ \lambda_6 = \tilde{v}_2 + \sigma_{22}^{1/2}, \quad \lambda_7 = \tilde{v}_2 + \sigma_{22}^{1/2}, \quad \lambda_8 = \tilde{v}_2 - \sigma_{22}^{1/2}, \quad \lambda_9 = \tilde{v}_2 - \sigma_{22}^{1/2}.$$

Правые собственные векторы якобиана имеют вид

$$r_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{22}\tilde{v}_1 - \sigma_{12}(3\sigma_{22})^{1/2} \\ \sigma_{22}\tilde{v}_2 - (3\sigma_{22}^3)^{1/2} \\ \sigma_{22}\tilde{\vartheta} - q_2(3\sigma_{22})^{1/2} \\ \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\tilde{v}_1^2 + 2\sigma_{12}^2 - 2\tilde{v}_1\sigma_{12}(3\sigma_{22})^{1/2} \\ -\frac{1}{3}\sigma_{22}^{1/2}[3\sigma_{12} - \tilde{v}_1(3\sigma_{22})^{1/2}](3^{1/2}\tilde{v}_2 - 3\sigma_{22}^{1/2}) \\ \frac{1}{3}\sigma_{22}(3^{1/2}\tilde{v}_2 - 3\sigma_{22}^{1/2})^2 \\ 2q_2\sigma_{12} + q_1\sigma_{22} + \sigma_{22}\tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 - q_2\tilde{v}_1(3\sigma_{22})^{1/2} - \sigma_{12}\tilde{\vartheta}(3\sigma_{22})^{1/2} \\ -\frac{1}{3}\sigma_{22}^{1/2}[3q_2 - \tilde{\vartheta}(3\sigma_{22})^{1/2}](3^{1/2}\tilde{v}_2 - 3\sigma_{22}^{1/2}) \end{bmatrix}, r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{\vartheta} \\ 0 \\ \tilde{v}_1\tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_2^2 \\ 0 \\ \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2 \end{bmatrix},$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{22}\tilde{v}_1 + \sigma_{12}(3\sigma_{22})^{1/2} \\ \sigma_{22}\tilde{v}_2 + (3\sigma_{22}^3)^{1/2} \\ \sigma_{22}\tilde{\vartheta} + q_2(3\sigma_{22})^{1/2} \\ \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\tilde{v}_1^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\tilde{v}_1\sigma_{12}(3\sigma_{22})^{1/2} \\ \frac{1}{3}\sigma_{22}^{1/2}[3\sigma_{12} + \tilde{v}_1(3\sigma_{22})^{1/2}](3^{1/2}\tilde{v}_2 + 3\sigma_{22}^{1/2}) \\ \frac{1}{3}\sigma_{22}(3^{1/2}\tilde{v}_2 + 3\sigma_{22}^{1/2})^2 \\ 2q_2\sigma_{12} + q_1\sigma_{22} + \sigma_{22}\tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + q_2\tilde{v}_1(3\sigma_{22})^{1/2} + \sigma_{12}\tilde{\vartheta}(3\sigma_{22})^{1/2} \\ \frac{1}{3}\sigma_{22}^{1/2}[3q_2 + \tilde{\vartheta}(3\sigma_{22})^{1/2}](3^{1/2}\tilde{v}_2 + 3\sigma_{22}^{1/2}) \end{bmatrix}, r_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^{1/2} \\ 0 \\ 0 \\ 2\sigma_{12} + 2\tilde{v}_1\sigma_{22}^{1/2} \\ \sigma_{22} + \tilde{v}_2\sigma_{22}^{1/2} \\ 0 \\ q_2 + \tilde{\vartheta}\sigma_{22}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$r_7 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{22}\tilde{v}_1 + \sigma_{22}^{1/2}\sigma_{12} \\ 0 \\ -\sigma_{22}\tilde{\vartheta} - q_2\sigma_{22}^{1/2} \\ 2(\sigma_{12} + \sigma_{22}^{1/2}\tilde{v}_1)^2 \\ \sigma_{22}^{1/2}(\sigma_{12} + \sigma_{22}^{1/2}\tilde{v}_1)(\tilde{v}_2 + \sigma_{22}^{1/2}) \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_{22}^{1/2}(q_2 + \sigma_{22}^{1/2}\tilde{\vartheta})(\tilde{v}_2 + \sigma_{22}^{1/2}) \end{bmatrix}, r_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^{1/2} \\ 0 \\ 0 \\ 2\sigma_{22}^{1/2}\tilde{v}_1 - 2\sigma_{12} \\ \sigma_{22}\tilde{v}_2 - \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{22}^{1/2}\tilde{\vartheta} - q_2 \\ 0 \end{bmatrix}, r_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^{1/2}\sigma_{12} - \sigma_{22}\tilde{v}_1 \\ 0 \\ \sigma_{22}\tilde{\vartheta} - q_2\sigma_{22}^{1/2} \\ -2(\sigma_{12} - \sigma_{22}^{1/2}\tilde{v}_1)^2 \\ \sigma_{22}^{1/2}(\tilde{v}_2 - \sigma_{22}^{1/2})(\sigma_{12} - \sigma_{22}^{1/2}\tilde{v}_1) \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_{22}^{1/2}(\tilde{v}_2 - \sigma_{22}^{1/2})(q_2 - \sigma_{22}^{1/2}\tilde{\vartheta}) \end{bmatrix}.$$

Собственные значения якобиана дисперсной фазы зависят от компонент скорости (v_1 и v_2) и от компонент тензора подсеточных напряжений (σ_{11} и σ_{22}). Имеется возможность, что в некоторый момент времени матрицы, составленные из собственных векторов якобианов, станут сингулярными. Такая ситуация возникает при $\tilde{v}_1 = 0$ или $\tilde{v}_2 = 0$, а также при $\sigma_{11} = 0$ или $\sigma_{22} = 0$. Подсеточные напряжения дисперсной фазы σ_{11} и σ_{22} обращаются в нуль в равномерном потоке, когда скорость частиц слабо отличается от скорости газа. Для избежания сингулярности в тех областях потока, где частицы отсутствуют, подсеточные напряжения дисперсной фазы полагаются равными малому положительному числу.

