

УДК 550.341

doi 10.26089/NumMet.v21r320

## ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ШЕРОХОВАТЫХ ГРАНИЦ НА УПРУГИЕ ПАРАМЕТРЫ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Т. С. Хачкова<sup>1</sup>, В. В. Лисица<sup>2</sup>, Д. Р. Колюхин<sup>3</sup>, Г. В. Решетова<sup>4</sup>

Представлено численное исследование влияния шероховатости границ раздела в слоистой среде на эффективные упругие свойства тонкослоистой среды. Предложен алгоритм построения статистически эквивалентных моделей слоистых сред двух различных типов. Первый тип включает в себя модели с постоянными упругими параметрами, но с шероховатой границей раздела. Второй тип состоит из моделей с плоскими границами раздела, но с параметрами, задаваемыми случайными величинами. При этом распределение упругих параметров в моделях второго типа (средние значения и ковариационная матрица) однозначно определяется шероховатостью границ раздела (длина корреляции и стандартное отклонение) в моделях первого типа.

**Ключевые слова:** геостатистическое моделирование, теория упругости, численное осреднение.

**1. Введение.** Построение континуальных математических моделей физических процессов всегда основано на рассмотрении репрезентативного объема, в котором изменение рассматриваемых физических параметров предполагается пренебрежимо малым, т.е. объем может рассматриваться однородным. Связи между физическими параметрами на микромасштабе заменяются уравнениями состояния, связывающими макроскопические величины. При этом для установления таких связей используются либо данные лабораторных экспериментов, либо на основе решения коэффициентной задачи — решение задачи на микроуровне с последующим переходом на больший масштаб (в англоязычной литературе *upscaling*), или осреднение. При этом на разных масштабах могут рассматриваться принципиально разные математические модели, например для оценки проницаемости пористой среды (коэффициента в уравнении Дарси) необходимо моделировать флюидопоток в поровом пространстве с использованием уравнений Навье–Стокса или Стокса в зависимости от постановки задачи [2, 3, 12, 22]. Для оценки частотно-зависимого тензора упругих модулей в вязкоупругой среде [4] необходимо проведение моделирования волновых процессов в трещиновато-пористых средах [5, 6, 29], описываемых уравнением Био [15, 16]. Примером задач, в которых на микро- и макромасштабе используются одинаковые математические модели, являются “осреднения” или гомогенизация моделей среды. Например, горная порода в масштабе сантиметров может рассматриваться как идеально упругое тело, которое, однако, чрезвычайно неоднородно. При этом характерный масштаб исследуемых сейсмических процессов — от десятков метров в сейсморазведке до десятков километров в сейсмологии, что определяется характерной длиной волны. При этом на столь мелких неоднородностях не возникает значимого рассеяния [8], и среда может рассматриваться как однородная идеально упругая, но со сложной анизотропией. Для построения гомогенизаций для упругих сред могут использоваться как аналитические методы [13, 17, 38] для относительно простых сред (периодические структуры), так и численные методы, основанные на решении набора задач статической теории упругости [7, 12, 35–37].

Аналитические методы гомогенизации, особенно для слоистых сред, получили широкое распространение в разведочной сейсмике, поскольку в строении земной коры при отсутствии тектонических нарушений преимущественно прослеживается слабая изменчивость параметров среды в горизонтальных направлениях по сравнению с вертикальным. Поэтому одной из наиболее применимых моделей в сейсморазведке является модель вертикальной трансверсально-изотропной среды как результат осреднения слоистой модели с изотропными слоями. Однако эти модели получаются в предположении, что границы раздела слоев плоские, которое далеко не всегда выполняется. Наличие неровностей на границах раздела приводит к

<sup>1</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; науч. сотрудник, e-mail: GadyshinaKA@ipgg.sbras.ru

<sup>2</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; зав. лабораторией; e-mail: LisitsaVV@ipgg.sbras.ru

<sup>3</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; ст. науч. сотрудник, e-mail: KolyukhinDR@ipgg.sbras.ru

<sup>4</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; вед. науч. сотрудник, e-mail: kgv@nmsf.sssc.ru

погрешности в определении параметров эффективных моделей, что, в свою очередь, может влиять на качество обработки и интерпретации сейсмических данных. В нашей работе приводится численное исследование влияния шероховатости границ раздела слоев на эффективные упругие параметры осредненной модели. Более того, предлагается алгоритм, который позволяет по заданным параметрам шероховатости восстанавливать модели с плоскими границами слоев, но допускающие флуктуации упругих параметров в слое, такие, чтобы эффективные параметры для исходной и восстановленной модели совпадали. Установление связи между шероховатостью границ, которая всегда находится вне разрешающей способности сейсмических методов, и неопределенностями в эффективной модели позволит существенно повысить достоверность интерпретации сейсмических данных.

Результаты работы актуальны также при построении моделей блочных сред, в которых определяющим фактором являются реология и свойства материала прослоек между блоками [1, 9, 34], и в методе дискретных элементов [20, 28], используемом для моделирования процессов разрушения, включая формирование геологических разломов [10, 23, 24, 26, 27] и разрушение образцов горных пород [14, 30, 39]. В этом методе основополагающими соотношениями являются взаимодействия между элементами, которые в задачах разрушения образцов породы напрямую зависят от шероховатости зерен и свойств цементирующего материала. Поэтому учет неопределенностей, связанных с шероховатостью зерен, в таких моделях позволит повысить точность моделирования.

**2. Постановка задачи осреднения упругих модулей.** Для оценки упругих модулей горной породы методами вычислительной физики рассматривается ее сегментированное микротомографическое изображение [11, 25], т.е. сеточная модель, определенная на регулярной прямоугольной сетке. Далее, в зависимости от решаемой задачи, в каждой ячейке сетки определяются физические параметры, характерные для того минерала, который идентифицирован в этой ячейке сетки методами сегментации изображений [25]. В рамках нашей работы интерес представляют упругие модули породы, т.е. тензор жесткости  $C$ , определяющий связь напряжений и деформаций. Именно эти параметры, определенные в каждой точке сетки, являются входными, а усредненные упругие модули, соответствующие однородному материалу, который аналогично реагирует на внешние нагрузки, — искомые параметры.

Пусть в области  $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_3]$  задана система уравнений упругости в статической постановке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( C_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( C_{55} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + C_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( C_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + C_{55} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( C_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + C_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями на деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, x_3) &= f_{11}^-(x_3), & \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(0, x_3) + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(0, x_3) &= f_{13}^-(x_3), \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(X_1, x_3) &= f_{11}^+(x_3), & \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(X_1, x_3) + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(X_1, x_3) &= f_{13}^+(x_3), \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, 0) &= g_{33}^-(x_1), & \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, 0) + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, 0) &= g_{13}^-(x_1), \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, X_3) &= g_{33}^+(x_1), & \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, X_3) + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, X_3) &= g_{13}^+(x_1). \end{aligned} \quad (2)$$

В этих обозначениях  $u_1$  и  $u_3$  — компоненты вектора смещений,  $C_{ij}$  — компоненты тензора жесткости, зависящие от пространственных координат. В данной работе рассматриваются только модели с ортотропной симметрией среды, для которых тензор жесткости имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix}.$$

При этом будем придерживаться обозначений  $C = C(x_1, x_3)$ , а усредненный тензор  $\tilde{C}$  — не зависит от пространственных координат.

В результате можно сформулировать задачу осреднения тензора упругих модулей.

**Задача 1.** Построить тензор  $\tilde{C}$ , такой, чтобы для решений задачи (1), (2) с исходным тензором  $C(x_1, x_3)$  и с осредненным тензором  $\tilde{C}$  потенциальные энергии деформаций совпадали для любых

граничных условий вида (2), т.е.

$$E = \int_{\Omega} (C(x_1, x_3)\varepsilon(x_1, x_3), \varepsilon(x_1, x_3)) = \int_{\Omega} (\tilde{C}\tilde{\varepsilon}(x_1, x_3), \tilde{\varepsilon}(x_1, x_3)),$$

где деформации определяются как  $\varepsilon = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^T$ ; для  $\tilde{\varepsilon}$  формулы аналогичны.

Для решения этой задачи используется численный метод, описанный в [7], в котором решение задачи (1), (2) с переменными значениями тензора жесткости вычисляется для трех наборов граничных условий, а решение задачи с постоянным тензором жесткости для тех же граничных условий строится аналитически. После чего из условия равенства потенциальных энергий деформации вычисляются осредненные значения тензора жесткости [7].

