

УДК 550.341

doi 10.26089/NumMet.v21r326

ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА УДЕЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ПО ИХ ЦИФРОВЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ СОПРОЦЕССОРОВ

Т. С. Хачкова¹, В. В. Лисица², Г. В. Решетова³, В. А. Чеверда⁴

Представлен алгоритм расчета потенциального электрического поля в образцах горных пород и предложены оценки их удельного электрического сопротивления (проводимости). Алгоритм ориентирован на расчет поля в существенно неоднородных моделях среды с частично насыщенными и полиминеральными образцами горных пород. В основе алгоритма — итерационные методы крыловского типа, в качестве предобусловливателя используется оператор, обратный к оператору Лапласа для однородной среды. Для вычисления предобусловливателя используется спектральный метод в направлениях, нормальных к основному направлению электрического тока, а серия одномерных задач решается методом прогонки. Решатель реализован с использованием графических процессоров (GPU) и позволяет обрабатывать образцы размером до 400^3 вокселей на одном GPU.

Ключевые слова: вычислительная физика горных пород, конечно-разностный метод, итерационные методы, удельное электрическое сопротивление, численное осреднение.

1. Введение. Вычислительная физика горных пород (от английского digital rock physics) — это современная область вычислительной физики, применяемая для моделирования различных процессов в масштабе пор горных пород. Модели порового пространства и скелета породы строятся на основе микротомографических трехмерных изображений с применением методов сегментации изображений [5, 14, 23]. В результате получается трехмерная сеточная модель с конечным (небольшим) количеством различных компонентов, представляющих разные жидкости в поровом пространстве или минералы в скелете. После этого каждому вокселю присваиваются соответствующие физические свойства и вычисляется необходимое физическое поле.

Одно из основных направлений вычислительной физики горных пород — это масштабирование свойств горных пород с целью их дальнейшего использования в макромасштабных моделях. В частности, численное масштабирование широко применяется для оценки абсолютной проницаемости [2, 4, 10, 15, 20], относительной проницаемости для двух- и трехфазных жидкостей [13], упругих параметров [7, 15, 31, 32] и удельного электрического сопротивления [15, 35]. При этом размеры и разрешение томографических изображений определяется аппаратурой [29]; в частности, современные микротомографы позволяют получать изображение с разрешением вплоть до 0.5 микрона на воксель (трехмерный аналог пикселя) с предельным размером изображения 4000 вокселей в одном направлении. С учетом краевых эффектов рабочий размер изображения составляет порядка 2000 вокселей. В результате расчетная сетка для задач вычислительной физики горных пород составляет порядка 10^9 – 10^{10} точек. При этом физический размер расчетной области — первые миллиметры, что, естественно, ставит вопрос о репрезентативности рассматриваемого объема [1, 16, 34]. В работе [1] показано, что геометрические характеристики порового пространства достаточно устойчиво определяются на указанных размерах, однако этих размеров зачастую недостаточно для оценки физических свойств образцов. Поэтому в настоящее время методы вычислительной физики горных пород применяются для решения множества задач для образцов различного размера и для накопления статистических данных [26]. Альтернативным направлением является геостатистическое моделирование образцов горных пород с использованием многоточечных статистик либо методов машинного обучения [27]. Первый подход является более распространенным, что связано с

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, пр. Коптюга, д. 3, 630090, Новосибирск; науч. сотр., e-mail: KhachkovaTS@ipgg.sbras.ru

² Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, пр. Коптюга, д. 3, 630090, Новосибирск; зав. лабораторией, e-mail: LisitsaVV@ipgg.sbras.ru

³ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; вед. науч. сотр., e-mail: kgv@nmsf.sssc.ru

⁴ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, пр. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; зав. лабораторией, e-mail: CheverdaVA@ipgg.sbras.ru

основном с вычислительными аспектами решаемых задач. Решение ряда независимых задач с накоплением статистики является примером распараллеливания по задачам, при котором масштабирование алгоритма составляет 100%, т.е. без потерь на накладные операции и обмен данными. При этом размеры задач позволяют проводить моделирование с использованием малого числа графических сопроцессоров (GPU), а это открывает возможность проведения моделирования на рабочих станциях, что актуально для геофизических лабораторий, имеющих ограниченный доступ к вычислительным ресурсам [18, 25].