4. Численный метод. Для дискретизации основных уравнений используется метод конечных объемов, а для расчета потоков через грани контрольных объемов — метод Годунова [3]. Для дискретизации уравнений по времени используется метод Рунге–Кутты 3-го порядка. Для построения двумерной версии вычислительной процедуры [25] применяется расщепление по координатным направлениям. Задача о распаде произвольного разрыва решается на каждой грани контрольного объема.

Рассмотрим равномерную сетку, состоящую из $N \times N$ ячеек, с центрами ячеек в точках $x_i = i\Delta x$ и $y_j = j\Delta y$, где $i, j = 0, 1, \dots, N$. Вектор консервативных переменных, осредненный по ячейке сетки $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$, определяется соотношением

$$Q_{i,j} = \frac{1}{\Delta x_i \Delta y_j} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} Q \, dx \, dy,$$

где $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ и $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$. В дискретном виде уравнение (8) записывается в следующем виде:

в направлении оси x

$$Q_{i,j}^* = Q_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n \right) + \Delta t S_x; \quad (12)$$

в направлении оси y

$$Q_{i,j}^{n+1} = Q_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(G_{i,j+1/2}^n - G_{i,j-1/2}^n \right) + \Delta t S_y. \quad (13)$$

Шаг интегрирования по времени выбирается исходя из условия

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\min\{\Delta x, \Delta y\}}{\max\{|\lambda_{gi}|, |\lambda_{pi}|\}},$$

где число Куранта–Фридрихса–Леви $\text{CFL} \leq 1/2$.

Используя расщепление вектора потока (flux vector splitting), якобиан можно представить в виде $A = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)R^{-1}$, где матрицы Λ^+ и Λ^- представляют собой диагональные матрицы с положительными и отрицательными собственными значениями на главной диагонали.

Потоки находятся из соотношений

$$\begin{aligned} F_{i-1/2,j} &= A^+ Q_{i-1,j} + A^- Q_{i,j}; \\ G_{i,j-1/2} &= B^+ Q_{i,j-1} + B^- Q_{i,j}. \end{aligned}$$

Компоненты матриц A^+ , A^- и B^+ , B^- находятся с использованием осредненных по Рое величин.

Источниковый член в уравнении (8) представляется в расщепленном виде $S_g = S_{gx} + S_{gy}$. Источниковые члены в направлениях осей x и y имеют вид

в направлении оси x

$$S_{gx} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p \tilde{\alpha} (\tilde{v}_1 - u_1) / \tau_v \\ 0 \\ \beta m_p \tilde{\alpha} (\tilde{\vartheta} - T) / \tau_\vartheta + m_p \tilde{\alpha} (\sigma_{11} + \tilde{v}_1^2 - u_1 \tilde{v}_1) / \tau_\vartheta \end{bmatrix};$$

в направлении оси y

$$S_{gy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_p \tilde{\alpha} (\tilde{v}_2 - u_2) / \tau_v \\ m_p \tilde{\alpha} (\sigma_{22} + \tilde{v}_2^2 - u_2 \tilde{v}_2) / \tau_\vartheta \end{bmatrix}.$$

Источниковый член в уравнении (10) тоже представляется в расщепленном виде $S_p = S_{px} + S_{py}$. Источниковые члены в направлениях осей x и y имеют вид

$$S_{px} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\alpha}(u_1 - \tilde{v}_1)/\tau_v \\ 0 \\ \tilde{\alpha}(T - \tilde{\vartheta})/\tau_{\vartheta} \\ -2\tilde{\alpha}(\sigma_{11} + \tilde{v}_1^2 - u_1\tilde{v}_1)/\tau_v \\ -\tilde{\alpha}(\sigma_{12} - u_2\tilde{v}_1 + \tilde{v}_1\tilde{v}_2)/\tau_v \\ 0 \\ -\tilde{\alpha}(q_1 - T\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2)/\tau_{\vartheta} - \tilde{\alpha}(q_1 - u_1\tilde{\vartheta} + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2)/\tau_v \\ 0 \end{bmatrix};$$

в направлении оси y

$$S_{py} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\alpha}(u_2 - \tilde{v}_2)/\tau_v \\ 0 \\ 0 \\ -\tilde{\alpha}(\sigma_{12} - u_1\tilde{v}_2 + \tilde{v}_1\tilde{v}_2)/\tau_v \\ -2\tilde{\alpha}(\sigma_{22} + \tilde{v}_2^2 - u_2\tilde{v}_2)/\tau_v \\ 0 \\ -\tilde{\alpha}(q_2 - T\tilde{v}_2 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2)/\tau_{\vartheta} - \tilde{\alpha}(q_2 - u_2\tilde{\vartheta} + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_1 + \tilde{\vartheta}\tilde{v}_2)/\tau_v \end{bmatrix}.$$