**3. Построение упругих модулей для прослоек с ровными границами.** Задачей, решаемой в данном разделе, является отображение неопределенности геометрии модели в неопределенность значений компонент тензора жесткости при фиксированной геометрии модели. Поэтому необходимо рассмотреть две постановки задач:

— задачи с “шероховатыми” границами, когда  $\hat{C} = \hat{C}(x_1, x_3)$  определяется по правилу

$$\hat{C} = \begin{cases} C^b & x_3 < b_u(x_1), \\ \hat{C}^l & b_u(x_1) \leq x_3 \leq b_d(x_1), \\ C^b & x_3 > b_d(x_1), \end{cases} \quad (3)$$

где  $C^b$  и  $\hat{C}^l$  — тензоры упругих модулей внешних и внутреннего слоев модели соответственно, а границы  $b_d(x_1)$  и  $b_u(x_1)$  заданы случайными функциями:

$$b_d(x_1) = \langle b_d \rangle + b'_d(x), \quad b_u(x_1) = \langle b_u \rangle + b'_u(x).$$

Здесь предполагается, что средние значения  $\langle b_u \rangle$  и  $\langle b_d \rangle$  постоянны, т.е. можно ввести среднюю толщину слоя  $L = \langle b_d \rangle - \langle b_u \rangle$  и относительную среднюю толщину  $l = L/X_3$ . Возмущения  $b'_u$  и  $b'_d$  — случайные функции с гауссовским распределением с нулевым средним и функцией ковариации  $Q(r)$ , где  $r$  — расстояние вдоль интерфейса. В нашей работе рассматривается гауссовское распределение, для которого  $Q(r)$  определяется стандартным отклонением  $\sigma$  и длиной корреляции  $I$ :

$$Q(r) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\pi I^2 r^2}{4}\right).$$

Реализации случайных функций  $b'_u$  и  $b'_d$  моделируются методом, представленным в [33];

— задачи со случайными значениями тензора жесткости, когда  $C(x_1, x_3)$  определяется, как

$$C = \begin{cases} C^b & x_3 \ll \langle b_u \rangle, \\ C^l & \langle b_u \rangle \leq x_3 \leq \langle b_d \rangle, \\ C^b & x_3 \gg \langle b_d \rangle, \end{cases} \quad (4)$$

где  $C^l = \langle C^l \rangle + (\hat{C}^l)'$ , а  $(\hat{C}^l)'$  — случайная тензорная функция с заданной ковариационной матрицей.

При этом основной задачей, решаемой в этом разделе, является следующая.

**Задача 2.** Для заданной модели среды с шероховатыми границами между слоями (3) построить тензор упругих модулей  $C^l$  для модели с ровными границами (4), такой, чтобы потенциальные энергии деформации для решений задачи (1), (2) для моделей (3) и (4) совпадали:

$$E = \int_{\Omega} (\hat{C}\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}) = \int_{\Omega} (C\varepsilon, \varepsilon),$$

где переменные с крышками соответствуют постановке с шероховатыми границами, а без крышек — постановке с ровными границами.

Для решения этой задачи используются как численные, так и аналитические методы осреднения тензора упругих модулей. На первом этапе решается задача численного построения компонент эффективного тензора жесткости для модели среды с шероховатыми границами, т.е. задача 1, описанная в разделе 2. На втором этапе решается обратная задача — по заданному эффективному тензору, тензору упругих модулей для внешнего материала и относительной толщине прослойки двухслойной среды с ровными границами восстановить тензор упругих модулей для внутреннего материала, т.е. материала прослойки, такой, чтобы эффективный тензор жесткости полученной двухслойной модели совпадал с исходным тензором. Решение второй задачи может быть получено на основе аналитических методов осреднения.

**3.1. Осреднение тензора упругих модулей для слоистой среды.** В приложении к задачам сейсмологии осреднение тензора упругих модулей для слоистой идеально упругой среды было предложено в работах [13, 38], а позднее обобщено на случай вязкоупругих [42] и пороупругих сред [21]. Позднее этот подход был численно верифицирован [18, 19], а также использован для модификации коэффициентов конечно-разностных схем при моделировании сейсмических волновых полей в неоднородных средах [31, 41]. Ниже мы приводим основные соотношения, используемые для построения осреднения.

Рассматривается закон Гука, записанный в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \sigma_T \\ \sigma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{15} \\ c_{13} & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{TT} & C_{TN} \\ C_{NT} & C_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_T \\ \varepsilon_N \end{pmatrix},$$

здесь индексы  $T$  и  $N$  обозначают касательные и нормальные компоненты тензора напряжений и деформации. Пусть для определенности рассматривается горизонтально-слоистая среда, тогда  $\sigma_N = (\sigma_{33}, \sigma_{13})^T$  и  $\sigma_T = \sigma_{33}$ . После чего предполагается, что компоненты  $\sigma_T$  и  $\varepsilon_N$  терпят разрывы на интерфейсах, и уравнения разрешаются относительно этих компонент:

$$\begin{aligned} \varepsilon_N &= C_{NN}^{-1} \sigma_N - C_{NN}^{-1} C_{NT} \varepsilon_T, \\ \sigma_T &= (C_{TT} - C_{TN} C_{NN}^{-1} C_{NT}) \varepsilon_T + C_{TN} C_{NN}^{-1} \sigma_N. \end{aligned}$$

Проводя осреднение по объему и используя теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_N \rangle &= \langle C_{NN}^{-1} \rangle \sigma_N - \langle C_{NN}^{-1} C_{NT} \rangle \varepsilon_T, \\ \langle \sigma_T \rangle &= \left( \langle C_{TT} \rangle - \langle C_{TN} C_{NN}^{-1} C_{NT} \rangle \right) \varepsilon_T + \langle C_{TN} C_{NN}^{-1} \rangle \sigma_N. \end{aligned}$$

где обозначение  $\langle \rangle$  используется для осреднения по периоду

$$\langle f \rangle(x) = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x + \xi) d\xi. \quad (5)$$

Используя полученные осреднения, можно восстановить закон Гука для эффективной среды:

$$\begin{pmatrix} \langle \sigma_T \rangle \\ \sigma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{TT} & \tilde{C}_{TN} \\ \tilde{C}_{NT} & \tilde{C}_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_T \\ \langle \varepsilon_N \rangle \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{NN}^{-1} &= \langle C_{NN}^{-1} \rangle, \quad \tilde{C}_{NT} = \tilde{C}_{NN} \langle C_{NN}^{-1} C_{NT} \rangle, \quad \tilde{C}_{NT} = \tilde{C}_{TN}^*, \\ \tilde{C}_{TT} &= \tilde{C}_{TN} \tilde{C}_{NN}^{-1} \tilde{C}_{NT} + \langle C_{TT} \rangle - \langle C_{TN} C_{NN}^{-1} C_{NT} \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

**3.2. Восстановление тензора жесткости для одной прослойки.** Полученные выше формулы обратимы в предположении, что исходная модель состоит из двух материалов с удельными толщинами  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ . В этом случае формула осреднения (5) упрощается  $\langle f \rangle(x) = \alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2$ , а в предположении, что эффективный тензор жесткости  $\tilde{C}$  и тензор упругих модулей для внешних слоев  $C^b$  известны,

получим:

$$\begin{aligned} (C_{NN}^l)^{-1} &= \alpha^{-1} \tilde{C}_{NN}^{-1} - (\alpha^{-1} - 1) (C_{NN}^b)^{-1}, \\ C_{NT}^l &= \alpha^{-1} C_{NN}^l \tilde{C}_{NN}^{-1} \tilde{C}_{NT} - (\alpha^{-1} - 1) C_{NN}^l (C_{NN}^b)^{-1} C_{NT}^b, \\ C_{TT}^l &= C_{TN}^l (C_{NN}^l)^{-1} C_{NT}^l + \alpha^{-1} [\tilde{C}_{TT} - \tilde{C}_{TN} \tilde{C}_{NN}^{-1} \tilde{C}_{NT}] - \\ &\quad - (\alpha^{-1} - 1) [C_{TT}^b - C_{TN}^b (C_{NN}^b)^{-1} C_{NT}^b], \end{aligned} \tag{7}$$

где  $C^l$  — искомый тензор упругих модулей для внутренней прослойки.

**4. Оценка распределений для компонент тензора жесткости материала прослоек.** В этом разделе приводятся численные эксперименты для построения оценок функций распределения компонент тензора жесткости для материала прослоек. В качестве исходных рассматривались модели, определяемые уравнениями (3). Средняя толщина прослойки обозначается  $L$ , общий размер модели составлял  $5L$  в направлении, нормальном к слою, и  $20L$  в касательном направлении. В статистических моделях шероховатости рассматривались следующие значения длины корреляции  $I \in \{0.1L, 0.2L, 0.4L, 0.8L, 1.6L\}$  и стандартного нормального отклонения  $\varphi \in \{0.03L, 0.05L, 0.1L, 0.2L\}$ , которые использовались для моделирования шероховатых границ  $b_u(x_1)$  и  $b_d(x_1)$  между слоями, причем генерировались они независимо. Шаг дискретизации модели выбирался равным по обоим пространственным направлениям и равнялся  $h = L/100$ . Таким образом, дискретизация вычислительной области — 2000 точек вдоль и 500 точек поперек слоев. Выполнены 96 реализаций модели, при этом границы  $b_u(x_1)$  и  $b_d(x_1)$  генерировались независимо.

Наряду с геометрией границ варьировались и параметры материала, заполняющего внутренние прослойки. При этом материалы, как внутреннего слоя, так и внешних, предполагались изотропными, т.е. определенными двумя компонентами  $c_{11}$  и  $c_{55}$  либо же значением  $c_{55}$  и отношением  $c_{11}/c_{55}$ , поскольку для таких сред  $c_{33} = c_{11}$  и  $c_{13} = c_{11} - 2c_{55}$ . Для внутреннего слоя рассматривались следующие значения  $\hat{c}_{55}^l \in \{6, 10.7, 16.8, 24.2, 33\}$  ГП и  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l \in \{2.17, 2.64, 3.06, 3.51, 4\}$ . Материал внешних слоев фиксировался, предполагалось, что это зерна кварца с параметрами  $c_{11}^b = 95.4$  ГП и  $c_{55}^b = 44$  ГП.

