

УДК 519.63

doi 10.26089/NumMet.v21r436

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЕЛКОВОДНОМ ВОДОЕМЕ

А. И. Сухинов¹, А. Е. Чистяков², В. Н. Литвинов³,
А. В. Никитина⁴, Ю. В. Белова⁵, А. А. Филина⁶

Статья посвящена изучению нелинейных эффектов в динамике популяции промысловой рыбы пилленгас Азовского моря при низкой и высокой ее численности с учетом эффекта Олли, конкуренции за ресурсы, таксиса, вылова, пространственного распределения биогенных веществ и детрита на основе многовидовой модели взаимодействия планктона и рыб. Дискретный аналог разработанной модельной задачи водной экологии, входящей в состав программного комплекса, получен на основе схем второго порядка точности с учетом частичной заполненности расчетных ячеек. Возникающая в процессе дискретизации система сеточных уравнений большой размерности была решена на основе модифицированного попеременно-треугольного метода, имеющего наибольшую скорость сходимости при условии асимптотической устойчивости разностных схем для параболических уравнений, эффективность которого была улучшена на основе уточненных спектральных оценок. Разработка эффективных параллельных алгоритмов численной реализации поставленной задачи биологической кинетики, ориентированных на многопроцессорную вычислительную систему (МВС) и графический ускоритель NVIDIA Tesla K80 с модификацией формата хранения данных, позволила анализировать процессы воспроизводства популяций биогидроценоза в режиме реального и ускоренного времени.

Ключевые слова: эффект Олли, таксис, математическая модель взаимодействия популяций, биогидроценоз, параллельный алгоритм, модифицированный формат хранения данных, программный комплекс, графический ускоритель.

1. Введение. Изучение динамики биологических сообществ, круговорота вещества и энергетического баланса, выявление причинно-следственных связей и механизмов отдельных процессов в экологических системах относится к числу фундаментальных проблем экологии и гидробиологии. В настоящее время возникла насущная потребность разработки средств предсказательного моделирования взаимосвязанных гидрофизических и биохимических процессов в мелководных водоемах, подобных Азовскому морю, до сих пор являющихся достаточно рыбопродуктивными. Отметим, что в последние десятилетия наметилась негативная тенденция сокращения численностей популяций ценных и промысловых рыб: осетра, стерляди, белуги, судака, тарани, рыбака, сазана, леща, сельди и др., а также вселения видов-пришельцев. Антропогенное воздействие приводит к эвтрофикации вод Азовского моря и бурному росту фитопланктона. По мнению специалистов, наряду с антропогенными причинами, негативные воздействия на водные экосистемы вызываются также эволюцией природно-климатических условий (изменение

¹ Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, 344000, г. Ростов-на-Дону; чл.-корр. РАН, профессор, зав. кафедрой, e-mail: sukhinov@gmail.com

² Донской государственный технический университет (ДГТУ), факультет информатики и вычислительной техники, пл. Гагарина, 1, 344000, г. Ростов-на-Дону; профессор, e-mail: cheese_05@mail.ru

³ Азово-Черноморский инженерный институт Донского государственного аграрного университета, ул. Ленина, 21, 347740, г. Зерноград; заведующий кафедрой, e-mail: litvinovvn@rambler.ru

⁴ Южный федеральный университет, ул. Б. Садовая, 105/42, 344006, г. Ростов-на-Дону; доцент, e-mail: nikitina.vm@gmail.com

⁵ Донской государственный технический университет (ДГТУ), пл. Гагарина, 1, 344000, г. Ростов-на-Дону; ассистент, e-mail: yvbelova@yandex.ru

⁶ ООО «НИЦ супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров», пер. Итальянский, 106, 347900, г. Таганрог; н.с., e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru

режимов солености и температуры) [1]. Создание математического и программно-алгоритмического инструментария, позволяющего осуществлять предсказательное моделирование значимых пространственных гидробиологических процессов и использующего данные относительно недорогих, не оказывающих негативного влияния на экосистему экспериментов, является актуальным. С помощью методов математического моделирования можно изучать процессы взаимодействия фито-, зоопланктона и промысловой рыбы пиленгас (*Mugil soiyu Basilewsky*), связанные с механизмами воспроизводства в исследуемом водоеме [2].

Одним из самых характерных свойств биологических объектов является наличие совокупности нелинейных воздействий, влияющих на функционирование изучаемой экологической системы. Эффект Олли заключается в объединении биологических особей в группы (агрегации), что, с одной стороны, усиливает конкуренцию между группами за пищевые ресурсы и жизненное пространство, но с другой стороны — увеличивает способность выживания группы особей в целом [3]. Изучением нелинейных эффектов взаимодействия биологических популяций в водоеме занимались В. В. Меншуткин [1], С. В. Бердников, Ю. В. Гютюнов [4], Р. А. Stephens [5], Y.-F. Liu, G. Wang [6] и др. В решении этих задач велика была роль отечественных ученых, в частности В. И. Вернадского (изучение живого вещества и морской геохимии), Н. М. Книповича (первые исследования морей и солоноватых вод), С. В. Бруевича (разработка аналитических методов исследований, формулирование основ гидро- и биогидрохимии), Г. Ю. Верещагина (изучение биогенных и органических веществ водоемов и водотоков), Г. Г. Винберга [7] (исследование процессов формирования биологической продуктивности водоемов) и др. Изучением вопроса оптимальной эксплуатации водных ресурсов, разработкой моделей транспорта загрязняющих веществ в водоемах и исследованием оценки их воздействия на биоресурсы водоема активно занимались Г. Г. Матишов, В. Г. Ильичев [8]. Большая теоретическая работа в этом направлении была проведена М. Е. Берляндом. Им были разработаны и исследованы модели распространения загрязняющих веществ от точечных, линейных и площадных источников как непрерывного, так и мгновенного действия.

При моделировании процессов гидрофизики и биологической кинетики мелководных водоемов возникают системы линейных алгебраических уравнений большой размерности (10^7 и выше), решение которых требует значительных временных затрат и вычислительных ресурсов. В настоящее время много публикаций посвящено параллельной реализации задач этого класса [9, 10]. Существуют универсальные пакеты прикладных программ, которые могут использоваться для моделирования гидробиологических процессов (FlowVision, FLUENT, GAS DYNAMICS TOOL, PHOENICS, Star-CD и т.д.). Часть пакетов прикладных программ ориентирована на многопроцессорные вычислительные системы, но зачастую они включают ограниченное число моделей, алгоритмов и методов, используемых для разных случаев. Программы, направленные на решение конкретных прикладных задач водной экологии, более эффективны. Большая часть известного специализированного программного обеспечения (ADAM, CAL3QHC, Chensi, TASCflow, ISC-3, PANACHE, REMSAD, UAM-IV, ЭКОЛОГ, ПРИЗМА, VITECON), предназначенного для расчета распространения загрязняющих веществ, взаимодействия планктона и рыб, ориентирована на однопроцессорные системы. Только отдельные модули специализированных программных систем (например, ECOSIM и MAQSIP), адаптированные для работы на многопроцессорных системах, распараллелены. Этот факт не позволяет достичь высокой эффективности алгоритмов, реализующих поставленные задачи биологической кинетики.

В связи с вышесказанным возникает необходимость в разработке методов и средств математического моделирования гидробиологических процессов динамики токсичных, вредоносных и других водорослей, зоопланктона и рыб с учетом влияния нелинейных эффектов в процессах взаимодействия популяций биогидроценоза мелководного водоема. Для получения оперативных прогнозов изменения экологической обстановки мелководного водоема (например, при чрезвычайных ситуациях) возникает необходимость в разработке программного обеспечения, ориентированного на высокопроизводительные вычислительные системы, позволяющего моделировать динамику изменения гидробиологических процессов водоема и их возможные последствия в условиях ограниченного времени.

2. Постановка задачи. Создание и использование моделей экосистем является неотъемлемой частью их комплексного исследования как для оценки их состояния, изучения процессов эвтрофирования, переноса и трансформации загрязняющих веществ, воспроизводства популяций промысловых и ценных рыб, решения задач рационального использования их ресурсов, сохранения качества вод, так и для построения прогнозов дальнейшего развития под влиянием антропогенных и климатических факторов.

2.1. Моделирование динамики промысловой рыбы. Многовидовая математическая модель взаимодействия промысловой рыбы пиленгас основана на системе нестационарных уравнений конвекции–диффузии–реакции параболического типа с нелинейными функциями источников и младшими производными, которые для каждого модельного блока F_i представлены в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U} \cdot F_i) = \mu_i \Delta F_i + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \frac{\partial F_i}{\partial z} \right) + \psi_i, \\ \psi_1 = g_1(F_1, F_3) - \delta_1 F_1 F_2 - \sigma_1 F_1 F_5 - \lambda_1 F_1, \\ \psi_2 = g_2(F_1, F_2) - \delta_2 F_2 - \lambda_2 F_2, \\ \psi_3 = \gamma_3 \lambda_4 F_4 - g_3(F_1, F_3) + B(\tilde{F}_3 - F_3) + f, \\ \psi_4 = \lambda_1 F_1 - g_4(F_4, F_5) + \lambda_2 F_2 - \lambda_4 F_4, \\ \psi_5 = g_5(F_4, F_5) - \delta_5 F_5 - \lambda_5 F_5, \end{array} \right. \quad (1)$$

где F_i — концентрация i -ой компоненты, $i = \overline{1, 5}$; ψ_i — химико-биологический источник (сток) или член, описывающий агрегирование (слипание–разлипание), если соответствующая компонента является взвесью; i — номер субстанции, $i = \overline{1, 5}$, концентрации: 1 — фитопланктона *Coscinodiscus* (X), 2 — зоопланктона *Copepoda* (Z), 3 — загрязняющего биогенного вещества (S) (в качестве него могут выступать соединения азота, фосфора или кремния, поступающие в водоем со стоками рек и из воздуха, — минеральное питание водорослей), 4 — детрита (D), 5 — пиленгаса *Mugil soiyuy* (P); $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_i$ — скорость конвективного переноса вещества; \mathbf{u} — поле скоростей водного потока; \mathbf{u}_i — скорость осаждения i -ой субстанции под действием силы тяжести; μ_i, ν_i — диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях субстанций, $i = \overline{1, 5}$; Δ — двумерный оператор Лапласа; g_i — трофические функции для субстанций, $i = \overline{1, 5}$.