Для газовой фазы осреднение по Рое задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i-1/2} &= \frac{\rho_{i-1}^{1/2}u_{i-1} + \rho_i^{1/2}u_i}{\rho_{i-1}^{1/2} + \rho_i^{1/2}}; & \hat{v}_{i-1/2} &= \frac{\rho_{i-1}^{1/2}v_{i-1} + \rho_i^{1/2}v_i}{\rho_{i-1}^{1/2} + \rho_i^{1/2}}; \\ \hat{H}_{i-1/2} &= \frac{\rho_{i-1}^{1/2}H_{i-1} + \rho_i^{1/2}H_i}{\rho_{i-1}^{1/2} + \rho_i^{1/2}} = \frac{(E_{i-1} + p_{i-1})/\rho_{i-1}^{1/2} + (E_i + p_i)/\rho_i^{1/2}}{\rho_{i-1}^{1/2} + \rho_i^{1/2}}. \end{aligned}$$

Локальная скорость звука находится из соотношения

$$\hat{c} = \left\{ (\gamma - 1) \left[\hat{H} - \frac{1}{2} (\hat{u}^2 + \hat{v}^2) \right] \right\}^{1/2}.$$

Для дисперсной фазы осреднение задается следующими соотношениями:

$$\hat{q}_{i-1/2} = \frac{1}{2} (q_{i-1} + q_i),$$

где q — обобщенная переменная ($q = \tilde{\alpha}, \tilde{v}_i, \tilde{\vartheta}, \tilde{v}_i\tilde{v}_j, \tilde{\vartheta}\tilde{v}_i$).

5. Результаты расчетов. Рассмотрим взаимодействие ударной волны, движущейся с числом Маха, равным 3, с прямоугольным облаком частиц (рис. 1). Расчетная область представляет собой прямоугольник длиной L и высотой H , заполненный покоящимся воздухом при нормальных условиях. На левой границе задаются условия втекания воздуха ($\gamma = 1.4$) с параметрами, соответствующими параметрам за ударной волной с заданным числом Маха ($M = 3$). На всех остальных границах расчетной области задается условие непротекания. За время расчета прошедшая и отраженная волны не успевают достигнуть границ расчетной области.

В начальный момент времени фронт ударной волны располагается при $x_s = 0.0175$ в прямоугольной области $[0, 1] \times [-0.2, 0.2]$. Позади фронта ударной волны газ покоится ($u_1 = u_2 = 0$), а плотность и давление полагаются равными $\rho = 1$ и $p = 1$. Частицы с плотностью $\rho_p = 1000$ кг/м³ и диаметром $d_p = 5.86 \times 10^{-3}$ м равномерно распределены в области $[0.175, 0.352] \times [-0.05, 0.05]$.

Облако состоит из 4×10^4 частиц. Числовая концентрация частиц составляет $\tilde{\alpha} = 2.26 \times 10^6$ м⁻³. Число Стокса полагается равным $Stk = 1$, а отношение удельных теплоемкостей газа и частиц — $\beta = 0.4$. Числу Прандтля присваивается значение $Pr = 0.72$. В момент времени $t = 0$ принимается, что частицы покоятся ($\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = 0$). Температура частиц полагается равной температуре газа ($\tilde{\vartheta} = T_g$). Корреляционные моменты, связанные с дисперсной фазой, полагаются равными нулю ($\sigma_{ij} = 0$, $q_i = 0$). Расчеты проводятся на сетке, содержащей 1500×500 узлов, до момента времени $t_f = 0.12$, когда ударная волна проходит область, занятую частицами. При этом на облако частиц приходится блок сетки, содержащий 200×200 узлов.

Распределения характеристик несущего потока показывает рис. 2 в момент времени $t = 0.1$. Скорость газа в направлении оси y оказывается достаточно малой. Вблизи левой границы облака имеет место резкий скачок характеристик потока (увеличение плотности, давления и температуры и уменьшение скорости и числа Маха).