Для идентификации статистической модели мы будем использовать набор из четырех параметров  $[I_i, \varphi_j, (\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m]$ . Поскольку каждый параметр в четверке принимает пять различных значений, кроме  $\varphi$ , который принимает четыре значения, то всего мы оперировали 500 статистическими моделями. Для всех моделей, определенных фиксированной четверкой, генерировалось по 96 случайных реализаций, для каждой из которых численно решалась задача оценки эффективного тензора жесткости и восстановления тензора жесткости  $C^l$  для прослойки с ровными границами из постановки (4). В итоге было восстановлено по 96 реализаций тензора жесткости  $C^l$  для каждой из 500 статистических моделей.

**4.1. Средние значения.** Первая характеристика полученных тензоров, которую мы исследуем, — это покомпонентное среднее значение, рассчитанное по ансамблю реализаций для каждой статистической модели. Поскольку средняя толщина слоя в исходных моделях (3) фиксирована и мы сохраняем ту же толщину для моделей (4), то ожидается, что средние значения восстановленных тензоров  $\langle C^l \rangle$  совпадут с исходными тензорами  $\hat{C}^l$  из (3). Рассчитав средние значения компонент тензоров и их доверительные интервалы, мы оценили относительную погрешность между полученным средним значением и тензором, который соответствует исходной модели, используя фробениусову норму, т.е.

$$\epsilon \left( [I_i, \varphi_j, (\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m] \right) = \frac{\| \langle C^l \rangle - \hat{C}^l \|}{\| \hat{C}^l \|}, \quad \text{где} \quad \| \hat{C}^l \| = \sqrt{\sum_{k,p \in \{1,3\}}^3 (\hat{c}_{kp}^l)^2}.$$

После этого мы сравнили полученные относительные разности с относительными нормами доверительных интервалов:

$$V \left( [I_i, \varphi_j, (\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m] \right) = \frac{\| Q \|}{\| \hat{C}^l \|} = \frac{\sqrt{\sum_{k,p \in \{1,3\}}^3 q_{kp}^2}}{\| \hat{C}^l \|}, \tag{8}$$

где  $q_{kp} = t_{\alpha, N-1} \frac{S}{\sqrt{N}}$  — половина длины доверительного интервала для компоненты  $c_{kp}^l$  восстановленного

тензора жесткости:

$$\langle c_{kp}^l \rangle \pm t_{\alpha, N-1} \frac{S}{\sqrt{N}}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \left( (c_{kp}^l)_i - \langle c_{kp}^l \rangle \right)^2}{N-1}. \quad (9)$$

Здесь  $\langle c_{kp}^l \rangle$  — среднее значение по набору,  $S$  — дисперсия, а  $N$  — количество реализаций в ансамбле; значение  $t_{\alpha, N-1}$  находится из функции распределения Стьюдента  $F$  с  $N-1$  степенью свободы для уровня значимости  $\alpha$  как  $t_{\alpha, N-1} = F_{N-1}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$ . Здесь и далее уровень значимости выбирается как  $\alpha = 0.05$ .

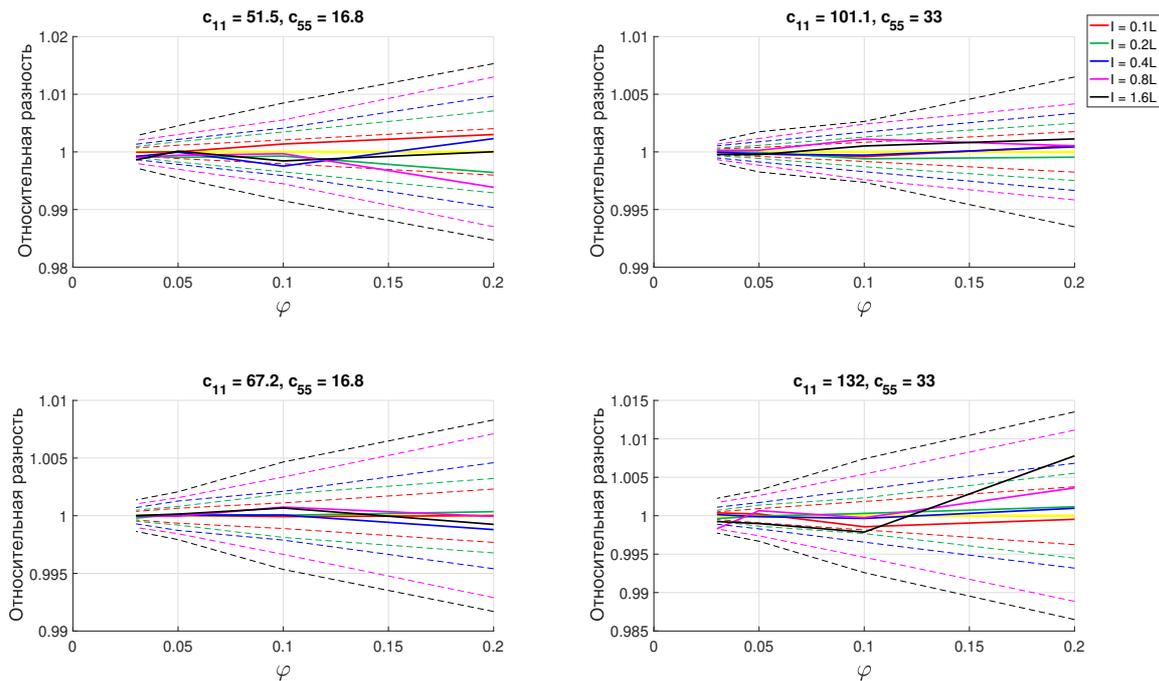


Рис. 1. Желтые линии — это совпадение восстановленных средних и исходных тензоров упругих модулей, сплошные линии — относительные нормы разности, пунктирные линии — относительные нормы доверительных интервалов

На рис. 1 представлены относительные нормы разности и относительные нормы доверительных интервалов. Видно, что для всех статистических моделей  $\left[ I_i, \varphi_j, (\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l / \hat{c}_{55}^l)_m \right]$  эта разность укладывается в доверительный интервал, т.е.

$$\epsilon \leq V, \quad \forall \left[ I_i, \varphi_j, (\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l / \hat{c}_{55}^l)_m \right];$$

это означает, что средние значения восстановленных тензоров внутреннего слоя в моделях с ровными границами совпадают с исходными тензорами упругих модулей для этого слоя в моделях с шероховатыми границами.

**4.2. Проверка многомерной нормальности распределения компонент тензоров.** Чтобы проверить, что компоненты восстановленных тензоров жесткости нормально распределены, в этой работе используется тест Ройстона, предложенный в [32]. Численные расчеты выполняются с применением программного кода, разработанного в [40].

Тест Ройстона выполнялся для 500 статистических моделей  $\left[ I_i, \varphi_j, (\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l / \hat{c}_{55}^l)_m \right]$  на регулярной сетке и для 48 случайных комбинаций этих значений.

Полученные результаты не показали зависимости результатов этого статистического исследования от значений параметров четверки. Более чем в 90% случаев тест Ройстона подтвердил многомерное нормальное распределение тензорных компонент.

Многомерная нормальность отличается тем, что в этом случае распределение тензорных компонент целиком определяется вектором средних значений и ковариационной матрицей.

**5. Статистическое моделирование тензоров упругих модулей для внутреннего слоя.** В предыдущем разделе описаны численные эксперименты, с помощью которых удалось восстановить упругие модули для материала внутреннего слоя в моделях с ровными границами, которые статистически эквивалентны моделям с шероховатыми границами. Значения используемых параметров  $I, \varphi, \hat{c}_{55}^l, \hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l$  задавались на регулярной сетке в четырехмерном параметрическом пространстве, от четырех до пяти точек вдоль каждого параметрического направления. В этом разделе предлагается способ распространения результатов на всю интересующую область (в параметрическом пространстве), дающий возможность построения тензоров упругих модулей внутреннего слоя для произвольных значений указанных параметров, для верификации которого в последующем используется набор из 48 случайных наборов параметров; для этих параметров тоже, как и на регулярной сетке, были сгенерированы по 96 реализаций и выполнены аналогичные расчеты.

**5.1. Восстановление ковариационной матрицы.** Чтобы распространить полученные результаты на всю интересующую область, мы предлагаем использовать процедуру, подобную интерполяции, применительно к ковариационным матрицам, построенным для каждого набора из 96 тензоров жесткости, восстановленного в точках сетки. При этом ковариационные матрицы строились по компонентам тензоров  $c_{11}^l, c_{33}^l, c_{55}^l, c_{13}^l$ . Такие матрицы симметричны и строго положительно определены. Поскольку их размер в данном случае равен  $4 \times 4$ , то можно применить любой явный метод линейной алгебры. В частности, мы предлагаем рассмотреть следующую процедуру интерполяции. Пусть  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  — две ковариационные матрицы, тогда интерполяцию можно представить в следующем виде:

$$\Sigma(t) = \exp[(1 - t) \ln(\Sigma_1) + t \ln(\Sigma_2)], \tag{10}$$

где  $\exp$  и  $\ln$  — матричные функции, определенные как:  $f(\Sigma) = Uf(D)U^*$ , где  $f$  — это функция,  $U$  — матрица собственных векторов,  $D$  — диагональная матрица с собственными значениями на главной диагонали и  $U^*$  — сопряженная к  $U$ . Матрица  $\Sigma$  — симметрична; таким образом,  $D$  — диагональна и вещественна, а  $U$  — ортогональна. Более того, для любой аналитической функции  $f(\Sigma)$  симметрична. Положительность интерполированной матрицы обеспечивается монотонностью функций логарифма и степени.