Функции в (1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_1(F_1, F_3) &= \gamma_1 \alpha_1 F_1 F_3, & g_2(F_1, F_2) &= \gamma_2 \delta_1 F_1 F_2, \\ g_3(F_1, F_3) &= \alpha_1 F_1 F_3, & g_4(F_4, F_5) &= \beta_4 F_4 F_5, \\ g_5(F_1, F_4, F_5) &= \alpha_5 (\gamma_5 \beta_4 F_4 + \xi_5 \sigma_1 F_1) F_5 R, \end{aligned}$$

где α_1, α_5 — функции роста фитопланктона и пиленгаса; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5$ — передаточные коэффициенты трофических функций; γ_3 — доля питательного вещества S , находящегося в биомассе фитопланктона X ; λ_1 — коэффициент, учитывающий смертность и метаболизм X ; δ_1 — убыль фитопланктона X за счет выедания зоопланктоном Z ; λ_2, λ_5 — коэффициенты элиминации (смертности) Z, P соответственно; δ_2 — убыль зоопланктона Z за счет выедания рыбами; δ_5 — убыль пиленгаса P за счет выедания рыбами и вылова; \tilde{F}_3 — предельно возможная концентрация биогенного вещества S ; $f = f(t, x, y, z)$ — функция источника загрязнения; B — удельная скорость поступления загрязняющего биогенного вещества S ; λ_4 — коэффициент разложения детрита; β_4 — скорость потребления органических остатков пиленгасом P ; σ_1 — коэффициент убыли фитопланктона X в результате потребления его пиленгасом P ; ξ_5 — передаточный коэффициент роста концентрации пиленгаса P за счет фитопланктона X ; R — функция, определяющая количество рыбы, способной давать потомство.

Расчетная область $\tilde{G}(x, y, z, t)$ представляет собой замкнутую область, геометрически ограниченную невозмущенной поверхностью Азовского моря Σ_0 , дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$, боковой цилиндрической поверхностью σ и временным промежутком $0 < t \leq T_0$. Пусть $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$, \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности; \mathbf{U}_n — нормальная по отношению к Σ составляющая вектора скорости водного потока.

Начальные условия:

$$F_i|_{t=0} = F_{i0}(x, y, z), \quad i = \overline{1, 5}. \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_i = 0 & \text{на } \sigma, \text{ если } \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} < 0; \\ \frac{\partial F_i}{\partial n} = 0 & \text{на } \sigma, \text{ если } \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \geq 0; \\ \frac{\partial F_i}{\partial z} = \varphi(F_i) & \text{на } \Sigma_0; \\ \frac{\partial F_i}{\partial z} = -\varepsilon_i F_i & \text{на } \Sigma_H, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ — неотрицательные постоянные; $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5$ — учитывают опускание планктона и рыб на дно и их затопление; $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ — учитывают поглощение биогенного вещества и детрита донными отложениями; $\varphi(F_i)$ — описывает процесс оседания биогенного вещества из воздуха на поверхность водоема:

$$\varphi(F_i) = \begin{cases} \vartheta_i F_i, & i = 3; \\ 0, & i \in \{1, 2, 4, 5\}, \end{cases}$$

где ϑ_3 — удельная скорость поступления загрязняющего биогенного вещества из воздушной среды.

Схематически модель “рыба-фитопланктон-зоопланктон-питательные вещества-детрит” ($X \rightarrow Z \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow P$) представлена на рис. 1.

2.2. Изучение нелинейных эффектов биогидроценоза. В качестве входных данных для модели (1)–(3) использовались результаты расчетов по модели гидродинамики Азовского моря [11, 12], учитывающей ветровое воздействие, стоки рек (Дон, Кубань, Миус и около 40 малых водотоков), водообмен с другими водоемами, рельеф дна, сложную форму береговой линии, трение о дно, температуру, соленость, испарение и выпадение осадков, силу Кориолиса.

Изучение влияния таксиса на пространственное распределение популяций промысловой рыбы. Известно, что таксисы — это двигательные реакции организмов в ответ на односторонне действующий стимул. Источниками раздражения могут быть свет, температура, влага, химические вещества и другие. Раздражители (стимулы) любого типа могут вызывать как отрицательную, так и положительную двигательную реакцию организмов. В работе изучался пищевой таксис промысловой рыбы пиленгас. Таксис пелагических (обитающих в толще воды) рыб учитывался в явном виде, поскольку на любых масштабах он определяет перемещение рыбных скоплений по акватории. В математической биологии таксис

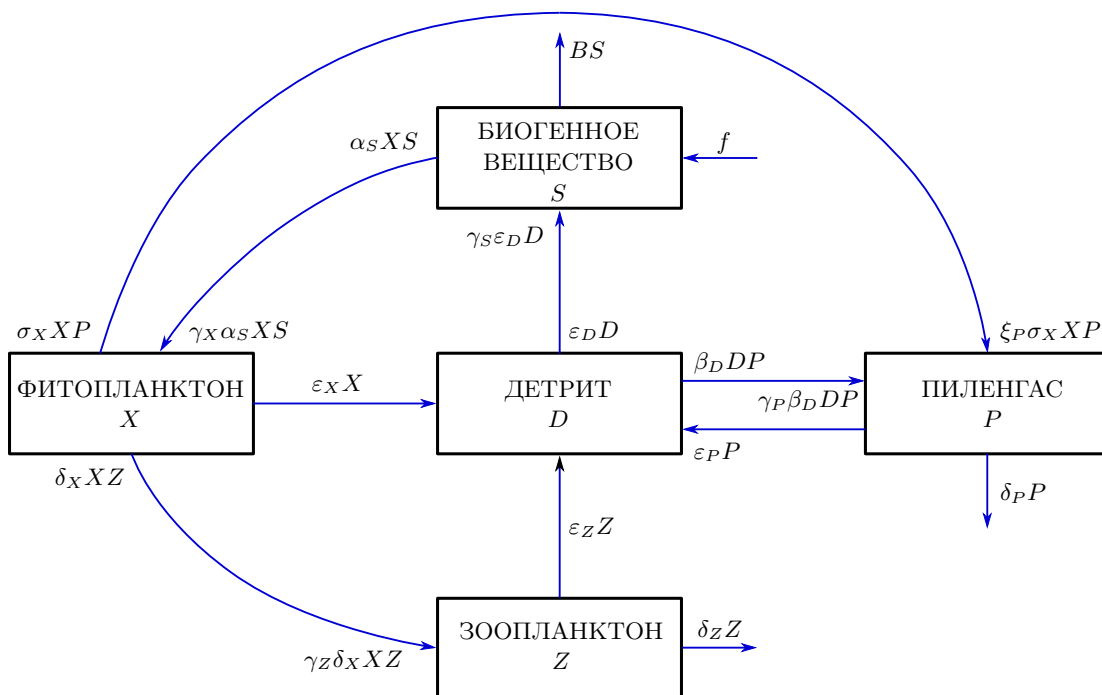


Рис. 1. Схема модели $X \rightarrow Z \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow P$

учитывается двояким образом. В одном случае взвешенному градиенту стимула ставится в соответствие скорость активного относительного движения организма (быстрый таксис), в другом — ускорение (медленный таксис). Предполагается, что стайные эффекты приводят к выравниванию скоростей движения рыб в изучаемой акватории. Предложенная модель имитирует пространственно-временную изменчивость скорости таксиса пиленгаса и концентраций фитопланктона, зоопланктона, пиленгаса, биогенного вещества и детрита. Таким образом, модельный таксис описывает не перемещения одного организма в неподвижной воде, а среднее движение большого числа особей.

Направление и скорость коллективного таксиса устанавливаются в процессе случайных блужданий и целенаправленного движения отдельных особей. Воздействие таких блужданий на коллективный таксис аналогично влиянию турбулентных пульсаций скорости на крупномасштабное течение жидкости и в уравнении для кормового таксиса пиленгаса может быть учтено как своеобразная диффузия. Стая пиленгаса не может мгновенно достичь скорости, соответствующей новому значению градиента концентрации детрита и фитопланктона, значит, в модели следует учитывать медленный таксис. Согласно работам Ю. В. Гютюнова [4], В. С. Латуна, В. Г. Ильичева [8], в уравнении для вектора скорости медленного таксиса необходимо также отразить следующие два обстоятельства. Во-первых, если в данном объеме воды корма для пиленгаса вполне достаточно, рыбе незачем спешить в соседний объем, даже если корма там несколько больше. Во-вторых, для скорости таксиса существует определенный физиологический предел, и в уравнении надо предусмотреть соответствующий ограничитель.

Построим модель, учитывающую влияние кормового таксиса на функционирование системы “фитопланктон → зоопланктон → биогенное вещество → детрит → пиленгас”. В результате к системе (1)–(3) добавим следующее уравнение [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_5}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}_5 \otimes \mathbf{u}_5) = \mu_u \Delta \mathbf{u}_5 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_u \frac{\partial \mathbf{u}_5}{\partial z} \right) - \alpha_u \mathbf{u}_5 + k_4 \operatorname{grad} F_4 + k_1 \operatorname{grad} F_1, \quad (4)$$

где $\mathbf{U}_5 = \mathbf{u} + \mathbf{u}_5$ — скорость конвективного переноса пиленгаса; \mathbf{u}_5 — скорость движения рыбы относительно воды, k_1, k_4 — коэффициенты таксиса; μ_u, ν_u — коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющих диффузии скорости таксиса; α_u — коэффициент сопротивления среды движению рыбы; \otimes — тензорное произведение векторов.