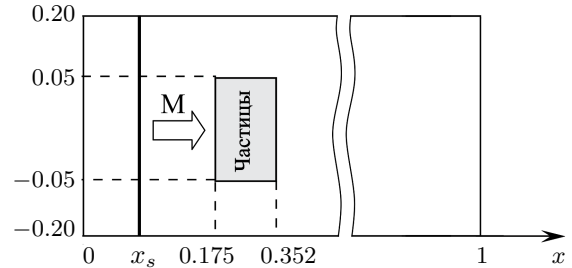


Рис. 1. Взаимодействие ударной волны с прямоугольным облаком частиц

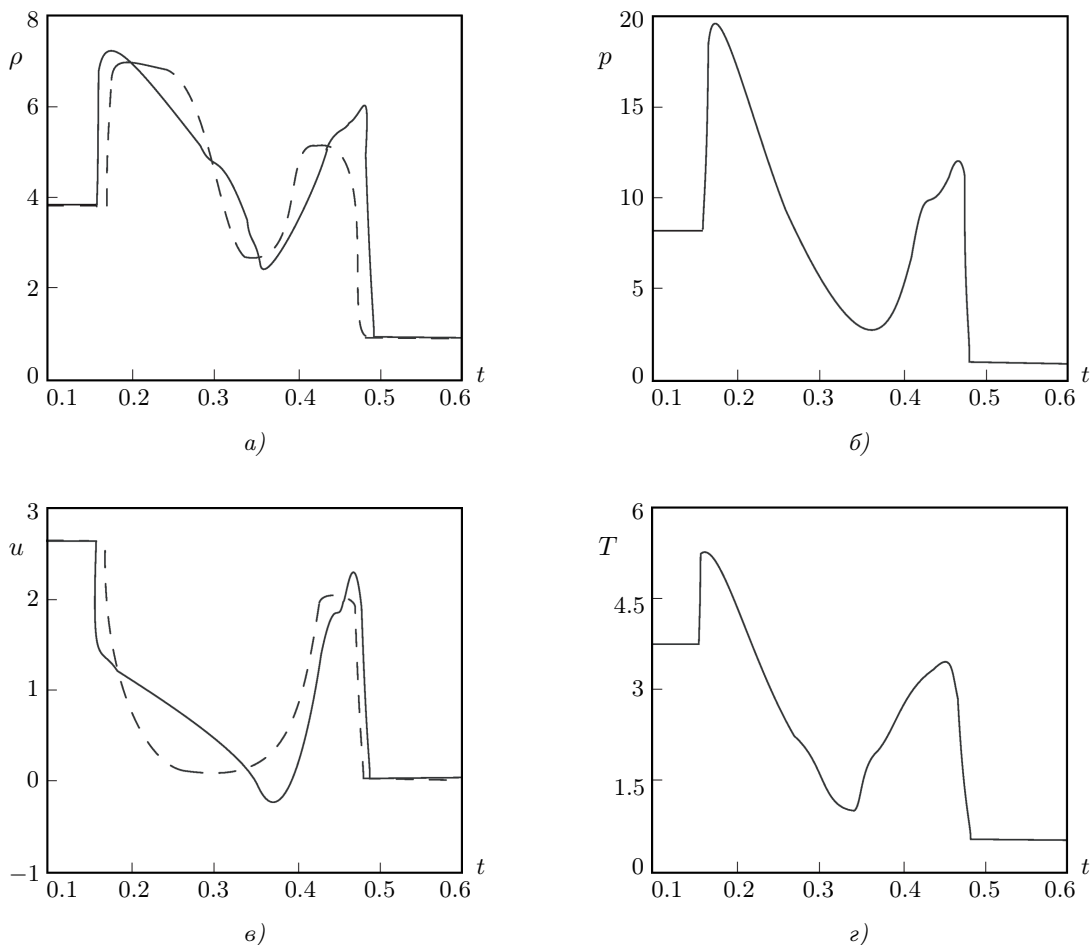


Рис. 2. Распределения плотности (а), давления (б), скорости (в) и температуры (г) при $y = 0$ в момент времени $t = 0.1$. Пунктирные линии показывают распределения характеристик потока, соответствующих одномерному расчету

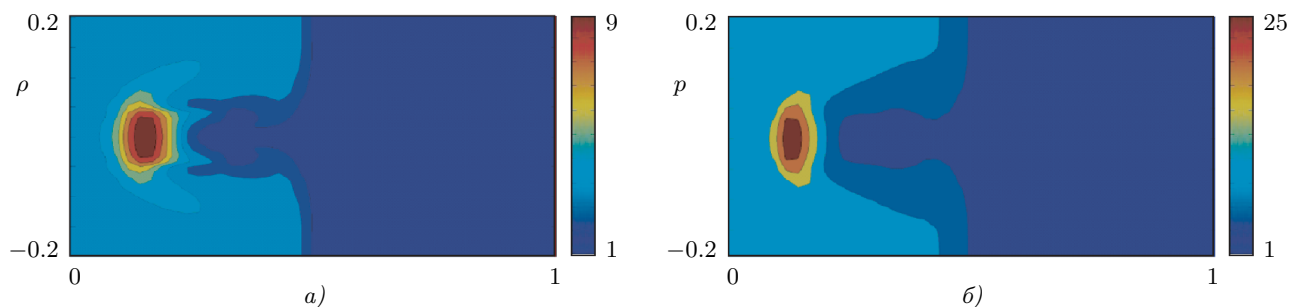


Рис. 3. Линии уровня плотности (а) и давления (б) газа в момент времени $t = 0.1$

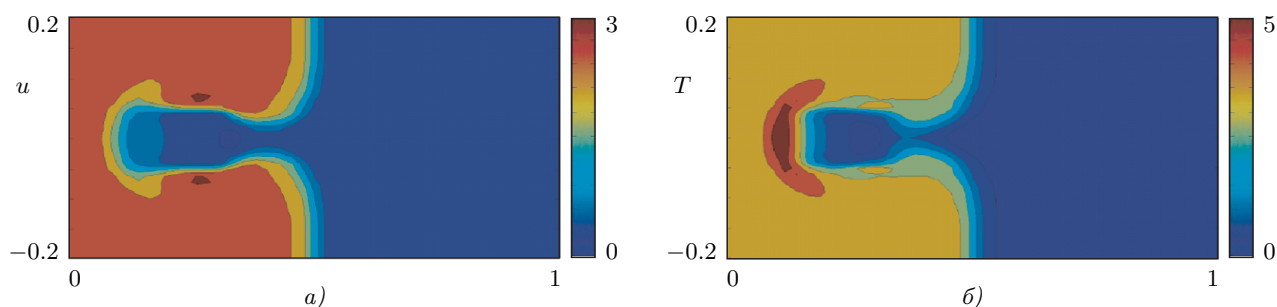


Рис. 4. Линии уровня скорости (а) и температуры (б) газа в момент времени $t = 0.1$