При использовании интерполяционной формулы (10) мы оперируем логарифмами ковариационных матриц  $\Psi = \ln(\Sigma)$ . Сначала рассмотрим поэлементное представление матриц  $\Psi$ . Мы фиксируем три из четырех параметров и исследуем компоненты  $\Psi$  как функции оставшегося параметра. На рис. 2 представлены компоненты матрицы  $\Psi = \ln(\Sigma)$  для  $\hat{c}_{55}^l = 10.7$  ГПа,  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l = 2.64$  и  $\varphi = 0.1$  (левый график на рис. 2) и для  $\hat{c}_{55}^l = 24.23$  ГПа,  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l = 3.51$  и  $\varphi = 0.05$  (правый график на рис. 2). Аналогично, графики зависимости компонент матрицы  $\Psi = \ln(\Sigma)$  от STD (Standard Deviation) шероховатых границ  $\varphi$  с фиксированными  $\hat{c}_{55}^l = 10.7$  ГПа,  $\hat{c}_{11}^l/c_{55} = 2.64$  и  $I = 0.2$  (левый график на рис. 3), и  $\hat{c}_{55}^l = 24.23$  ГПа,  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l = 3.51$  и  $I = 0.8$  (правый график на рис. 3). Далее, графики компонент матрицы  $\Psi = \ln(\Sigma)$  в зависимости от значений  $\hat{c}_{55}^l$  внутреннего слоя с фиксированными  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l = 2.64$ ,  $\varphi = 0.1$  и  $I = 0.2$  представлены на левом графике рис. 4, а для фиксированных  $\hat{c}_{55}^l = 24.23$  ГПа,  $\varphi = 0.05$ ,  $I = 0.8$  — на правом графике рис. 4. Наконец, мы приводим графики компонент  $\Psi = \ln(\Sigma)$  в зависимости от соотношения  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l$  внутреннего слоя с фиксированными значениями  $\hat{c}_{55}^l = 10.7$  ГПа,  $\varphi = 0.1$  и  $I = 0.2$  (левый график на рис. 5) и  $\hat{c}_{55}^l = 24.23$  ГПа,  $\varphi = 0.05$  и  $I = 0.8$  (правый график на рис. 5).

На графиках 2 и 3 видно, что коэффициенты матриц  $\Psi$  почти линейно зависят от  $\ln(\varphi)$  и  $\ln(I)$ , в то время как зависимость от физических параметров внутреннего слоя более сложная. Чтобы проверить это предположение, мы вычислили покомпонентную линейную регрессию матриц независимо по каждому параметру (при фиксированных значениях трех остальных) и оценили относительную ошибку регрессии.

Покомпонентная линейная регрессия матрицы-функции находится решением системы уравнений методом наименьших квадратов:

$$A_0 y_j + A_1 = \Psi(y_j),$$

где  $y$  — это параметр, вдоль которого выполняется линейная регрессия, а  $y_j$  — его имеющиеся значения. Матрицы  $A_0$  и  $A_1$  — коэффициенты регрессии, независимые от  $y$ . Поскольку задача переопределена, то можно найти решение методом наименьших квадратов, которое минимизирует невязку:

$$\sum_{ij} \sum_k ((A_0)_{ij} y_k + (A_1)_{ij} - \psi_{ij}(y_k))^2 = \sum_k \|A_0 y_k + A_1 - \Psi(y_k)\|_F^2 \rightarrow \min,$$

где  $\|\cdot\|_F$  — фробениусова норма  $\|\Psi\|_F^2 = \sum_{ij} \psi_{ij}^2$ .

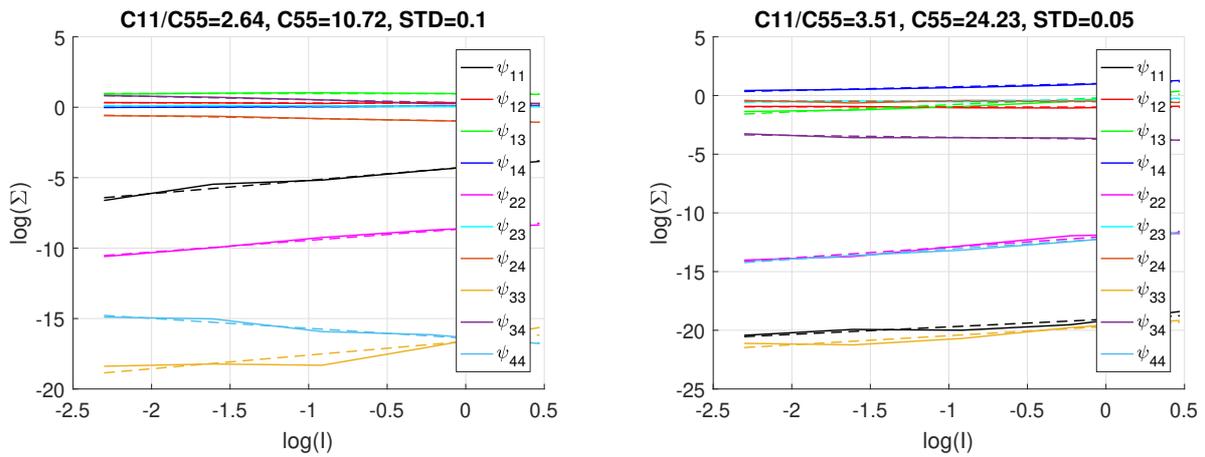


Рис. 2. Компоненты матрицы  $\ln(\Sigma)$  в зависимости от длины корреляции  $l$  шероховатых границ для двух фиксированных наборов значений  $\hat{c}_{55}^l, \hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l$  и  $\varphi$ . Сплошные линии представляют компоненты матрицы, пунктирные — линейную регрессию соответствующих компонент

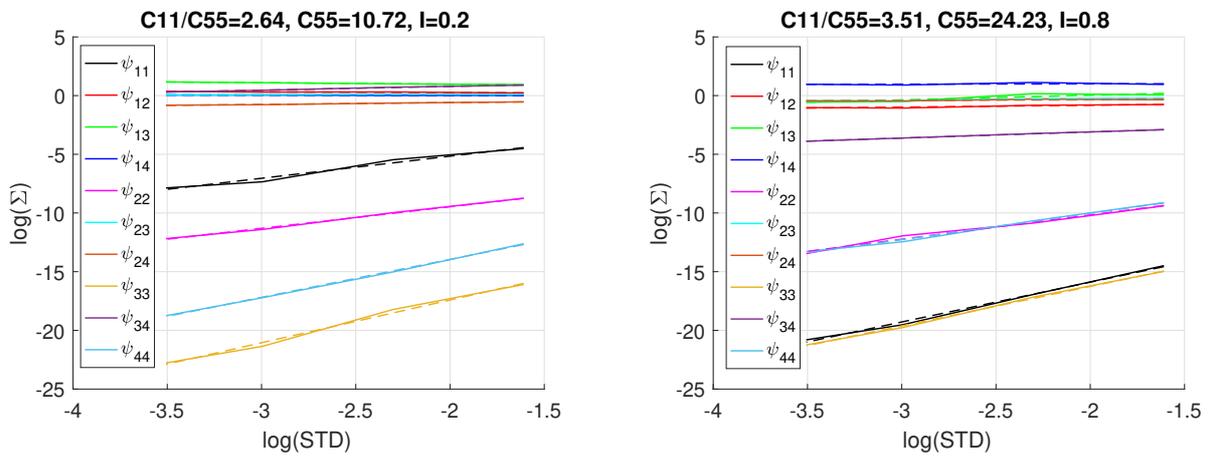


Рис. 3. Компоненты матрицы  $\ln(\Sigma)$  в зависимости от стандартного отклонения  $\varphi$  шероховатых границ для двух фиксированных наборов значений  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l, \hat{c}_{55}^l$  и  $l$ . Сплошные линии представляют компоненты матрицы, пунктирные — линейную регрессию соответствующих компонент