Поскольку пиленгас — детритофаг, он поедает чрезмерное количество отложений органических илов — остатков фито- и зоопланктона, разложение которых вызывает нехватку кислорода в воде и ведет к постоянным заморам рыб, особенно в летний период. Поэтому для учета распределения концентрации кислорода K в водоеме к системе (1)–(4) добавим уравнение

$$K = K_0 - mF_4 \quad (5)$$

с условием $K(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z, t) \in \partial G$, где K_0 — концентрация кислорода при отсутствии органических примесей; m — количество кислорода, необходимое для окисления детрита в толще водоема; θ — заданная функция.

Изучение эффекта Олли для предотвращения коллапса популяции промысловой рыбы. Для рационального использования, прогноза численности, выявления лимитирующих факторов, охраны и восстановления популяций биогидроценоза мелководного водоема необходимо учитывать эффект Олли, в основе которого лежит закон толерантности Шелфорда. Согласно этому закону, процветание организма ограничено зонами максимума и минимума определенных экологических факторов. Между ними располагается зона оптимума. Каждый вид характеризуется своей толерантностью — способностью переносить отклонения экологических факторов от оптимальных, аналогичное положение проявляется и в сообществах более высокого порядка — популяциях. Именно поэтому любая популяция стремится к динамическому равновесию, т.е. к гомеостазу, при достижении которого каждая популяция обладает строго определенной генетической, фенотипической, половозрастной и др. структурами. Она не может состоять из меньшего или большего числа индивидов, чем необходимо для обеспечения стабильной реализации структуры и устойчивости популяции к изменению факторов внешней среды [13], иначе возникает нарушение равновесия между биотическим потенциалом водоема (прибавление особей) и сопротивлением окружающей среды (гибелью особей).

При анализе эффекта Олли использовались многочисленные литературные источники, имеющиеся многолетние базы экологических данных. В работе было изучено влияние эффекта на изменение концентрации промысловой рыбы пиленгас. Было установлено, что интенсивный вылов рыбы может приводить к коллапсу популяции, причиняя серьезный и часто необратимый ущерб экосистеме.

В работе [14] были проанализированы нелинейные эффекты, возникающие в модели возрастной структуры популяций промысловой рыбы. Для изучения слабого или сильного эффекта Олли необходимо анализировать интенсивность вылова промысловой рыбы и подбирать ее пороговое значение, при котором коллапс невозможен (рис. 2). Согласно логистической (S-образной) модели роста численности Ф. Ферхюльста, Р. Перля и Л. Рида, удельная (в расчете на одну особь) скорость популяционного роста $\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$ по мере увеличения численности (плотности) популяции снижается линейно (на рис. 2 представлена наклонной прямой красного цвета). Эффект Олли заключается в том, что при низких значениях плотности популяции скорость популяционного роста вовсе не высокая, как в логистической модели, а низкая (может быть даже отрицательной, как показано на графике — сильный эффект Олли). По мере увеличения численности удельная скорость популяционного роста так же растет, и только достигнув некоего максимума, снижается, тем самым проявляется слабый эффект Олли в динамике промысловой рыбы пиленгас. В последнем случае предполагается наличие некоего порога минимальной численности, ниже которого популяция только уменьшается (отрицательное значение удельной скорости популяционного роста — кривая синего цвета на графике). Известно, что интенсивный вылов промысловых рыб у берегов Канады привел к коллапсу популяций трески в 1992 г. [15].

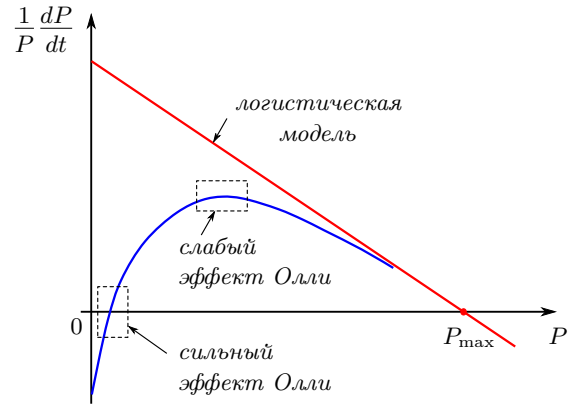


Рис. 2. Эффект Олли

Для описания химико-биологических источников модели (1)–(5) (функции $\psi_i, i = \overline{1,5}$) использовались функциональные зависимости, представляющие собой модели наблюдений. Различные функциональные зависимости, описывающие нелинейные эффекты биогидроценоза, представлены в табл. 1. В данной работе для учета влияния абиотических факторов на функцию роста планктона в моделях наблюдений использовались функциональные зависимости для солености (C) и температуры (T) в форме, предложенной Ю. А. Домбровским, для освещенности (I) в форме, предложенной К. Феннелом. Для изучения эффекта Олли в модели (1)–(5) использовалась зависимость, описанная в работе [14].

Демографический эффект Олли обусловлен свойствами самой популяции и всегда проявляется при низкой ее численности. Этот эффект может возникать за счет особенностей пищевой цепи, а также под влиянием внешних факторов, включая соленость, температуру и освещенность.

3. Аппроксимация многовидовой модели взаимодействующих популяций биогидроценоза.

3.1. Построение сеточных уравнений. Рассмотрим дискретизацию системы уравнений (1)–(5) на примере двумерного уравнения диффузии–конвекции–реакции (для трехмерной задачи выполнено подобным образом):

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + f \tag{6}$$

с граничными условиями третьего рода:

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n, \tag{7}$$

где u, v — компоненты скорости движения водного потока; μ — коэффициент турбулентного обмена; f — нелинейная функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

Для численной реализации дискретной математической модели использовалась равномерная сетка: $w_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y; n = 0, N_t, i = 0, N_x, j = 0, N_y; N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\}$, где τ — шаг по времени; h_x, h_y — шаги в горизонтальных направлениях; N_t — верхняя временная граница; N_x, N_y — пространственные границы. Вводится понятие заполненности областей как отношения площади, заполненной средой, к площади ячейки [17]. Если ячейка заполнена полностью, то заполненность равна единице, если пустая, то нулю. Использование схем, учитывающих заполненность, позволяет избежать возникновения погрешности, связанной со ступенчатой аппроксимацией границы.

Таблица 1

Функциональные формы продуктивности биогеоценоза

Название	Выражение	Источник
Модель Эппли	$\alpha_1(T) = \alpha_0 \exp(r_\alpha T(z))$, α_0 — удельная скорость роста фитопланктона при 0°C , r_α — константа, $T(z)$ — температура воды на глубине z	Erpely R.W., 1972
Модель Сидько	$\alpha_1(I) = (bI + c^2)^{1/2} - aI - c$, a, b, c — эмпирические коэффициенты	Сидько Ф.Я. и др., 1975
Модель Белянина	$\alpha_1(I) = \alpha_0(1 - \exp(-I/b))/(1 - aI)$	Белянин В.Н. и др., 1980
Модель Домбровского	$\alpha_1(T) = \alpha_0 \exp(-((T - T_{\text{opt}})/\sigma_T)^2 - aT + b)$	Домбровский Ю.А., 1990
Модель Джина	$\alpha_1(T) = \exp(k_T T)$, k_T — температурный коэффициент для коррекции скорости роста фитопланктона на температурные условия	Gin K.Y.H. et al., 1998
Модель Феннела	$\alpha_1(T, I) = \alpha_0 \exp(aT) \cdot (I/I_{\text{opt}}) \cdot \exp(1 - I/I_{\text{opt}})$, α_0 — скорость роста фитопланктона при 0°C (0,8), a — эмпирический коэффициент	Fennell K., 1999
Модель “Запас–пополнение” Рикке	$\alpha_5 = a \cdot \tilde{P} \cdot \exp(-b\tilde{P})$, \tilde{P} — нерестовый запас, a относится к воспроизводству (пополнение на единицу запаса при небольшом объеме запаса), b относится к зависимости от плотности	Ricke W.E., 1954
Модель “Запас–пополнение” Бивертон–Холта	$\alpha_5 = a \cdot \tilde{P}/(1 + b \cdot \tilde{P})$, a — максимальное пополнение (асимптотически), b — уровень запаса, необходимый для производства половины максимального пополнения $a/2$	Beverton R.J.H. and Holt S.J., 1957
Модель “Запас–пополнение” Кабрала	$\alpha_5 = a \cdot \tilde{P}^c \cdot \exp(-b\tilde{P}^c)$	Cabral R.B., 2010
Модель “Запас–пополнение” Майерса	$\alpha_5 = a \cdot \tilde{P}^c/(1 + b \cdot \tilde{P}^c)$	Myers R.A., 1995
Модель “Запас–пополнение” Сила–Лорда	$\alpha_5 = a \cdot \tilde{P}^c \cdot \exp(-b\tilde{P}^c)$	Saila S., 1988
Модель Розенцвейга–Мак–Артура с учетом эффекта Олли	$R(\theta) = 1/(P + \theta)$, θ — коэффициент Олли	Тютюнов Ю.В., Титова Л.И., 2014
Логистическая зависимость с учетом эффекта Олли	$R(SSB) = L/(1 + \exp(-k(SSB - SSB_0)))$ — масса рыбы, способной давать потомство в среде с ограниченной емкостью L , k и SSB_0 — параметры степени эффекта Олли (при малой плотности популяции)	Васильева Н.А., Владимиров А.А., Винтер А.М., 2017

Дискретные аналоги конвективного uc'_x и диффузионного $(\mu c'_x)'_x$ операторов второго порядка точности в случае частичной заполненности ячеек могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (q_0)_{i,j} uc'_x &\simeq (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}, \\
 (q_0)_{i,j} (\mu c'_x)'_x &\simeq (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - \\
 &\quad - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $q_l, l \in \{0, 1, 2\}$, — коэффициенты, характеризующие “заполненность” вычислительных областей.