Сравнение распределений давлений, полученных в рамках одномерной и двумерной постановки задачи (рис. 2, сплошные и пунктирные линии), показывает, что в обоих случаях ударно-волновая картина течения остается схожей. В то же время, в двумерном случае интенсивность отраженной ударной волны выше, чем в одномерном случае, а максимум давления (положение фронта отраженной ударной волны) располагается ближе к левой границе облака частиц по сравнению с одномерным случаем. Кроме того, уменьшение давления в одномерном случае является более быстрым по сравнению с двумерным расчетом. Вблизи правой границы облака наблюдается область расширения потока. Однако в одномерном случае эта область является менее выраженной, чем в двумерном случае. Отраженная ударная волна является достаточно слабой, в связи с чем за правой границей облака наблюдается область повышенного давления.

Линии уровня характеристик несущего потока показывают рис. 3 и рис. 4. В месте контакта ударной волны с облаком частиц имеет место резкий скачок плотности. Фронт головной ударной волны симметрично огибает область, занятую частицами. Позади облака частиц имеет место маховское отражение ударной волны от оси симметрии и наблюдается рециркуляционная область наподобие той, которая возникает при обтекании затупленного тела.

Распределения скорости и температуры дисперсной фазы показывает рис. 5. Наблюдается монотонное уменьшение скорости и температуры по направлению от левой к правой границе облака. Распределения давления и плотности имеют вид, схожий с распределением скорости. Имеет место достаточно быстрое изменение характеристик потока вблизи левой границы облака с их последующим монотонным уменьшением (с постоянным наклоном) в пределах области, занимаемой частицами.

Линии уровня концентрации и скорости дисперсной фазы показывают рис. 6. Взаимодействие ударной волны с облаком приводит частицы в движение, в результате чего левая граница облака становится размытой. Скорость дисперсной фазы на краях облака превосходит скорость частиц в центральной части его левой границы. За облаком формируется рециркуляционная область и частицы не взаимодействуют с газовым потоком (частицы остаются в неподвижном состоянии). Левая граница облака движется слева направо и размывается в обоих направлениях оси y . На правой границе облака только частицы, находящиеся на краю облака, приобретают ненулевую скорость по направлению внутрь облака и к выходной границе.

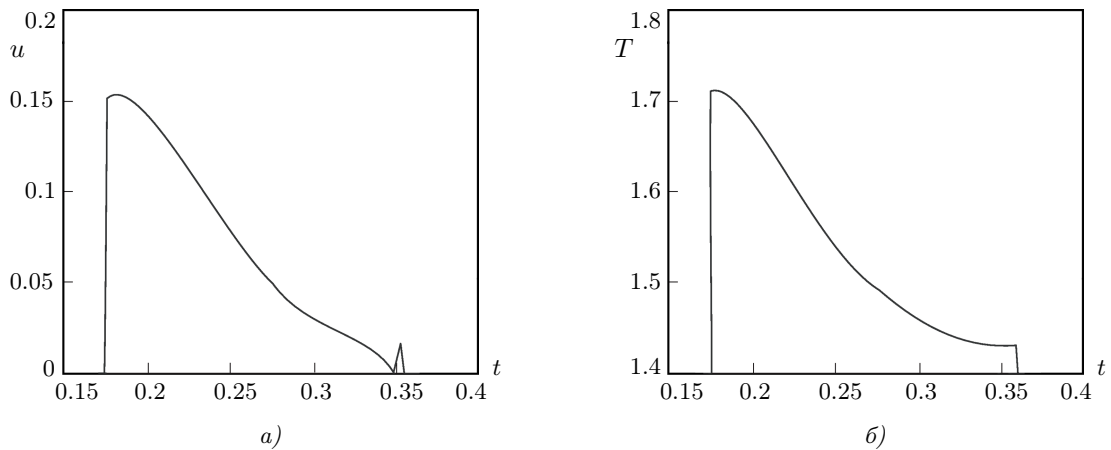


Рис. 5. Распределения скорости (а) и температуры (б) дисперсной фазы при $y = 0$ в момент времени $t = 0.1$

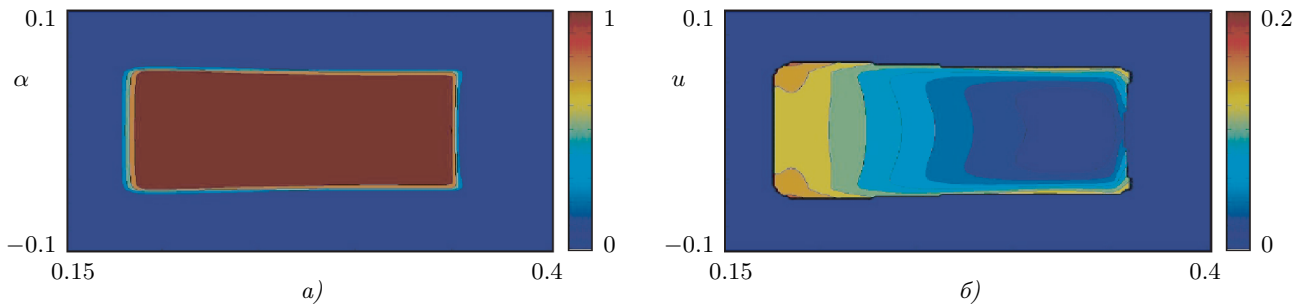


Рис. 6. Линии уровня концентрации (а) и скорости (б) дисперсной фазы в момент времени $t = 0.1$

Результаты расчетов по двумерным уравнениям, усредненных по поперечному направлению, и одномерная модель дают качественно схожие результаты. Давление, полученное усреднением по сечению в двумерном расчете от правого края облака вплоть до координаты, соответствующей положению контактного разрыва, меньше давления в одномерном расчете. Положения фронтов отраженной и прошедшей ударных волн, полученные по обеим моделям, достаточно хорошо согласуются между собой. В то же время, одномерная модель не позволяет воспроизвести колебания параметров потоков, наблюдаемые в двумерных расчетах.