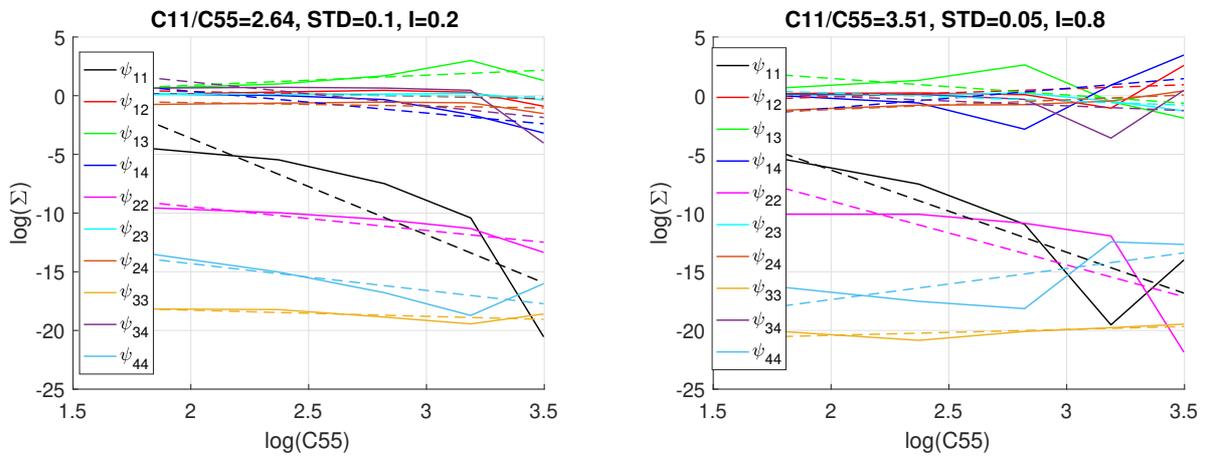


Рис. 4. Компоненты матрицы  $\ln(\Sigma)$  в зависимости от значений  $\hat{c}_{55}^l$  внутреннего слоя для двух фиксированных наборов значений  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l, \varphi$  и  $l$ . Сплошные линии представляют компоненты матрицы, пунктирные — линейную регрессию соответствующих компонент

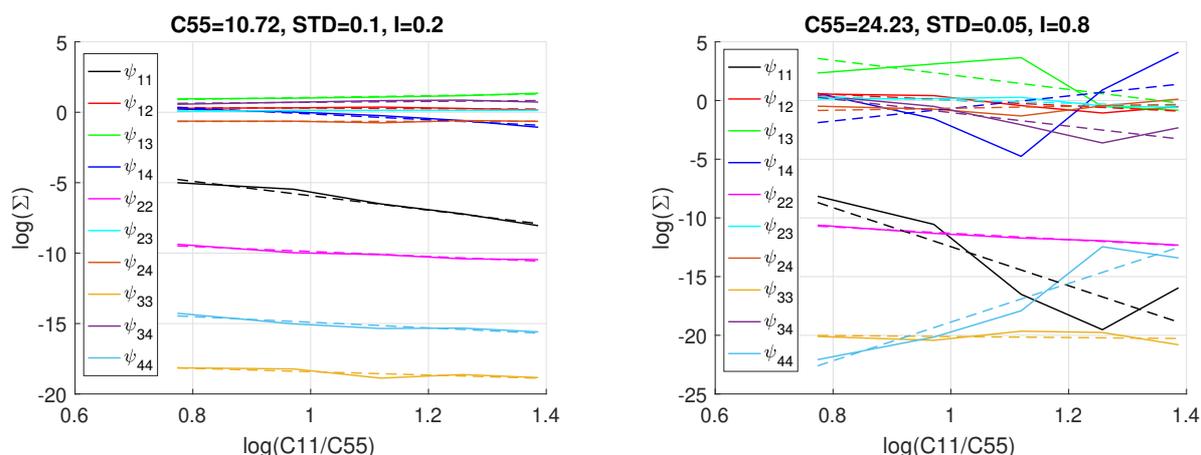


Рис. 5. Компоненты матрицы  $\ln(\Sigma)$  в зависимости от соотношения величин  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l$  внутреннего слоя для двух фиксированных наборов значений  $\hat{c}_{55}^l$ ,  $\varphi$  и  $I$ . Сплошные линии представляют компоненты матрицы, пунктирные — линейную регрессию соответствующих компонент

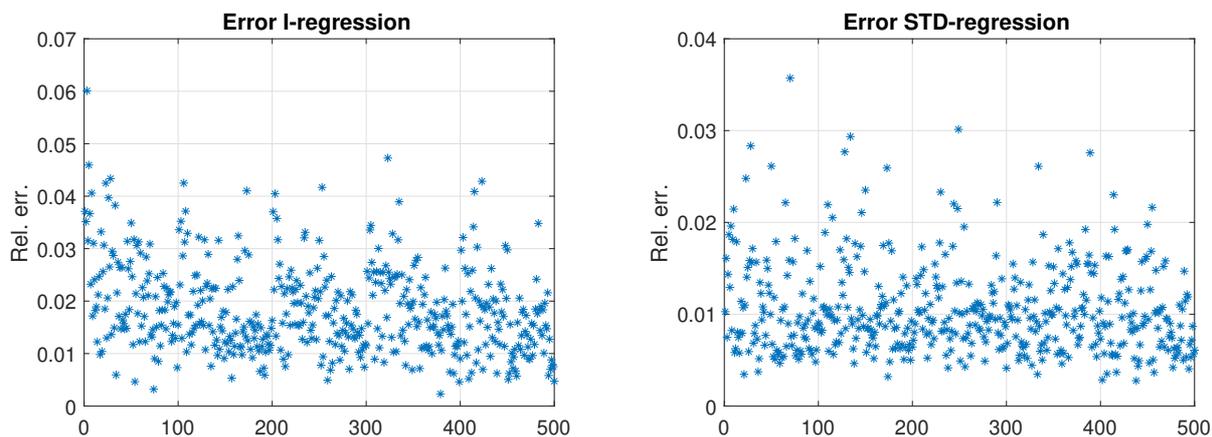


Рис. 6. Относительные ошибки линейной регрессии по длине корреляции (слева) и по стандартному отклонению (справа). Горизонтальная ось представляет номер эксперимента

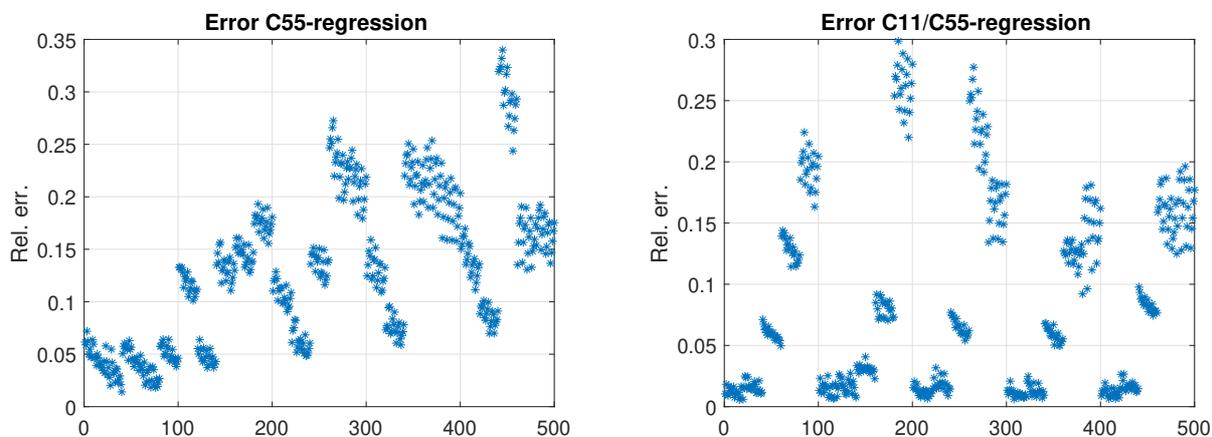


Рис. 7. Относительные ошибки линейной регрессии по параметрам  $\hat{c}_{55}^l$  и  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l$ . Горизонтальная ось представляет номер эксперимента

Для каждого фиксированного набора  $\left( (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{55}^l)_n, \varphi_j \right)$  мы выполнили линейную регрессию по параметру  $I$ :

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_{ijmn} &= \widehat{\Psi} \left( (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{55}^l)_n, \varphi_j, I \right) = \\ &= A_0 \left( (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{55}^l)_n, \varphi_j \right) I + A_1 \left( (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{55}^l)_n, \varphi_j \right),\end{aligned}$$

затем вычислили ее значение в узлах сетки  $I = I_i$  и рассчитали относительные ошибки в этих точках:

$$R_{ijmn} = \frac{\|\widehat{\Psi}_{ijmn} - \Psi_{ijmn}\|_F}{\|\Psi_{ijmn}\|_F},$$

где  $\Psi_{ijmn}$  — имеющиеся матрицы  $\ln(\Sigma)$  в узлах сетки параметрического пространства. Полученные относительные ошибки представлены на рис. 6. По горизонтальной оси — номер эксперимента, рассчитанный по правилу

$$K = 100(n-1) + 20(m-1) + 5(j-1) + i,$$

где  $n = 1, \dots, 5$ ,  $m = 1, \dots, 5$ ,  $j = 1, \dots, 4$  и  $i = 1, \dots, 5$ , т.е. одномерное представление четырехмерного массива. На рисунке видно, что относительные ошибки линейной регрессии по длине корреляции  $I$  не превышают 0.05.

Аналогичные процедуры были выполнены и для других параметров. На рис. 6 видно, что относительные ошибки регрессии по стандартному отклонению не превышают 0.03. В то же время относительные ошибки регрессий по остальным параметрам  $\hat{c}_{55}^l$  и  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l$  значительно выше (достигают 0.35 и 0.3 соответственно), кроме того, они возрастают с увеличением этих параметров (рис. 7).