3.2. Оценка погрешности аппроксимации операторов конвекции и диффузии с использованием “заполненности” ячеек. Для решения задачи гидробиологии (1)–(5) использовался метод частичной заполненности расчетных ячеек, протестированный на задаче о течении Куэтта–Тейлора, так как поля течений водного потока, рассчитанные по гидродинамической модели, используются в качестве

Таблица 2

Погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами

Размеры сетки	11×21	21×41	41×81	81×161
Максимальное значение погрешности в случае гладкой границы, м/с	0.053	0.052	0.058	0.056
Среднее значение погрешности в случае гладкой границы, м/с	0.023	0.012	0.006	0.003
Максимальное значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с	0.272	0.731	0.717	0.75
Среднее значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с	0.165	0.132	0.069	0.056

входных данных [16]. Рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами (здесь p — давление):

$$\begin{cases} uu'_x + vu'_y = -\rho^{-1}p'_x + \mu\Delta u, \\ wv'_x + vv'_y = -\rho^{-1}p'_y + \mu\Delta v, \end{cases} \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (9)$$

Опишем численное решение тестовой задачи расчета течения вязкой жидкости между двумя соосными полуцилиндрами ($x \geq 0$). Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны $r_1 = 5$ м и $r_2 = 10$ м соответственно. Расчетная область вписана в прямоугольник размерами 10×20 м ($0 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$). В сечении цилиндра плоскостью $x = 0$ задается поле скорости $u(0, y) = -5/y$ м/с, $v(0, y) = 0$ м/с. Во всех остальных узлах сетки поле скорости течения жидкости рассчитывается. На внутренней и внешней стенках цилиндра задаются условия скольжения и непротекания.

Дефекты численных решений наиболее отчетливо видны на грубых сетках. Опишем параметры грубой сетки. Шаги по пространственным направлениям равны 1 м, шаг по времени 0.1 с, размеры сетки 21×11 узлов, длина расчетного интервала 10 с, плотность среды $\rho = 1000$ кг/м³, коэффициент турбулентной вязкости $\mu = 1$ м²/с.

Воспользуемся схемами расщепления по физическим процессам и методом частичной заполненности расчетных ячеек на последовательности сгущающихся сеток [17]. Для решения полученных сеточных уравнений был применен адаптивный модифицированный попеременно-треугольный метод вариационного типа [18–22].

В табл. 2 представлены значения погрешностей численного решения задачи (9), полученные на последовательности сгущающихся расчетных сеток размерами $11 \times 21, 21 \times 41, 41 \times 81$ и 81×161 узлов в случаях гладкой и ступенчатой границы. Анализ результатов расчетов погрешности численного решения задачи (9), представленных в табл. 2, позволяет сделать вывод об эффективности использования разностных схем, учитывающих “заполненность” ячеек. При решении модельной задачи о течении Куэтта–Тейлора дробление сетки в 8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к повышению точности на прямоугольных сетках, которой обладают решения, полученные на сетках, учитывающих “заполненность” ячеек. Использование функции “заполненности” позволяет повысить точность аппроксимации границы. В противном случае ячейки могут быть заполненными или пустыми (отсутствует третье состояние ячейки — заполнена частично), что приводит к наличию погрешностей решения, связанных со ступенчатой аппроксимацией границы.

На рис. 3 представлены значения погрешностей численного решения задачи (9) на более подробных сетках размерами 11×21 и 81×161 узлов, зависящие от радиуса (красными кружками показана погрешность в случае гладкой границы, синими окружностями — в случае ступенчатой аппроксимации границы), $\Delta u = |u - u_M|$, где u, u_M — аналитическое и численное решения задачи (9).

Для рассмотренной задачи о течении Куэтта–Тейлора, в независимости от размеров сеток (рис. 3), погрешность максимальна на границах разделов сред и относительная погрешность Δu , деленная на модуль u , может достигать 75% от значения решения задачи. На грубых расчетных сетках в приграничной области расположено небольшое количество расчетных узлов и как следствие больших значений погрешности не наблюдалось (табл. 2).

Рис. 3 демонстрирует, что в случае ступенчатой аппроксимации границы для задачи течения водной среды увеличение размеров расчетных сеток приводит не к повышению точности, а к уменьшению линейных размеров приграничной области, где проявляются дефекты решения, связанные с грубой аппроксимацией границы. Следует также отметить, что при использовании сеток, учитывающих “заполненность”

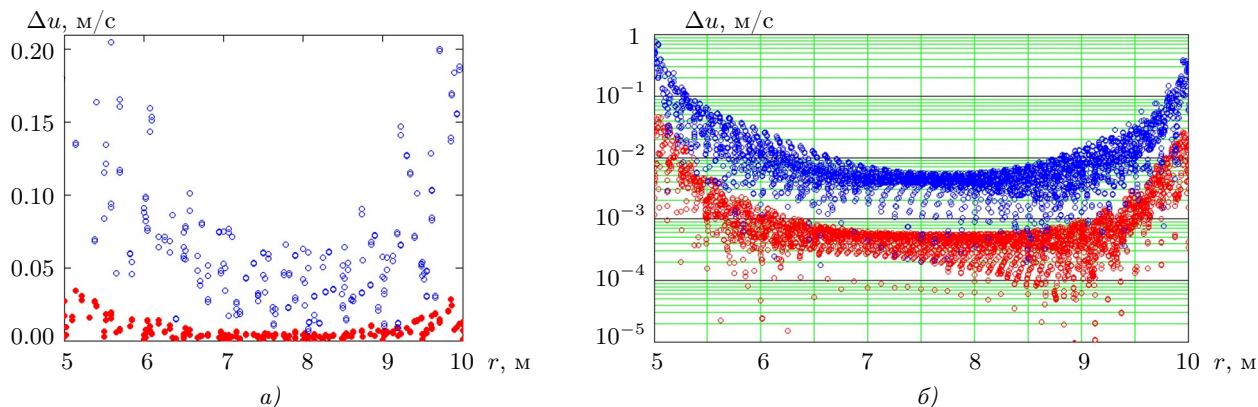


Рис. 3. Зависимости погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами от радиуса на сетке размерами: а) 11×21 узлов, б) 81×161 узлов

ячеек, погрешность численного решения модельных задач гидродинамики, вызванная аппроксимацией границы, не превосходит 6% от решения задачи.

3.3. Метод решения сеточных уравнений. Сеточные уравнения, полученные в результате конечно-разностных аппроксимаций рассматриваемых модельных задач параболического типа с помощью схем с весами, можно записать в матричном виде:

$$Ax = f, \quad (10)$$

где A — линейный, положительно определенный оператор ($A > 0$), что следует из диагонального преобладания матрицы коэффициентов, полученных при аппроксимации уравнения (6).

Для линеаризации исходной задачи (1)–(5) поле вектора скорости и правой части берутся с предыдущего слоя по времени. В работе [20] показана сходимость решения последовательности линеаризованных задач к решению нелинейной задачи диффузии–конвекции.

В качестве решателя сеточных уравнений использовался модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ).

Для нахождения решения задачи (10) будем использовать неявный итерационный процесс:

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f. \quad (11)$$

В уравнении (11) m — номер итерации, $\tau_{m+1} > 0$ — итерационный параметр, а B — некоторый обратимый оператор, который называется предобуславливателем или стабилизатором. Обращение оператора B в (11) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A в (10). Предобуславливатель B построен из аддитивного представления оператора A_0 — симметричной части оператора A :

$$A_0 = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2^*, \quad A = A_0 + A_1, \quad A_0 = A_0^*, \quad A_1 = -A_1^*. \quad (12)$$

Оператор-предобуславливатель запишется в следующем виде:

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \quad D = D^* > 0, \quad \omega > 0, \quad (13)$$

где D — диагональная часть оператора A , R_1 и R_2 — операторы с верхне- и нижнетреугольными матрицами соответственно.

4. Параллельная реализация. Для численной реализации предложенной модели биологической кинетики вида (1)–(5) был разработан параллельный алгоритм, ориентированный на многопроцессорную вычислительную систему (МВС). Для повышения эффективности алгоритма численной реализации поставленной многовидовой модели взаимодействующих популяций биогеоценоза использовался графический ускоритель NVIDIA Tesla K80.

4.1. Параллельная реализация на многопроцессорной вычислительной системе (МВС).

Опишем параллельные алгоритмы с различными типами разложения областей для решения задачи (1)–(5) на МВС. Параллельные алгоритмы для МПТМ были реализованы на МВС Южного федерального

Таблица 3

Ускорение и эффективность алгоритма на основе метода *k-means*

p	t, c	S_t	S	E_t	E
1	6.073	1.0	1.0	1	1
2	3.121	1.181	1.946	0.59	0.973
4	1.811	2.326	3.354	0.582	0.839
8	0.997	4.513	6.093	0.654	0.762
16	0.620	8.520	9.805	0.533	0.613
32	0.317	15.344	19.147	0.48	0.598
64	0.184	25.682	33.018	0.401	0.516
128	0.117	39.013	51.933	0.305	0.406

университета (ЮФУ). Технические параметры МВС: максимальная производительность составляет 18,8 TFlops; 8 вычислительных стоек; вычислительное поле МВС основано на инфраструктуре HP BladeSystem c-class с интегрированными коммуникационными модулями, системами электропитания и охлаждения. В качестве вычислительных узлов используются 512 однотипных 16-ядерных серверов HP ProLiant BL685c Blade, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2,3 ГГц и 32 ГБ ОЗУ; общее количество вычислительных узлов составляет 2048; общий объем оперативной памяти составляет 4 ТБ.