При варьировании плотностью засыпки характеристики отраженной и прошедшей ударной волны изменяются. Для более плотной засыпки наблюдается увеличение амплитуды отраженной волны и ее скорости, а многомерные эффекты при этом становятся менее выраженными. Для прошедшей волны имеют место обратные тенденции. С уменьшением проницаемости засыпки прошедшая волна ослабляется, ее фронт становится более размазанным, а эффекты турбулентности в следе за облаком проявляются сильнее.

Из-за многочисленных отражений падающей ударной волны от частиц наблюдается задержка выхода давления на средний уровень после начала взаимодействия ударной волны с частицами. Участок плавного роста давления до среднего уровня после первоначального скачка обусловлен многомерными эффектами задачи и не описывается одномерной моделью [25]. Параметры за прошедшей ударной волной выходят на квазистационарный уровень, испытывая колебания, связанные с формированием вихревых структур в следе за засыпкой.

В расчетах наблюдается увеличение интенсивности отраженной волны с увеличением длины засыпки, уменьшением диаметра частиц и уменьшением проницаемости слоя частиц. Вычислительные эксперименты при варьировании ширины канала показывают, что интенсивность отраженной волны не зависит

от параметра, характеризующего проницаемость слоя частиц. В то же время, наблюдается тенденция к снижению интенсивности прошедшей волны при увеличении ширины канала, что связывается с отрывом потока за засышкой.

6. Заключение. В рамках модели взаимопроникающих континуумов построена математическая модель, описывающая нестационарные течения газа с инертными частицами, возникающие при взаимодействии ударной волны с облаком частиц. Газовая и дисперсная фазы описываются наборами уравнений, выражающими законы сохранения массы, импульса и энергии, а межфазное взаимодействие учитывается при помощи источниковых членов в правых частях. Основные уравнения для газовой и дисперсной фаз имеют гиперболический тип и допускают запись в консервативной форме, что позволяет использовать для их численного решения методы типа Годунова повышенного порядка точности. Для дискретизации уравнений по времени используется метод Рунге–Кутты 3-го порядка.

Проведено численное моделирование взаимодействия сверхзвукового потока с облаком частиц прямоугольной формы, находящихся в начальный момент времени в неподвижном состоянии. Приведены ударно-волновая структура течения и пространственно-временные зависимости концентрации частиц и других параметров потока. Результаты двумерных расчетов достаточно хорошо согласуются с данными, полученными на основе одномерной модели. Несмотря на то, что положения фронтов отраженной и прошедшей ударных волн, полученные по обеим моделям, находятся в качественном и количественном согласии между собой, одномерная модель не позволяет воспроизвести колебания параметров потоков, наблюдаемые в двумерных расчетах.

Полученные результаты позволяют оценить ослабление ударной волны засышкой гранулированной среды. В расчетах наблюдается рост интенсивности отраженной волны с увеличением длины засышки, уменьшением диаметра частиц и уменьшением проницаемости засышки.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-71-10019).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eckhoff R.* Dust explosions in the process industries. Hardbound: Gulf Professional Publishing, 2003.
2. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008.
3. *Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В.* Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015.
4. *Ben-Dor G.* Dust entrainment by means of a planar shock induced vortex over loose dust layers // *Shock Waves*. 1995. **4**. 285–288.
5. *Lhuillier D., Chang C.-H., Theofanous T.G.* On the quest for a hyperbolic effective-field model of disperse flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. **731**. 184–194.
6. *Theofanous T.G., Mitkin V., Chang C.H.* The dynamics of dense particle clouds subjected to shock waves. Part 1. Experiments and scaling laws // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. **792**. 658–681.
7. *Theofanous T.G., Chang C.-H.* The dynamics of dense particle clouds subjected to shock waves. Part 2. Modeling/numerical issues and the way forward // *International Journal of Multiphase Flow*. 2017. **89**. 177–206.
8. *Regele J.D., Rabinovitch J., Colonius T., Blanquart G.* Numerical modeling and analysis of early shock wave interactions with a dense particle cloud // *AIAA Paper*. 2012. doi 10.2514/6.2012-3161.
9. *Regele J.D., Rabinovitch J., Colonius T., Blanquart G.* Unsteady effects in dense, high speed, particle laden flows // *International Journal of Multiphase Flow*. 2014. **61**. 1–13.
10. *Wagner J.L., Beresh S.J., Kearney S.P.* A multiphase shock tube for shock wave interactions with dense particle fields // *Experiments in Fluids*. 2012. **5**, N 2. 1507–1517.
11. *Clemins A.* Representation of two-phase flows by volume averaging // *International Journal of Multiphase Flow*. 1988. **14**, N 1. 81–90.
12. *Jacobs G.B., Don W.S., Dittmann T.* Computation of normal shocks running into a cloud of particles using a high-order particle-source-in-cell method // *AIAA Paper*. 2009. doi 10.2514/6.2009-1310.
13. *Dittmann T.B., Jacobs G.B., Don W.S.* Dispersion of a cloud of particles by a moving shock: effects of shape, angle of incidence and aspect ratio // *AIAA Paper*. 2011. doi 10.2514/6.2011-441.
14. *Hosseinzadeh-Nik Z., Subramaniam S., Regele J.D.* Investigation and quantification of flow unsteadiness in shock-particle cloud interaction // *International Journal of Multiphase Flow*. 2018. **101**. 186–201.
15. *Sen O., Gaul N.J., Davis S., Choi K.K., Jacobs G., Udaykumar H.S.* Role of pseudo-turbulent stresses in shocked particle clouds and construction of surrogate models for closure // *Shock Waves*. 2018. **28**, N 3. 579–597.
16. *Mehta Y., Neal C., Salari K., Jackson T.L., Balachandar S., Thakur S.* Propagation of a strong shock over a random bed of spherical particles // *Journal of Fluid Mechanics*. 2018. **839**. 157–197.