Представленный анализ показывает, что компоненты матриц  $\Psi = \ln(\Sigma)$  являются линейными функциями  $\ln(I)$  и  $\ln(\phi)$ . Можно вычислить билинейную регрессию; т.е. для каждой пары  $\left( (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{55}^l)_n \right)$  мы можем найти аппроксимацию  $\Psi$  в следующем виде:

$$\widetilde{\Psi}_{mn} = \widetilde{\Psi} \left( (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{55}^l)_n, \varphi, I \right) = B_{mn}^{11} \varphi I + B_{mn}^{10} \varphi + B_{mn}^{01} I + B_{mn}^{00}, \quad (11)$$

где матрицы  $B_{mn}^{11}, \dots, B_{mn}^{00}$  зависят от параметров  $\left( (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{55}^l)_n \right)$ . Решение этой задачи тоже находится методом наименьших квадратов, а относительная ошибка оценивается представленным выше способом. На рис. 8 видно, что относительная ошибка для билинейной регрессии не превышает 0,05. Следовательно, компоненты логарифмов ковариационных матриц линейно зависят от  $\ln(\varphi)$  и  $\ln(I)$ , а значит их можно определить по четырем матрицам коэффициентов линейной аппроксимации  $B_{mn}^{11}, \dots, B_{mn}^{00}$ . Однако зависимость от физических параметров внутреннего слоя является более сложной, и восстановление значений между ними требует другого подхода. Мы предлагаем использовать стандартную линейную покомпонентную интерполяцию с использованием двух ближайших точек, т.е.

$$\begin{aligned}\Psi \left( \hat{c}_{55}^l, \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l} \right) &= \alpha^n \beta^m \Psi \left( (\hat{c}_{55}^l)_n, \left( \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l} \right)_m \right) + (1 - \alpha^n)(1 - \beta^m) \Psi \left( (\hat{c}_{55}^l)_{n+1}, \left( \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l} \right)_{m+1} \right) + \\ &+ \alpha^n (1 - \beta^m) \Psi \left( (\hat{c}_{55}^l)_n, \left( \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l} \right)_{m+1} \right) + (1 - \alpha^n) \beta^m \Psi \left( (\hat{c}_{55}^l)_{n+1}, \left( \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l} \right)_m \right), \quad (12) \\ \alpha^n &= \frac{(\hat{c}_{55}^l)_{n+1} - \hat{c}_{55}^l}{(\hat{c}_{55}^l)_{n+1} - (\hat{c}_{55}^l)_n}, \quad \beta^m = \frac{\left( \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l} \right)_{m+1} - \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l}}{\left( \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l} \right)_{m+1} - \left( \frac{\hat{c}_{11}^l}{\hat{c}_{55}^l} \right)_m},\end{aligned}$$

где порядковые номера  $m$  и  $n$  параметров выбираются, как номера ближайших точек на сетке:  $\hat{c}_{55}^l \in [(\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{55}^l)_{n+1}]$  и  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l \in [(\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_{m+1}]$ .

В итоге, алгоритм восстановления ковариационной матрицы в произвольной точке параметрического пространства  $[I, \varphi, \hat{c}_{55}^l, \hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l]$  выглядит следующим образом:

1. Вычисляются матричные логарифмы ковариационных матриц  $\ln(\Sigma_{ijnm})$  для всех наборов параметров  $[I, \varphi, (\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m]$ .

2. Вычисляется линейная регрессия  $\ln(\Sigma_{ijnm})$  по длине корреляции  $\ln(I)$  и стандартному отклонению  $\ln(\varphi)$  для всех значений физических параметров  $(\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m$ , т.е. вычисляются матрицы  $B^{00}, B^{10}, B^{01}, B^{11}$  из формулы (11).
3. Находятся ближайшие значения физических параметров:  $(\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{55}^l)_{n+1}, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_{m+1}$  для формулы (12) и с помощью формулы билинейной регрессии (11) вычисляются четыре матрицы  $\Psi(I, \varphi, (\hat{c}_{55}^l)_n, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m), \Psi(I, \varphi, (\hat{c}_{55}^l)_{n+1}, (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)_m)$  и т.д.
4. Используется билинейная интерполяция (12), чтобы вычислить матрицу  $\Psi(I, \varphi, (\hat{c}_{55}^l), (\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l))$  в произвольно заданной точке.
5. Вычисляется ковариационная матрица  $\Sigma = \exp(\Psi)$ .

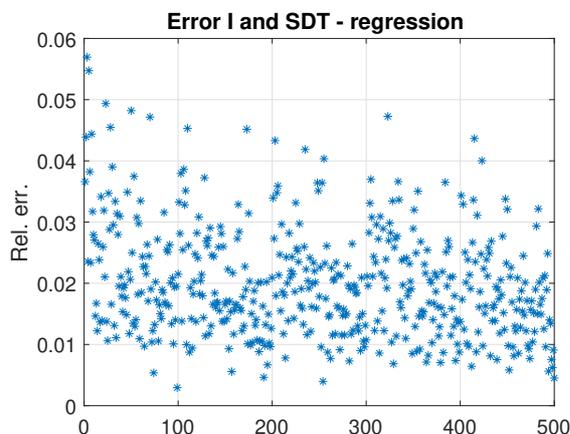


Рис. 8. Относительная ошибка линейной регрессии по параметру  $\hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l$ . Горизонтальная ось представляет номер эксперимента

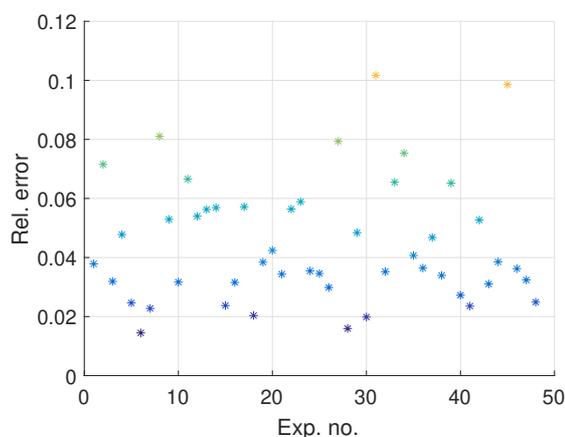


Рис. 9. Относительная ошибка восстановленных ковариационных матриц  $\Psi$  для экспериментов со случайным набором параметров. Горизонтальная ось представляет номер эксперимента. Цвет маркера соответствует величине ошибки

**5.2. Верификация.** Чтобы проверить алгоритм восстановления ковариационной матрицы, мы сгенерировали 48 наборов данных для случайных значений четырех параметров из непрерывной области параметрического пространства. Каждый набор данных состоит из 96 реализаций шероховатой модели с заданными параметрами, по которым восстановлены наборы тензоров жесткости для внутреннего слоя, заполняющего ровные границы. Мы вычислили ковариационные матрицы для этих тензоров жесткости и сравнили их с полученными алгоритмом, описанным выше. На рис. 9 показана относительная погрешность восстановленных матриц  $\Psi$  по сравнению с полученными из численных экспериментов:

$$R_N = \frac{\|\hat{\Psi}_N - \Psi_N\|_F}{\|\Psi_N\|_F}.$$

Во всех случаях относительная погрешность не превышает 0.1. Таким образом, алгоритм восстановления ковариационной матрицы можно использовать для дальнейшего статистического моделирования значений тензоров жесткости внутреннего слоя в моделях с ровными границами, но со случайным материалом во внутреннем слое.

Кроме того, мы рассмотрели зависимость ошибки аппроксимации от значения входных параметров. В частности, мы построили проекции всех 48 точек в четырехмерном пространстве на плоскости  $(I, \varphi)$  и  $(\hat{c}_{55}^l, \hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)$  (рис. 10). Цвет маркеров соответствует значению ошибки. Как видно на рисунке, ошибка восстановления ковариационной матрицы не зависит от  $I$  и  $\varphi$ . Однако при рассмотрении проекций на плоскость  $(\hat{c}_{55}^l, \hat{c}_{11}^l/\hat{c}_{55}^l)$  можно заметить возрастание относительной ошибки с увеличением значения параметра  $\hat{c}_{55}^l$ . Это может быть вызвано уменьшением контраста между упругими модулями слоев исходной модели  $\hat{C}^b$  и  $\hat{C}^l$ . Если они совпадут, то процедура восстановления матрицы жесткости будет точной и независимой от шероховатости границ раздела, поэтому ковариационная матрица будет иметь ранг

1, и приближение к ней будет строиться нелинейным методом для небольшого возмущения физических параметров материала во внутреннем слое.