Опишем декомпозицию расчетной области по двум пространственным направлениям с использованием алгоритма *k-means* (метода *k*-средних) [23].

Для геометрического разбиения расчетной области с целью равномерной загрузки вычислителей (процессоров) МВС использовался метод *k-means*, основанный на минимизации функционала суммарной выборочной дисперсии разброса элементов (узлов расчетной сетки) относительно центра тяжести подобластей. Пусть X_i — множество расчетных узлов сетки, входящих в i -ю подобласть, $i \in \{1, \dots, m\}$, m — заданное количество подобластей. Решается задача

$$Q = \sum_i \frac{1}{|X_i|} \cdot \sum_{x \in X_i} d^2(x, c_i) \rightarrow \min,$$

где $c_i = \frac{1}{|X_i|} \sum_{x \in X_i} x$ — центр подобласти X_i , $|X_i|$ — число элементов i -й подобласти (мощность множества X_i), $d(x, c_i)$ — расстояние между расчетным узлом сетки x и центром подобласти c_i в евклидовой метрике. Алгоритм метода *k-means* завершает свою работу, когда все подобласти будут примерно равны.

Для организации обмена данными в вычислительном процессе требуется найти все точки, лежащие на границе каждой подобласти. Для этой цели использовался алгоритм Джарвиса (задача построения выпуклой оболочки). Был сформирован список соседних подобластей для каждой подобласти и разработан алгоритм пересылки данных между подобластями.

Теоретические оценки ускорения S_t и эффективности E_t разработанного алгоритма [24]:

$$E_t = \frac{S_t}{p} = \frac{\chi}{1 + (\sqrt{p} - 1) \left(\frac{36}{50N_z} + \frac{4p}{50t_0} \left(t_p \left(\frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y} \right) + \frac{t_x \sqrt{p}}{N_x N_y} \right) \right)}, \tag{14}$$

где χ — отношение числа расчетных узлов к общему числу узлов (расчетных и фиктивных; фиктивными считаем те узлы, которые не попали внутрь расчетной области \bar{G}); p — общее число процессоров; t_0 — среднее время выполнения полезной операции; t_x — среднее время отклика (латентность); t_p — среднее время, затрачиваемое на передачу чисел с плавающей точкой; N_x, N_y, N_z — количество узлов в пространственных направлениях.

Результаты параллельной реализации предложенного алгоритма решения задачи (1)–(5) представлены в табл. 3, где t, S, E — время выполнения, ускорение и эффективность алгоритма; S_t, E_t — теоретические оценки ускорения и эффективности алгоритма.

Согласно данным табл. 3, разработанный алгоритм, основанный на методе *k-means*, может эффективно использоваться для решения гидродинамических задач для большого числа вычислительных узлов.

Сравнение эффективности алгоритмов проводилось по критерию Г. Тейла (E_1 — эффективность стандартного алгоритма, базирующегося на геометрическом разбиении расчетной области на прямоугольники (двумерный случай: расчетная область помещена в прямоугольник); на параллелепипеды (трехмерный случай); E_2 — эффективность алгоритма, основанного на методе *k-means*):

$$\delta = \left[\frac{\sum_{k=1}^n (E_{(2)k} - E_{(1)k})^2}{\sum_{k=1}^n E_{(2)k}^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

где n — число экспериментов (в табл. 3 $n = 8$).

Было получено, что при использовании алгоритма на основе метода *k-means* для решения задачи (1)–(5) эффективность увеличивается на 10–20%.

4.2. Параллельная реализация на графическом ускорителе. Для численной реализации предложенных взаимосвязанных математических моделей гидродинамики и биологической кинетики разработаны параллельные алгоритмы, адаптированные для гибридных компьютерных систем, построенных на основе архитектуры NVIDIA CUDA. Графический ускоритель NVIDIA Tesla K80 обладает высокой вычислительной производительностью и поддерживает все современные как закрытые (CUDA), так и открытые (OpenCL, DirectCompute) технологии. Технические характеристики NVIDIA Tesla K80: частота графического процессора 560 МГц, видеопамять GDDR5 24 ГБ, частота видеопамяти 5000 МГц, разрядность шины видеопамяти равна 768 битам. Характеристики платформы NVIDIA CUDA: операционная система Windows 10 (x64), CUDA Toolkit v10.0.130, процессор Intel Core i5-6600 3,3 ГГц, оперативная память DDR4 32 ГБ, видеокарта NVIDIA GeForce GTX 750 Ti с 2 ГБ, 640 ядер CUDA.

Использование графического ускорителя с технологией CUDA необходимо для решения задачи эффективного распределения ресурсов при решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокой размерности. Для программной реализации соответствующего алгоритма, основанного на технологии NVIDIA CUDA, получена зависимость времени решения СЛАУ попеременно-треугольным методом (ПТМ) от размера матрицы и числа ненулевых диагоналей. Отличительной особенностью программной реализации является использование более компактной структуры данных для хранения разреженной матрицы.

4.3. Модифицированный формат хранения разреженной матрицы с повторяющейся последовательностью элементов. Процесс решения задач математического моделирования с использованием численных методов, в частности метода конечных разностей (МКР) на равномерных сетках, приводит к необходимости работы с разреженными матрицами, элементы которых для внутренних узлов представляют собой повторяющуюся последовательность. В случае задач высокой размерности это приводит к неэффективному расходованию памяти. Использование формата хранения матриц CSR (Compressed Sparse Rows) позволяет избежать необходимости хранения нулевых элементов. Однако все ненулевые элементы, включая множество повторяющихся, хранятся в соответствующем массиве. При использовании вычислительных систем с общей памятью данный недостаток не является критичным. Однако в гетерогенных и распределенных вычислительных системах он может негативно сказаться на производительности при пересылке данных между узлами. Была разработана модификация формата CSR для повышения эффективности хранения данных с повторяющейся последовательностью элементов CSR1S для моделирования непрерывных процессов биологической кинетики методом конечных разностей. При этом для изменения дифференциального оператора вместо многократного поиска и замены значений в массиве ненулевых элементов достаточно просто изменить их в массиве, сохраняющем повторяющуюся последовательность.

Рассмотрим преобразование разреженной матрицы из формата CSR1S в CSR. Входные данные алгоритма представляют собой объект класса матрицы с повторяющимися элементами `SMatrix1Seq`, инкапсулирующий массив ненулевых элементов `Values`; массив индексов столбцов, в которых расположены ненулевые элементы `ColIdx`; массив индексов ненулевых элементов, которые стоят первыми в строках (последним элементом массива является суммарное количество ненулевых элементов) `RowIdx`; массив для хранения повторяющейся последовательности; массив для хранения индексов столбцов, в которых расположены первые элементы повторяющейся последовательности. При этом массивы `Values`, `ColIdx` и `RowIdx` указывают на элементы, которые не входят в повторяющуюся последовательность. Выходные данные — объект класса `MatrixCsr` — разреженная матрица в формате CSR, содержащая массивы `Values`, `ColIdx` и `RowIdx`. Типы данных и назначения массивов аналогичны соответствующим массивам класса

SMatrix1Seq. Приведем алгоритм преобразования разреженной матрицы из формата CSR1S в CSR:

1. Вычисление размеров массивов класса MatrixCsr (выходных массивов).
2. Резервирование оперативной памяти для хранения выходных массивов.
3. Сохранение значения размера массива resultValues.
4. Копирование неповторяющихся элементов из входного массива Values в выходной массив resultValues.
5. Заполнение массива resultValues повторяющимися элементами с помощью CUDA.
6. Копирование индексов столбцов неповторяющихся элементов.
7. Копирование индексов столбцов повторяющихся элементов с помощью CUDA.
8. Копирование индексов строк, в которых расположены неповторяющиеся элементы.
9. Копирование индексов строк, в которых расположены повторяющиеся элементы, с помощью CUDA.
10. Формирование выходного объекта класса MatrixCsr, содержащего массив resultValues ненулевых элементов, массив индексов столбцов неповторяющихся элементов и массив индексов строк, в которых расположены неповторяющиеся элементы.
11. Очистка ресурсов, возвращение результата вызвавшему методу.

Оценим объем памяти в формате CSR:

$$P_{csr} = N_{nz}B_{nz} + (N_{nz} + R + 1)B_{idx},$$

в формате CSR1S:

$$P_{csr1s} = (N_{nz} - N_{seq}(R_{seq} + 1))B_{nz} + (N_{nz} - R_{seq}(N_{seq} + 1) + R + 1)B_{idx},$$

где R — количество строк матрицы; R_{seq} — количество строк матрицы, содержащих повторяющуюся последовательность элементов; N_{nz} — количество ненулевых элементов матрицы; N_{seq} — количество элементов повторяющейся последовательности; B_{nz} — объем памяти, выделяемый для хранения одного ненулевого элемента; B_{idx} — объем памяти, выделяемый для хранения одного индекса.

Введем коэффициенты $k_r = R_{seq}/R$ и $k_i = B_{idx}/B_{nz}$, после арифметических преобразований получим:

$$P_{csr1s} = B_{nz} [N_{nz} (k_i + 1) - N_{seq} (k_i k_r R + k_r R + 1) - k_i (k_r R - R - 1)].$$

Для решения системы сеточных уравнений, возникающих в процессе дискретизации, в формате CSR на графических процессорах с использованием технологии CUDA разработаны эффективные библиотеки функций. Разработанный алгоритм решения задачи использует модифицированный формат хранения данных CSR1S с дальнейшим преобразованием в формат CSR для решения полученной СЛАУ на графическом ускорителе с использованием технологии NVIDIA CUDA. При этом возникает задача разработки алгоритма преобразования матрицы из формата CSR1S в формат CSR за минимальное время.