17. *Theofanous T.G., Mitkin V., Chang C.-H.* Shock dispersal of dilute particle clouds // *Journal of Fluid Mechanics*. 2018. **841**. 732–745.
18. *Osnes A.N., Vartdal M., Omang M.G., Reif B.A.P.* Computational analysis of shock-induced flow through stationary particle clouds // *International Journal of Multiphase Flow*. 2019. **114**. 268–286.
19. *Медведев С.П., Фролов С.М., Гельфанд Б.Е.* Ослабление ударных волн насадками из гранулированных материалов // *Инженерно-физический журнал*. 1990. **58**, № 6. 924–928.
20. *Уткин П.С.* Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с плотной засыпкой частиц в рамках двухжидкостного подхода // *Химическая физика*. 2017. **36**, № 11. 61–71.
21. *Abe A., Takayama K., Itoh K.* Experimental and numerical study of shock wave propagation over cylinders and spheres // *Transactions on Modelling and Simulation*. 2001. **30**. 209–218.
22. *Mehrabadi M., Tenneti S., Garg R., Subramaniam S.* Pseudo-turbulent gas-phase velocity fluctuations in homogeneous gas–solid flow: fixed particle assemblies and freely evolving suspensions // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. **770**. 210–246.
23. *Sun B., Tenneti S., Subramaniam S., Koch D.L.* Pseudo-turbulent heat flux and average gas-phase conduction during gas–solid heat transfer: flow past random fixed particle assemblies // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. **798**. 299–349.
24. *Shotorban B., Jacobs G.B., Ortiz O., Truong Q.* An Eulerian model for particles nonisothermally carried by a compressible fluid // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2013. **65**. 845–854.
25. *Волков К.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Тетерина И.В.* Моделирование нестационарного течения газозвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны со слоем частиц // *Вычислительные методы и программирование*. 2020. **21**. 96–114.
26. *Pandya R.V.R., Mashayek F.* Two-fluid large-eddy simulation approach for particle-laden turbulent flows // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. **45**, N 24. 4753–4759.

Поступила в редакцию
27 марта 2020

Two-Dimensional Effects on the Interaction of a Shock Wave with a Cloud of Particles

K. N. Volkov¹, V. N. Emelyanov², A. G. Karpenko³, and I. V. Teterina⁴

¹ *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: dsci@mail.ru*

² *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: vlademelyanov@gmail.com*

³ *St. Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics; Universitetskii prospekt 28, St. Petersburg, 198504, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: aspera.2003.ru@mail.ru*

⁴ *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: yaiv@mail.ru*

Received March 27, 2020

Abstract: A statistical approach based on the kinetic equation for the probability density function of the distribution of particle velocity and temperature is used to develop a continuum model describing pseudo-turbulent flows of the dispersed phase. The introduction of the probability density function allows one to obtain a statistical description of an ensemble of particles instead of a dynamic description of individual particles based on Langevin equations of motion and heat transfer. The equations for the first and second moments of the dispersed phase are derived and the numerical simulation of the unsteady gas–particle flow arising due to the interaction of a shock wave with a cloud of particles is performed. The governing equations are of the hyperbolic type and are written in a conservative form. They are solved by a Godunov numerical method

of high order of accuracy. Two-dimensional effects on the formation of the shock-wave structure of the gas-particle flow and distributions of particle concentration and other flow quantities in time and space are discussed.

Keywords: two-phase flow, numerical simulation, shock wave, particle, concentration, cloud of particles.