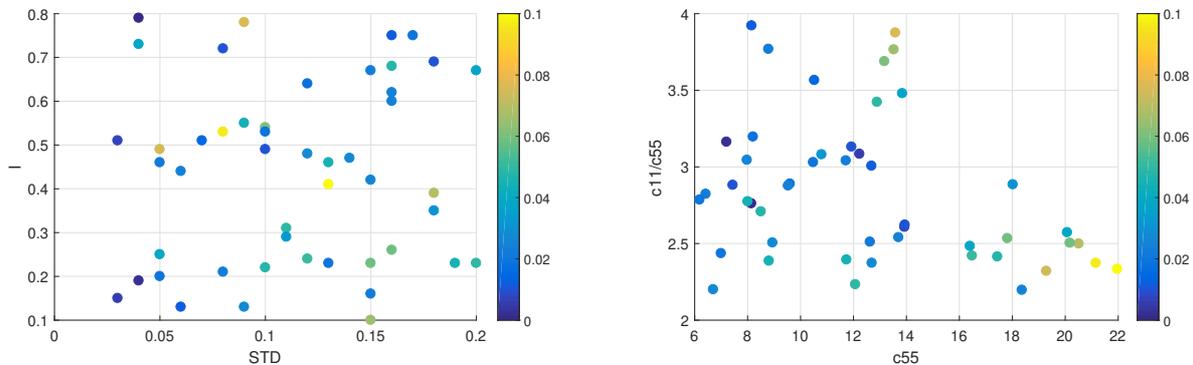


Рис. 10. Относительная ошибка восстановленных ковариационных матриц  $\Psi$  для экспериментов со случайным набором параметров. Цвет маркера соответствует величине ошибки

**6. Заключение.** В работе представлено численное исследование влияния шероховатости границ раздела в слоистой среде на эффективные упругие свойства тонкослойной среды. Также предложен алгоритм построения статистически эквивалентных моделей слоистых сред двух различных типов. Первый тип включает в себя модели с постоянными упругими параметрами, но с шероховатой границей раздела. Второй тип состоит из моделей с плоскими границами раздела, но с параметрами, задаваемыми случайными величинами. При этом распределение упругих параметров в моделях второго типа (средние значения и ковариационная матрица) однозначно определяется шероховатостью в границ раздела (длина корреляции и стандартное отклонение) в моделях первого типа. В частности, показано, что логарифм ковариационной матрицы линейно зависит от логарифмов длины корреляции и стандартного отклонения шероховатости, что позволяет проводить высокоточную интерполяцию ковариационной матрицы по малому числу предварительно насчитанных экспериментов. В работе показано, что относительная ошибка такой интерполяции не превосходит 10%, что является приемлемой точностью при геостатистическом моделировании.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-05-00031, 18-01-00579, 19-01-00347) и поддержана грантом Президента РФ для молодых ученых — докторов наук МД-20.2019.5. Расчеты проводились на суперкомпьютере “Ломоносов” Московского государственного университета и кластере НКС-30Т Сибирского суперкомпьютерного центра.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варыгина М.П., Похабова М.А., Садовская О.В., Садовский В.М. Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 435–442.
2. Васильев Р.В., Герке К.М., Карсанина М.В., Корост Д.В. Решение уравнения Стокса в трехмерной геометрии конечно-разностным методом // Математическое моделирование. 2015. **27**, № 6. 67–80.
3. Гадьяльшина К.А., Хачкова Т.С., Лисица В.В. Численное моделирование химического взаимодействия флюида с горной породой // Вычислительные методы и программирование. 2019. **20**. 457–470.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
5. Новиков М.А., Базайкин Я.В., Лисица В.В., Козяев А.А. Моделирование волновых процессов в трещиновато-пористых средах: влияние связности трещин на поглощение сейсмической энергии // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 235–252.
6. Новиков М.А., Лисица В.В., Козяев А.А. Численное моделирование волновых процессов в трещиновато-пористых флюидонаполненных средах // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 130–149.
7. Решетова Г.В., Хачкова Т.С. Численный метод оценки эффективных упругих характеристик горной породы по двумерным и трехмерным цифровым изображениям ядра // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**, № 4. 416–433.
8. Рытов С.М., Крайцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
9. Садовский В.М., Садовская О.В. Вычислительный алгоритм для расчета вязкоупругих волн в среде Кельвина-Фойхта // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 98–108.

10. Abe S., van Gent H., Urai J.L. DEM simulation of normal faults in cohesive materials // *Tectonophysics*. 2011. **512**. 12–21.
11. Andra H., Combaret N., Dvorkin J., Glatt E., Han J., Kabel M., Keehm Y., Krzikalla F., Lee M., Madonna C., Marsh M., Mukerji T., Saenger E., Sain R., Saxena N., Ricker S., Wiegmann A., Zhan X. Digital rock physics benchmarks. Part I: Imaging and segmentation // *Computers and Geosciences*. 2013. **50**. 25–32.
12. Andra H., Combaret N., Dvorkin J., Glatt E., Han J., Kabel M., Keehm Y., Krzikalla F., Lee M., Madonna C., Marsh M., Mukerji T., Saenger E., Sain R., Saxena N., Ricker S., Wiegmann A., Zhan X. Digital rock physics benchmarks. Part II: Computing effective properties // *Computers and Geosciences*. 2013. **50**. 33–43.
13. Backus G.E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering // *Journal of Geophysical Research*. 1962. **67**, N 11. 4427–4440.
14. Binesh S.M., Eslami-Feizabad E., Rahmani R. Discrete element modeling of drained triaxial test: Flexible and rigid lateral boundaries // *International Journal of Civil Engineering*. 2018. **16**, N 10. 1463–1474.
15. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. **28**. 168–178.
16. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. **28**. 179–191.
17. Capdeville Y., Guillot L., Marigo J.J. 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P–SV waves // *Geophysical Journal International*. 2010. **182**, N 2. 903–922.
18. Carcione J.M., Picotti S., Cavallini F., Santos J.E. Numerical test of the Schoenberg–Muir theory // *Geophysics*. 2012. **77**, N 2. C27–C35.
19. Carcione J.M., Santos J.E., Picotti S. Anisotropic poroelasticity and wave-induced fluid flow: harmonic finite-element simulations // *Geophysical Journal International*. 2011. **186**, N 3. 1245–1254.
20. Cundall P.A., Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies // *Geotechnique*. 1979. **29**, N 1. 47–65.
21. Gelinsky S., Shapiro S.A. Poroelastic Backus averaging for anisotropic layered fluid- and gas-saturated sediments // *Geophysics*. 1997. **62**, N 6. 1867–1878.
22. Gerke K.M., Karsanina M.V., Katsman R. Calculation of tensorial flow properties on pore level: Exploring the influence of boundary conditions on the permeability of three-dimensional stochastic reconstructions // *Physical Review E*. 2019. **100**, N 5. 053312.
23. Hardy S., Finch E. Discrete-element modelling of detachment folding // *Basin Research*. 2005. **17**, N 4. 507–520.
24. Hardy S., McClay K., Mumoz J.A. Deformation and fault activity in space and time in high-resolution numerical models of doubly vergent thrust wedges // *Marine and Petroleum Geology*. 2009. **26**. 232–248.
25. Iassonov P., Gebrenegus T., Tuller M. Segmentation of X-ray computed tomography images of porous materials: A crucial step for characterization and quantitative analysis of pore structures // *Water Resources Research*. 2009. **45**, N 9. W09415.
26. Lisitsa V., Tcheverda V., Volianskaia V. GPU-accelerated discrete element modeling of geological faults // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. **1392**. 012070.
27. Lisitsa V., Tcheverda V., Volianskaia V. GPU-based implementation of discrete element method for simulation of the geological fault geometry and position // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. 2018. **5**, N 3. 46–50.
28. Luding S. Introduction to discrete element methods // *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 2008. **12**, N 7–8. 785–826.
29. Masson Y.J., Pride S.R. Finite-difference modeling of Biot’s poroelastic equations across all frequencies // *Geophysics*. 2010. **75**, N 2. N33–N41.
30. Meng J., Huang J., Sheng D., Sloan S.W. Granular contact dynamics with elastic bond model // *Acta Geotechnica*. 2017. **12**, N 3. 479–493.
31. Muir F., Dellinger J., Etgen J., Nichols D. Modeling elastic fields across irregular boundaries // *Geophysics*. 1992. **57**, N 9. 1189–1193.
32. Royston J.P. Some techniques for assessing multivariate normality based on the Shapiro–Wilk W // *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*. 1983. **32**, N 2. 121–133.
33. Sabelfeld K.K. Monte Carlo methods in boundary value problems. Berlin: Springer, 1991.
34. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Lukyanov A.A. Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers // *Journal of Computational Physics*. 2017. **345**. 834–855.
35. Saenger E.H. Numerical methods to determine effective elastic properties // *International Journal of Engineering Science*. 2008. **46**, N 6. 598–605.
36. Saenger E.H., Enzmann F., Keehm Y., Steeb H. Digital rock physics: Effect of fluid viscosity on effective elastic properties // *Journal of Applied Geophysics*. 2011. **74**, N 4. 236–241.
37. Saenger E.H., Lebedev M., Uribe D., et al. Analysis of high-resolution X-ray computed tomography images of Bentheim sandstone under elevated confining pressures // *Geophysical Prospecting*. 2016. **64**, N 4. 848–859.
38. Schoenberg M., Muir F. A calculus for finely layered anisotropic media // *Geophysics*. 1989. **54**, N 5. 581–589.
39. Theocharis A., Roux J.N., Langlois V. Elasticity of model weakly cemented granular materials: A numerical study // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. **193–194**. 13–27.

40. MATLAB Central File Exchange // <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/17811-roystest>. 2020.
41. Vishnevsky D., Lisitsa V., Tcheverda V., Reshetova G. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves // *Geophysics*. 2014. **79**, N 4. T219–T232.
42. Zhu Y., Tsvankin I., Vasconcelos I. Effective attenuation anisotropy of thin-layered media // *Geophysics*. 2007. **72**, N 5. D93–D106.