Был проведен ряд вычислительных экспериментов с пятикратной повторностью и фиксацией среднего значения времени вычислений. Выполнено экспериментальное исследование зависимости времени исполнения алгоритма преобразования от числа элементов повторяющейся последовательности N_{seq} и коэффициента соотношения строк матрицы, содержащих последовательность, к общему количеству строк k_r для последовательной реализации, параллельной с использованием библиотеки TPL и параллельной с использованием платформы NVIDIA CUDA. N_{seq} варьировали от 3 до 19 с шагом 2; k_r изменяли в диапазоне от 0 до 1 с шагом 0,1; размерность матрицы равна 106. Анализ результатов вычислительных экспериментов показал, что алгоритм, использующий параллельные вычисления на CPU, эффективнее последовательного алгоритма и алгоритма, использующего NVIDIA CUDA, так как время выполнения преобразования матрицы из формата CSR1S в формат CSR в этом случае минимально.

На рис. 4 представлены графики зависимости времени преобразования матрицы из формата CSR1S в формат CSR последовательным (а) и параллельным (б) алгоритмами от k_r и N_{seq} .

Анализ графиков, представленных на рис. 5 а-б, показывает, что алгоритм, использующий технологию NVIDIA CUDA, более эффективен при $N_{seq} > 7$. При этом точка равной эффективности снижается, начиная с k_r , равного 0,7.

Уравнение регрессии $y = -0.02x + 0.8329$ (рис. г) с коэффициентом детерминации 0,9276 описывает границу равных затрат времени последовательного алгоритма и алгоритма, использующего NVIDIA CUDA. Таким образом, подставив в него значение N_{seq} , можно вычислить минимальное значение k_r ,

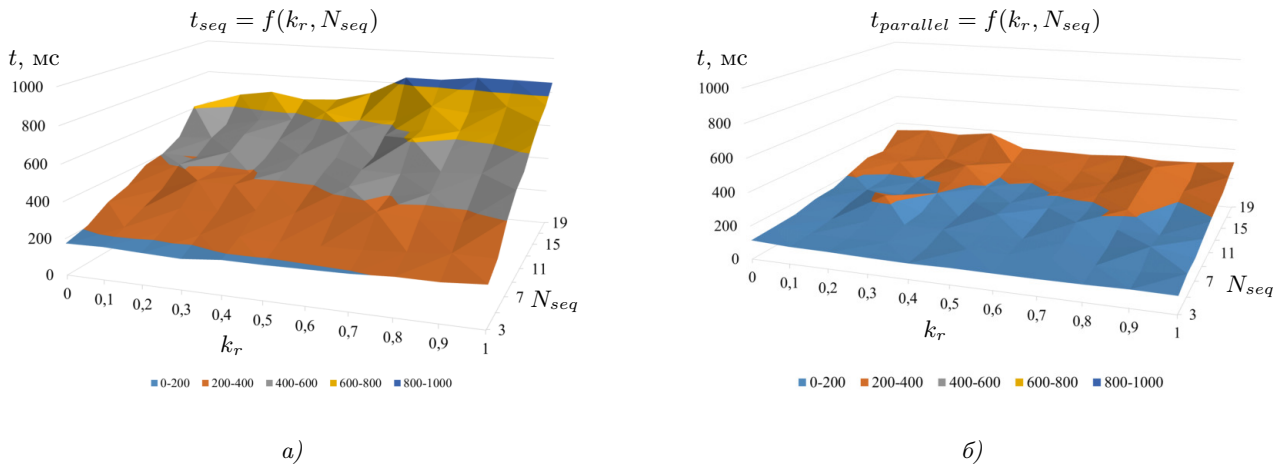


Рис. 4. Время преобразования матрицы из формата CSR1S в формат CSR

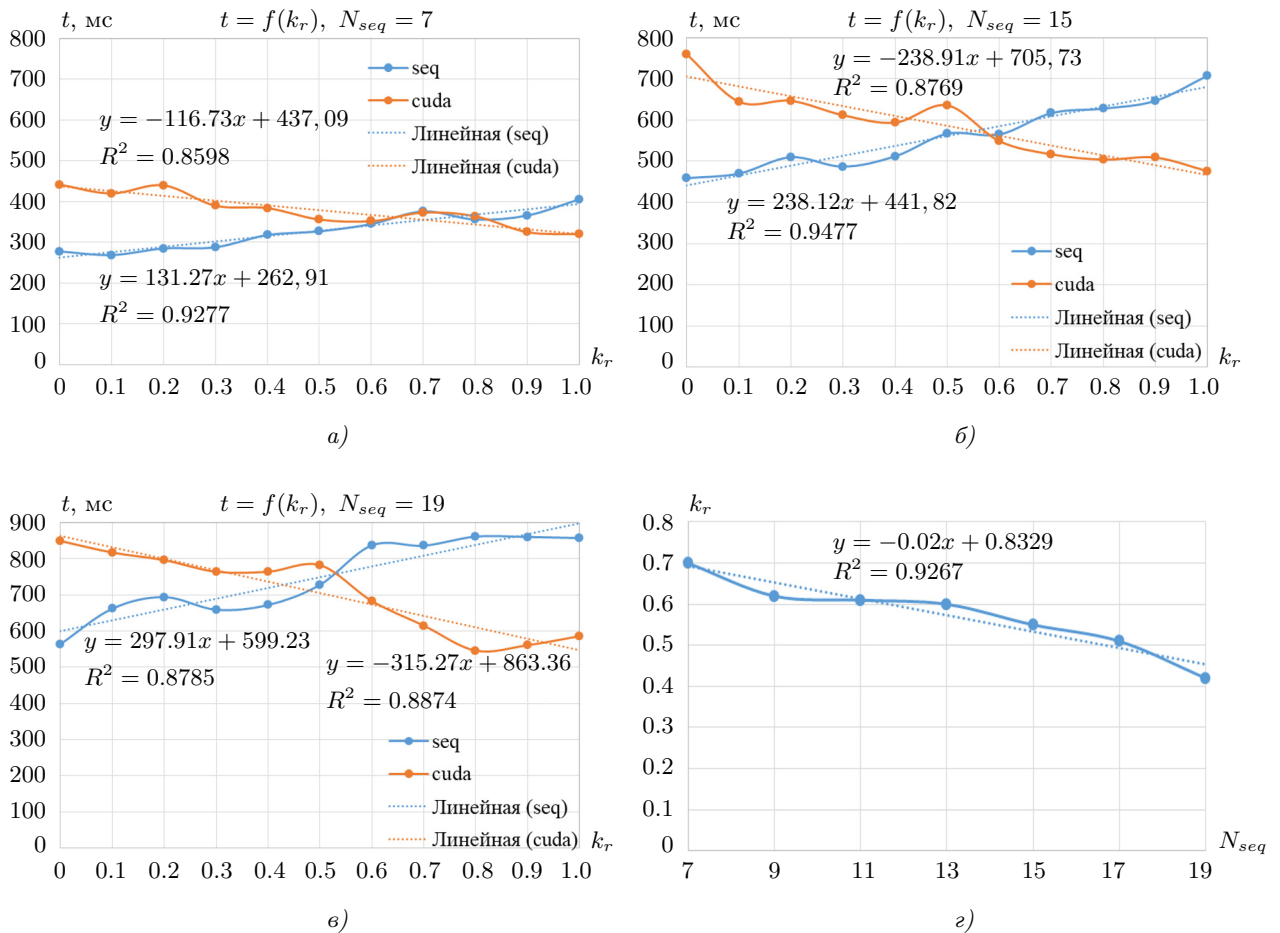


Рис. 5. Графики эффективности алгоритмов последовательной и параллельной реализации (количество строк матрицы k_r дано в относительных единицах)

выше которого второй алгоритм будет эффективнее первого. Возникает необходимость в реализации усовершенствованного итерационного метода, непосредственно оперирующего с данными в формате CSR1S, что позволит перейти к схеме CSR1S CUDA.

Анализ характеристик архитектуры CUDA показал, что алгоритмы для численной реализации разработанной математической модели гидробиологических процессов могут быть применены для проектирования высокопроизводительных информационных систем.