References

1. R. K. Eckhoff, *Dust Explosions in the Process Industries* (Gulf Professional Publ., Houston, 2003).
2. K. N. Volkov and V. N. Emel'yanov, *Flows of Gas with Particles* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
3. K. N. Volkov, Yu. N. Deryugin, V. N. Emel'yanov, A. S. Kozelkov, and I. V. Teterina, *Difference Schemes in Gas Dynamics on Unstructured Grids* (Fizmatlit, Moscow, 2014) [in Russian].
4. G. Ben-Dor, "Dust Entrainment by Means of a Planar Shock Induced Vortex over Loose Dust Layers," *Shock Waves* **4**, 285–288 (1995).
5. D. Lhuillier, C.-H. Chang, and T. G. Theofanous, "On the Quest for a Hyperbolic Effective-Field Model of Disperse Flows," *J. Fluid Mech.* **731**, 184–194 (2013).
6. T. G. Theofanous, V. Mitkin, and C.-H. Chang, "The Dynamics of Dense Particle Clouds Subjected to Shock Waves. Part 1. Experiments and Scaling Laws," *J. Fluid Mech.* **792**, 658–681 (2016).
7. T. G. Theofanous and C.-H. Chang, "The Dynamics of Dense Particle Clouds Subjected to Shock Waves. Part 2. Modeling/Numerical Issues and the Way Forward," *Int. J. Multiphase Flow* **89**, 177–206 (2017).
8. J. Regele, J. Rabinovitch, T. Colonius, and G. Blanquart, "Numerical Modeling and Analysis of Early Shock Wave Interactions with a Dense Particle Cloud," *AIAA Paper* (2012). doi 10.2514/6.2012-3161.
9. J. D. Regele, J. Rabinovitch, T. Colonius, and G. Blanquart, "Unsteady Effects in Dense, High Speed, Particle Laden Flows," *Int. J. Multiphase Flow* **61**, 1–13 (2014).
10. J. L. Wagner, S. J. Beresh, S. P. Kearney, et al., "A Multiphase Shock Tube for Shock Wave Interactions with Dense Particle Fields," *Exp. Fluids* **5** (2), 1507–1517 (2012).
11. A. Clemins, "Representation of Two-Phase Flows by Volume Averaging," *Int. J. Multiphase Flow* **14** (1), 81–90 (1988).
12. G. Jacobs, W.-S. Don, and T. Dittmann, "Computation of Normal Shocks Running into a Cloud of Particles using a High-Order Particle-Source-in-Cell Method," *AIAA Paper* (2009). doi 10.2514/6.2009-1310.
13. T. Dittmann, G. Jacobs, and W.-S. Don, "Dispersion of a Cloud of Particles by a Moving Shock: Effects of Shape, Angle of Incidence and Aspect Ratio," *AIAA Paper* (2012). doi 10.2514/6.2011-441.
14. Z. Hosseinzadeh-Nik, S. Subramaniam, and J. D. Regele, "Investigation and Quantification of Flow Unsteadiness in Shock-Particle Cloud Interaction," *Int. J. Multiphase Flow* **101**, 186–201 (2018).
15. O. Sen, N. J. Gaul, S. Davis, et al., "Role of Pseudo-Turbulent Stresses in Shocked Particle Clouds and Construction of Surrogate Models for Closure," *Shock Waves* **28** (3), 579–597 (2018).
16. Y. Mehta, C. Neal, K. Salari, et al., "Propagation of a Strong Shock over a Random Bed of Spherical Particles," *J. Fluid Mech.* **839**, 157–197 (2018).
17. T. G. Theofanous, V. Mitkin, C.-H. Chang, "Shock Dispersal of Dilute Particle Clouds," *J. Fluid Mech.* **841**, 732–745 (2018).
18. A. N. Osnes, M. Vartdal, M. G. Omang, and B. A. P. Reif, "Computational Analysis of Shock-Induced Flow through Stationary Particle Clouds," *Int. J. Multiphase Flow* **114**, 268–286 (2019).
19. S. P. Medvedev, S. M. Frolov, and B. E. Gel'fand, "Attenuation of Shock Waves by Screens of Granular Material," *Inzh. Fiz. Zh.* **58** (6), 924–928 (1990) [*J. Eng. Phys. Thermophys.* **58** (6), 714–718 (1990)].
20. P. S. Utkin, "Mathematical Modeling of the Interaction of a Shock Wave with a Dense Cloud of Particles within the Framework of the Two-Fluid Approach," *Khim. Fiz.* **36** (11), 61–71 (2017) [*Russ. J. Phys. Chem. B* **11**, 963–973 (2017)].
21. A. Abe, K. Takayama, and K. Itoh, "Experimental and Numerical Study of Shock Wave Propagation over Cylinders and Spheres," *WIT Trans. Model. Sim.* **30**, 209–218 (2001).
22. M. Mehrabadi, S. Tenneti, R. Garg, and S. Subramaniam, "Pseudo-Turbulent Gas-Phase Velocity Fluctuations in Homogeneous Gas-Solid Flow: Fixed Particle Assemblies and Freely Evolving Suspensions," *J. Fluid Mech.* **770**, 210–246 (2015).

23. B. Sun, S. Tenneti, S. Subramaniam, and D. L. Koch, "Pseudo-Turbulent Heat Flux and Average Gas-Phase Conduction during Gas-Solid Heat Transfer: Flow Past Random Fixed Particle Assemblies," *J. Fluid Mech.* **798**, 299–349 (2016).
24. B. Shotorban, G. B. Jacobs, O. Ortiz, and Q. Truong, "An Eulerian Model for Particles Nonisothermally Carried by a Compressible Fluid," *Int. J. Heat Mass Transf.* **65**, 845–854 (2013).
25. K. N. Volkov, V. N. Emel'yanov, A. G. Karpenko, and I. V. Teterina, "Simulation of Unsteady Gas-Particle Flow Induced by the Shock-Wave Interaction with a Particle Layer," *Vychisl. Metody Programm.* **21**, 96–114 (2020).
26. R. V. R. Pandya and F. Mashayek, "Two-Fluid Large-Eddy Simulation Approach for Particle-Laden Turbulent Flows," *Int. J. Heat Mass Transf.* **45** (24), 4753–4759 (2002).