Поступила в редакцию  
30.05.2020

---

## Numerical Estimation of Interface Roughness Effect on Upscaled Elastic Properties of Layered Media

T. S. Khachkova<sup>1</sup>, V. V. Lisitsa<sup>2</sup>, D. R. Kolyukhin<sup>3</sup>, and G. V. Reshetova<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Scientist, e-mail: KhachkovaTS@ipgg.sbras.ru*

<sup>2</sup> *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Associate Professor, Head of Laboratory, e-mail: lisitsavv@ipgg.sbras.ru*

<sup>3</sup> *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: KolyukhinDR@ipgg.sbras.ru*

<sup>4</sup> *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: kgv@nmsf.sccc.ru*

Received May 30, 2020

**Abstract:** We discuss a numerical study of the interface roughness effect on elastic moduli of an upscaled model of layered media. We propose a numerical algorithm to construct statistically equivalent models of two different types. The first type includes the models with constant elastic moduli but with rough interfaces. The second type consists of models with flat interfaces but with stochastic elastic moduli. It is shown that the distribution of the elastic moduli for the models of the second type is uniquely determined by the interface roughness in the models of the first type.

**Keywords:** geostatistical modeling, elasticity, numerical upscaling.

### References

1. M. P. Varygina, M. A. Pokhabova, O. V. Sadovskaya, and V. M. Sadovskii, “Numerical Algorithms for the Analysis of Elastic Waves in Block Media with Thin Interlayers,” *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 435–442 (2011).
2. R. V. Vasilyev, K. M. Gerke, M. V. Karsanina, and D. V. Korost, “Solution of the Stokes Equation in Three-Dimensional Geometry by the Finite-Difference Method,” *Mat. Model.* **27** (6), 67–80 (2015) [*Math. Models Comput. Simul.* **8** (1), 63–72 (2016)].
3. K. A. Gadyshina, T. S. Khachkova, and V. V. Lisitsa, “Numerical Modeling of Chemical Interaction between a Fluid and Rocks,” *Vychisl. Metody Programm.* **20**, 457–470 (2019).
4. R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity: An Introduction* (Academic Press, New York, 1971; Mir, Moscow, 1974).
5. M. A. Novikov, Ya. V. Bazaikin, V. V. Lisitsa, and A. A. Kozyaev, “Numerical Modeling of Wave Propagation in Fractured Porous Fluid-Saturated Media,” *Vychisl. Metody Programm.* **19**, 235–252 (2018).
6. M. A. Novikov, V. V. Lisitsa, and A. A. Kozyaev, “Numerical Modeling of Wave Processes in Fractured Porous Fluid-Saturated Media,” *Vychisl. Metody Programm.* **19**, 130–149 (2018).
7. G. V. Reshetova and T. S. Khachkova, “A Numerical Method to Estimate the Effective Elastic Moduli of Rocks from Two- and Three-Dimensional Digital Images of Rock Core Samples,” *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 416–433 (2017).

8. S. M. Rytov, Yu. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics 2. Correlation Theory of Random Processes* (Springer, Berlin, 1988; Nauka, Moscow, 1978).
9. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, "A Numerical Algorithm for the Analysis of Viscoelastic Waves in the Kelvin–Voigt Medium," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 98–108 (2014).
10. S. Abe, H. van Gent, and J. L. Urai, "DEM Simulation of Normal Faults in Cohesive Materials," *Tectonophysics* **512** (1–4), 12–21 (2011).
11. H. Andrä, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., "Digital Rock Physics Benchmarks — Part I: Imaging and Segmentation," *Comput. Geosci.* **50**, 25–32 (2013).
12. H. Andrä, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., "Digital Rock Physics Benchmarks — Part II: Computing Effective Properties // *Comput. Geosci.* **50**, 33–43 (2013).
13. G. E. Backus, "Long-Wave Elastic Anisotropy Produced by Horizontal Layering," *J. Geophys. Res.* **67** (11), 4427–4440 (1962).
14. S. M. Binesh, E. Eslami-Feizabad, and R. Rahmani, "Discrete Element Modeling of Drained Triaxial Test: Flexible and Rigid Lateral Boundaries," *Int. J. Civil Eng.* **16** (10), 1463–1474 (2018).
15. M. A. Biot, "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range," *J. Acoust. Soc. Am.* **28** (2), 168–178 (1956).
16. M. A. Biot, "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range," *J. Acoust. Soc. Am.* **28** (2), 179–191 (1956).
17. Y. Capdeville, L. Guillot, and J.-J. Marigo, "2-D Non-Periodic Homogenization to Upscale Elastic Media for P–SV Waves," *Geophys. J. Int.* **182** (2), 903–922 (2010).
18. J. M. Carcione, S. Picotti, F. Cavallini, J. E. Santos, "Numerical Test of the Schoenberg–Muir Theory," *Geophysics* **77** (2), C27–C35 (2012).
19. J. M. Carcione, J. E. Santos, and S. Picotti, "Anisotropic Poroelasticity and Wave-Induced Fluid Flow: Harmonic Finite-Element Simulations," *Geophys. J. Int.* **186** (3), 1245–1254 (2011).
20. P. A. Cundall and O. D. L. Strack, "A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies," *Geotechnique* **29** (1), 47–65 (1979).
21. S. Gelinsky and S. A. Shapiro, "Poroelastic Backus Averaging for Anisotropic Layered Fluid- and Gas-Saturated Sediments," *Geophysics* **62** (6), 1867–1878 (1997).
22. K. M. Gerke, M. V. Karsanina, and R. Katsman, "Calculation of Tensorial Flow Properties on Pore Level: Exploring the Influence of Boundary Conditions on the Permeability of Three-Dimensional Stochastic Reconstructions," *Phys. Rev. E* **100** (2019). doi 10.1103/PhysRevE.100.053312
23. S. Hardy and E. Finch, "Discrete-Element Modelling of Detachment Folding," *Basin Res.* **17** (4), 507–520 (2005).
24. S. Hardy, K. McClay, and J. A. Munoz, "Deformation and Fault Activity in Space and Time in High-Resolution Numerical Models of Doubly Vergent Thrust Wedges," *Mar. Petrol. Geol.* **26** (2), 232–248 (2009).
25. P. Iassonov, T. Gebrenegus, and M. Tuller, "Segmentation of X-Ray Computed Tomography Images of Porous Materials: A crucial Step for Characterization and Quantitative Analysis of Pore Structures," *Water Resour. Res.* **45** (2009). doi 10.1029/2009WR008087
26. V. Lisitsa, V. Tcheverda, and V. Volianskaia, "GPU-Accelerated Discrete Element Modeling of Geological Faults," *J. Phys. Conf. Ser.* **1392** (2019). doi: 10.1088/1742-6596/1392/1/012070
27. V. V. Lisitsa, V. T. Tcheverda, and V. V. Volianskaia, "GPU-based Implementation of Discrete Element Method for Simulation of the Geological Fault Geometry and Position," *Supercomput. Front. Innov.* **5** (3), 46–50 (2018).
28. S. Luding, "Introduction to Discrete Element Methods," *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* **12** (7–8), 785–826 (2008).
29. Y. J. Masson and S. R. Pride, "Finite-Difference Modeling of Biot's Poroelastic Equations across all Frequencies," *Geophysics* **75** (2), N33–N41 (2010).
30. J. Meng, J. Huang, D. Sheng, and S. W. Sloan, "Granular Contact Dynamics with Elastic Bond Model," *Acta Geotech.* **12** (3), 479–493 (2017).
31. F. Muir, J. Dellinger, J. Etgen, and D. Nichols, "Modeling Elastic Fields across Irregular Boundaries," *Geophysics* **57** (9), 1189–1193 (1992).
32. J. P. Royston, "Some Techniques for Assessing Multivariate Normality Based on the Shapiro–Wilk W," *J. Roy. Stat. Soc. C (Appl. Stat.)* **32** (2), 121–133 (1983).
33. K. K. Sabelfeld, *Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems* (Springer, Berlin, 1991).
34. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and A. A. Lukyanov, "Modeling of Wave Processes in Blocky Media with Porous and Fluid-Saturated Interlayers," *J. Comput. Phys.* **345**, 834–855 (2017).

35. E. H. Saenger, "Numerical Methods to Determine Effective Elastic Properties," *Int. J. Eng. Sci.* **46** (6), 598–605 (2008).
36. E. H. Saenger, F. Enzmann, Y. Keehm, and H. Steeb, "Digital Rock Physics: Effect of Fluid Viscosity on Effective Elastic Properties," *J. Appl. Geophys.* **74** (4), 236–241 (2011).
37. E. H. Saenger, M. Lebedev, D. Uribe, et al., "Analysis of High-Resolution X-Ray Computed Tomography Images of Bentheim Sandstone under Elevated Confining Pressures," *Geophys. Prospect.* **64** (4), 848–859 (2016).
38. M. Schoenberg and F. Muir, "A Calculus for Finely Layered Anisotropic Media," *Geophysics* **54** (5), 581–589 (1989).
39. A. Theocharis, J.-N. Roux, and V. Langlois, "Elasticity of Model Weakly Cemented Granular Materials: A numerical Study," *Int. J. Solids Struct.* **193–194**, 13–27 (2020).
40. MATLAB Central File Exchange  
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/17811-roystest>. Cited June 30, 2020.
41. D. Vishnevsky, V. Lisitsa, V. Tcheverda, and G. Reshetova, "Numerical Study of the Interface Errors of Finite-Difference Simulations of Seismic Waves," *Geophysics* **79** (4), T219–T232 (2014).
42. Y. Zhu, I. Tsvankin, and I. Vasconcelos, "Effective Attenuation Anisotropy of Thin-Layered Media," *Geophysics* **72** (5), D93–D106 (2007).