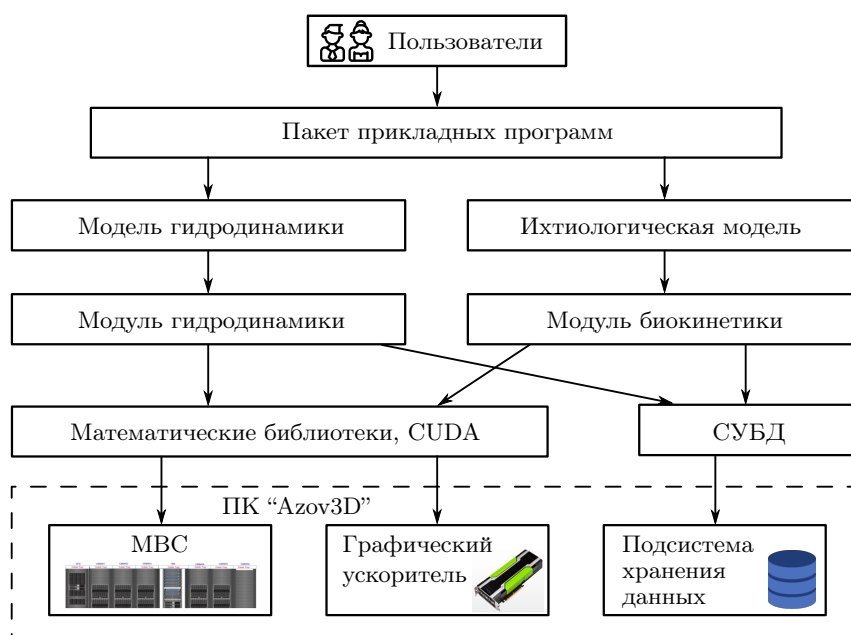


Рис. 6. Схема аппаратно-программного комплекса на базе модифицированного персонального компьютера (ПК) “Azov3D”

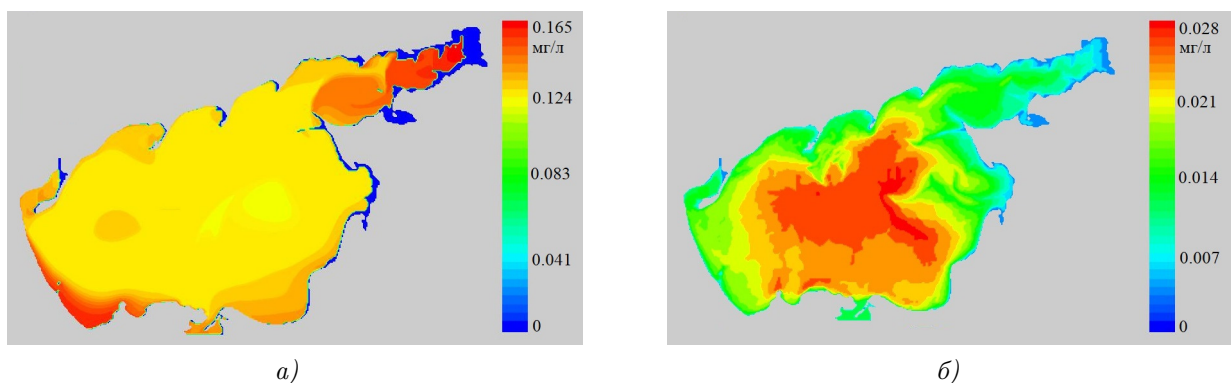


Рис. 7. Распределения концентраций: *a)* биогенного вещества (F_3), временной интервал $T = 28$ дней; *б)* фитопланктона (F_1), временной интервал $T = 28$ дней

5. Вычислительный эксперимент. Для решения поставленной задачи биологической кинетики был разработан программный комплекс “Azov3D” с реализацией на МВС и графическом ускорителе.

В состав программного комплекса входят следующие блоки: блок управления, океанологические и метеорологические базы данных, библиотека прикладных программ для решения задач гидробиологической динамики, интеграция с различными геоинформационными системами (ГИС), глобальная база данных ресурсов для геотаггинга и доступа к системам сбора спутниковых данных, база данных реанализа NCEP/NCAR (рис. 6).

Использование ГИС предоставляет дополнительные возможности для более качественного и сложного пространственного анализа, а решения на его основе являются более точными. Задачи были решены на высокопроизводительной компьютерной системе [25], способной выполнять большое количество сложных вычислений и обрабатывать огромные объемы данных за ограниченное время. На рис. 7 показаны результаты расчета концентрации загрязняющего биогенного вещества для модели динамики вредоносной водоросли (начальное распределение полей течений водного потока для северного ветра), значения коэффициентов: $\mu_3 = 5 \cdot 10^{-10}$; $\nu_3 = 10^{-10}$; $B = 0.001$; $\bar{F}_3 = 1$; $f = 3$; $\lambda_2 = 0.8$; $\mu_1 = 5 \cdot 10^{-11}$; $\nu_1 = 10^{-11}$, $\delta_1 = 0.01$, $\sigma_1 = 0.005$, $\lambda_1 = 0.001$.

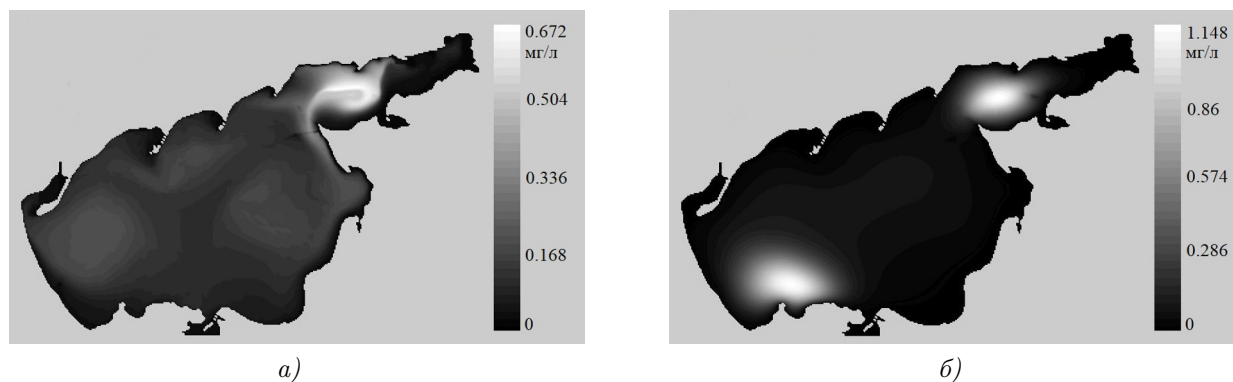


Рис. 8. Распределения концентраций: а) детрита (F_4), временной интервал $T = 62$ дня; б) пиленгаса (F_5), временной интервал $T = 76$ дней

С использованием разработанного комплекса программ был изучен механизм образования заморных зон в мелководном водоеме. На рис. 8 представлены результаты моделирования возможных сценариев развития экосистемы Азовского моря (изменения концентрации рыбной популяции пиленгас) для северного направления ветра. Белым цветом выделены максимальные значения концентраций пиленгаса и детрита. Значения коэффициентов: $\mu_4 = 5 \cdot 10^{-11}$; $\nu_4 = 10^{-11}$; $\varepsilon_4 = 1.9 \cdot 10^{-5}$; $\beta_4 = 0.1$; $\lambda_4 = 0.4$; $\mu_5 = 1.5 \cdot 10^{-3}$; $\nu_5 = 1.6 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_5 = 0.125$; $\lambda_5 = 1.16 \cdot 10^{-3}$; $\xi_5 = 0.8$; $\varepsilon_5 = 0.47$; $\delta_5 = 0.05$.

С помощью представленных результатов численного эксперимента можно исследовать возможный сценарий зарыбления акватории Азовского моря пиленгасом, участвующем в донной мелиорации мест скопления детрита. При значении временного интервала, начиная с 61 дня, согласно представленным результатам, наблюдается уменьшение концентрации детрита, а значит, и концентрации донных отложений в центрально-восточной части Азовского моря, что, в конечном счете, приведет к уменьшению площадей заморных зон и улучшению качества вод в данном водоеме.

С помощью разработанного программного комплекса можно исследовать вопросы акклиматизации пиленгаса в новом для него по экологическому режиму мелководном водоеме, оценить специфику условий водного тела, что позволит избежать непредвиденных отрицательных технологических влияний и планировать увеличение производства этой рыбы. Анализ полученных результатов позволил сделать выводы о свойствах математической модели детрит–пиленгас и возможностях управления качеством вод мелководных водоемов, таких как Азовское море, с помощью методов и средств математического моделирования.

6. Заключение. Анализ нелинейных эффектов в динамике популяций промысловых рыб при низкой и высокой их численности с учетом эффекта Олли, конкуренции за ресурсы, таксиса, вылова, пространственного распределения биогенных веществ и детрита на основе многовидовой модели взаимодействия планктона и промысловой рыбы пиленгас позволяет изучать особенности пищевой цепи, влияние конкуренции за ресурсы, биотических и абиотических факторов, вылова на процессы воспроизводства. Дискретизация разработанной модельной задачи водной экологии, входящей в состав программного комплекса, была осуществлена на основе схем второго порядка точности с учетом частичной заполненности расчетных ячеек, что позволило значительно уменьшить погрешность решения задачи в расчетной области сложной формы. Для решения возникающих в результате дискретизации непрерывной модели систем сеточных уравнений большой размерности был выбран МПТМ ввиду его высокой скорости сходимости. Разработка эффективных параллельных алгоритмов численной реализации поставленной задачи биологической кинетики, ориентированных на МВС и графический ускоритель NVIDIA Tesla K80 с модификацией формата хранения данных, позволила анализировать влияние нелинейных эффектов на процессы воспроизводства популяций биогидроценоза в режиме реального и ускоренного времени.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20–01–00421).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Менишуткин В.В., Руховец Л.А., Филатов Н.Н. Моделирование экосистем пресноводных озер (обзор) 2. Модели экосистем пресноводных озер // Водные ресурсы. 2014. 41, № 1. 24–38.
2. Hawkins B.A., Cornell H.V. (Eds.) Theoretical approaches to biological control. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

3. *Allee W.C.* Animal aggregations: a study in general sociology. Chicago: Chicago Univ. Press, 1931.
4. *Tyutyunov Yu.V., Titova L.I.* Simple models for studying complex spatiotemporal patterns of animal behavior // Deep-Sea Research II: Top. Stud. Oceanogr. 2017. **140**. 193–202.
5. *Stephens P.A., Sutherland W.J.* Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation // Trends in Ecology and Evolution. 1999. **14**, N 10. 401–405.
6. *Zhou S.-R., Liu Y.-F., Wang G.* The stability of predator–prey systems subject to the Allee effects // Theoretical Population Biology. 2005. **67**, N 1. 23–31.
7. *Винберг Г.Г.* Биологическая продуктивность водоемов // Экология. 1983. № 3. 3–12.
8. *Матвишов Г.Г., Ильичев В.Г.* Об оптимальной эксплуатации водных ресурсов. Концепция внутренних цен // Докл. АН. 2006. **406**, № 2. 249–251.
9. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб.: БХВ–Петербург, 2002.
10. *Гергель В.П.* Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010.
11. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 290–297.
12. *Сухинов А.И.* Прецизионные модели гидродинамики и опыт их применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море // Известия ТРТУ. 2006. № 3. 228–235.
13. Биологическая экология: теория и практика / Сост. Степановских А.С. М.: Unity-Dana, 2009.
14. *Васильева Н.А., Владимиров А.А., Винтер А.М.* Учет нелинейных эффектов в модели возрастной структуры популяции атлантической трески // Математическое моделирование в экологии. Материалы Пятой Национальной научной конференции с международным участием. Пущино: ИФХиБПП РАН, 2017. 42–44.
15. *Переварюха А.Ю.* Хаотические режимы в моделях теории формирования пополнения популяций // Нелинейный мир. 2009. **7**, № 12. 925–932.
16. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В.* Повышение гладкости численного решения моделирования задач гидродинамики на прямоугольных сетках // Computational Mathematics and Information Technologies. 2019. **1**, N 1. 1–16.
17. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А.* Методика построения разностных схем для задачи диффузии–конвекции–реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 4. 87–98.
18. *Коновалов А.Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. 2002. **43**, № 3. 552–572.
19. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 1. 3–20.
20. *Сухинов А.И., Сидорякина В.В.* О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов // Математическое моделирование. 2017. **29**, № 11. 19–39.
21. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Семенякина А.А., Никитина А.В.* Численное моделирование экологического состояния Азовского моря с применением схем повышенного порядка точности на многопроцессорной вычислительной системе // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. **8**, № 1. 151–168.
22. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С.* Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 103–112.
23. *Никитина А.В., Семенов И.С.* Численная реализация методов решения задач биологической кинетики в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. № 1. 138–143.
24. *Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E.* Using multichannel satellite images for predictive modelling the “bloom” phytoplankton processes in shallow waters on supercomputer // Computational Mathematics and Information Technologies. 2017. **1**, N 2. 1–13.
25. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Belova Y.V., Sumbaev V.V., Semenyakina A.A.* Supercomputer modeling of hydrochemical condition of shallow waters in summer taking into account the influence of the environment // Communications in Computer and Information Science. Vol. 910. Cham: Springer, 2018. 336–351.

Поступила в редакцию
4 августа 2020

Computational Aspects of Mathematical Modeling of the Shallow Water Hydrobiological Processes

A.I. Sukhinov¹, A.E. Chistyakov², V.N. Litvinov³,
A.V. Nikitina⁴, Yu.V. Belova⁵, A.A. Filina⁶

¹ Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia; Dr. Sci., Professor, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Head of Department, e-mail: sukhinov@gmail.com

² Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia; Dr. Sci., Professor, Russia, e-mail: cheese_05@mail.ru

³ Azov-Black Sea Engineering Institute of Don State Agrarian University; ulitsa Lenina 21, Zernograd, 347740, Russia; Ph.D., Associate Professor, Head of Department, e-mail: litvinovvn@rambler.ru

⁴ Southern Federal University; ulitsa Bolshaya Sadovaya 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: nikitina.vm@gmail.com

⁵ Don State Technical University, Faculty of Informatics and Computer Science; pl. Gagarina 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia; Assistant, e-mail: yubelova@yandex.ru

⁶ Supercomputers and Neurocomputers Research Center; pereulok Italiyskiy 106, Taganrog, 347900, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru

Received August 4, 2020

Abstract: Paper covers the research of nonlinear effects in population dynamics of the pelengas commercial fish of the Azov Sea taking into account the Allee effect, competition for resources, taxis, catching, spatial distribution of biogenic matter and detritus based on a multi-species model of plankton and fish interaction. Discrete analogue of developed model problem of water ecology, included in a software complex, were calculated using schemes of second order of accuracy taking into account the partial filling of computational cells. The system of grid equations of large dimension, arising at discretization, has been solved on the basis of adaptive modified alternately triangular variational method. Effective parallel algorithms were developed for numerical implementation of biological kinetics problem and oriented on multiprocessor computer system and NVIDIA Tesla K80 graphics accelerator with the data storage format modification. Due to it, the reproduction processes of biogeocenose populations have been analyzed in real and accelerated time.

Keywords: Allee effect, taxis, mathematical model of population interaction, biogydrocenosis, parallel algorithm, modified data storage format, software complex, graphics accelerator

References

1. V. V. Menshutkin, L. A. Rukhovets, and N. N. Filatov, "Ecosystem Modeling of Freshwater Lakes (Review): 2. Models of Freshwater Lake's Ecosystem," *Vodn. Resur.* **41** (1), 24–38 (2014) [*Water Resour.* **41** (1), 32–45 (2014)].
2. B. A. Hawkins and H. V. Cornell (Eds.), *Theoretical Approaches to Biological Control* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999).
3. W. C. Allee, *Animal Aggregations: A Study in General Sociology* (Chicago Univ. Press, Chicago, 1931).
4. Yu. V. Tyutyunov and L. I. Titova, "Simple Models for Studying Complex Spatiotemporal Patterns of Animal Behavior," *Deep Sea Res. Part II: Top. Stud. Oceanogr.* **140**, 193–202 (2017).
5. P. A. Stephens and W. J. Sutherland, "Consequences of the Allee Effect for Behaviour, Ecology and Conservation," *Trends Ecol. Evol.* **14** (10), 401–405 (1999).
6. S.-R. Zhou, Y.-F. Liu, and G. Wang, "The Stability of Predator–Prey Systems Subject to the Allee Effects," *Theor. Popul. Biol.* **67** (1), 23–31 (2005).
7. G. G. Vinberg, "Biological Productivity of Reservoirs," *Ecology*, No. 3, 3–12 (1983).

8. G. G. Matishov and V. G. Il'ichev, "Optimal Utilization of Water Resources: The Concept of Internal Prices," *Dokl. Akad. Nauk* **406** (2), 249–251 (2006) [*Dokl. Earth. Sci.* **406** (1), 86–88 (2006)].
9. V. V. Voevodin and V. V. Voevodin, *Parallel Computing* (BHV-Petersburg, St. Petersburg, 2002) [in Russian].
10. V. P. Gergel', *High Performance Computing for Multiprocessor Multicore Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2010) [in Russian].
11. A. I. Sukhinov and A. E. Chistyakov, "Parallel Implementation of a Three-Dimensional Hydrodynamic Model of Shallow Water Basins on Supercomputing Systems," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 290–297 (2012).
12. A. I. Sukhinov, "Precise Hydrodynamic Models and Their Applications to the Prediction and Reconstruction of Emergency Situations in the Sea of Azov," *Izv. Taganrog Radiotekh. Univ.*, No. 3, 228–235 (2006).
13. A. S. Stepanovskikh, *Biological Ecology. Theory and Practice* (Unity-Dana, Moscow, 2009) [in Russian].
14. N. A. Vasilieva, A. A. Vladimirov, and A. M. Winter, "Consideration of Nonlinear Effects in the Model of the Age Structure of the Atlantic Cod Population," in *Proc. Fifth Nat. Conf. on Mathematical Modeling in Ecology, Pushchino, Russia, October 16–20, 2017* (Inst. of Physico-Chem. Biolog. Probl., Pushchino, 2017), pp. 42–44.
15. A. Yu. Perevaryukha, "Chaotic Regimes in Models of the Theory of Formation of Population Recruitment," *Nelin. Mir* **7** (12), 925–932 (2009).
16. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. A. Protsenko, et al., "Improvement of Numerical Solution Smoothness for the Hydrodynamics Problems Modeling on Rectangular Grids," *Comput. Math. Inform. Technol.* **1** (1), 1–16 (2019).
17. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and N. A. Fomenko, "Method of Construction Difference Scheme for Problems of Diffusion–Convection–Reaction, Taking into Account the Degree Filling of the Control Volume," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 4, 87–98 (2013).
18. A. N. Konovalov, "To the Theory of the Alternating Triangle Iteration Method," *Sib. Mat. Zh.* **43** (3), 552–572 (2002) [*Sib. Math. J.* **43** (3), 439–457 (2002)].
19. A. I. Sukhinov and A. E. Chistyakov, "Adaptive Modified Alternating Triangular Iterative Method for Solving Grid Equations with a Non-Self-Adjoint Operator," *Mat. Model.* **24** (1), 3–20 (2012) [*Math. Models Comput. Simul.* **4** (4), 398–409 (2012)].
20. A. I. Sukhinov and V. V. Sidoryakina, "Convergence of Linearized Sequence Tasks to the Nonlinear Sediment Transport Task Solution," *Mat. Model.* **29** (11), 19–39 (2017).
21. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, A. A. Semenyakina, and A. V. Nikitina, "Numerical Modeling of Ecologic Situation of the Azov sea with Using Schemes of Increased Order of Accuracy on Multiprocessor Computer System," *Comput. Issled. Model.* **8** (1), 151–168 (2016).
22. A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, and I. S. Semenov, "Mathematical Modeling of the Formation of Suffocation Conditions in Shallow Basins Using Multiprocessor Computing Systems," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 103–112 (2013).
23. A. V. Nikitina and I. S. Semenov, "Numerical Implementation of Methods for Solving Problems of Biological Kinetics in the Azov Sea," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 1, 138–143 (2014).
24. A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, and A. E. Chistyakov, "Using Multichannel Satellite Images for Predictive Modelling the "bloom" Phytoplankton Processes in Shallow Waters on Supercomputer," *Comput. Math. Inform. Technol.* **1** (2), 1–13 (2017).
25. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, et al., "Supercomputer Modeling of Hydrochemical Condition of Shallow Waters in Summer Taking into Account the Influence of the Environment," in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2018), Vol. 910, pp. 336–351.