В настоящей статье приводится алгоритм и его программная реализация для численной оценки электропроводности или удельного сопротивления образцов породы. Для этого необходимо вычислить электрический потенциал для заданного изменения напряжения на противоположных сторонах образца. После чего проводимость можно оценить как отношение электрического тока к изменению напряжения. Вычисление электрического потенциала является наиболее сложной и трудоемкой частью алгоритма. Оно требует решения уравнения Пуассона для сильно неоднородной среды. Под сильно неоднородной подразумевается среда, в которой размер неоднородностей составляет несколько точек сетки, т.е. длина корреляции модели составляет пять-десять точек сетки [16], а амплитуда неоднородностей может достигать нескольких порядков. Среди возможных подходов к решению уравнения Пуассона следует выделить методы крыловского типа с подходящими предобусловливателями. Для предобусловливания дискретизированного уравнения Пуассона обычно используется неполная LU-факторизация [21], включающая в себя малоранговые аппроксимации [3, 9, 28] и многосеточные методы (multi-grid) [24, 33]. Первые требуют хранения матрицы и сомножителей ее факторизации, а вторые требуют решения ряда задач на серии вложенных сеток и хранения их решений. Однако, если рассматриваются сильно неоднородные модели геоматериалов, укрупнение масштаба, т.е. размера сетки, приводит к изменению топологии и геометрии порового пространства [19], которое является основной проводящей частью модели. Таким образом, решение задачи на более грубой сетке не будет ближе к истинному решению, чем для однородных сред. В то же время уравнение Пуассона с постоянной проводимостью может быть эффективно решено спектральным методом [6, 17], в том числе с использованием графических процессоров.

2. Постановка задачи. Необходимо оценить эффективное удельное электрическое сопротивление, или проводимость образца горной породы, используя его микротомографическое трехмерное изображение. Таким образом, нам необходимо рассмотреть две задачи:

- вычислить электрический ток в неоднородной модели образца для заданной разности потенциалов на его противоположных сторонах;
- восстановить скалярное (тензорное) удельное электрическое сопротивление, такое, чтобы результирующий электрический ток был равен току в исходной модели для данной разности потенциалов.

Формальная математическая постановка задачи заключается в следующем. Рассматривается уравнение Пуассона, заданное в области $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_2] \times [0, X_3]$:

$$\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x}) \nabla \varphi(\mathbf{x})) = 0, \tag{1}$$

где $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ — это электропроводность, а $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ — скалярный электрический потенциал. Мы не предполагаем никаких зарядов внутри вычислительной области, поэтому правые части нулевые. Мы используем граничные условия Дирихле на двух противоположных сторонах $x_1 = 0$ и $x_1 = X_1$, т.е.

$$\varphi(\mathbf{x})|_{x_1=0} = \Phi_0, \quad \varphi(\mathbf{x})|_{x_1=X_1} = \Phi_1, \tag{2}$$

где Φ_0 и Φ_1 — заданные потенциалы. На других сторонах области мы применяем либо периодические условия

$$\varphi(\mathbf{x})|_{x_2=0} = \varphi(\mathbf{x})|_{x_2=X_2}, \quad \varphi(\mathbf{x})|_{x_3=0} = \varphi(\mathbf{x})|_{x_3=X_3}, \tag{3}$$

либо условия Неймана

$$\begin{aligned} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}|_{x_2=0} = 0, \quad \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}|_{x_2=X_2} = 0, \\ \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}|_{x_3=0} = 0, \quad \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}|_{x_3=X_3} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Периодические граничные условия обычно используются для моделирования тока в “неограниченной” области. Более того, такие условия позволяют оценить тензор удельного сопротивления, который имеет решающее значение, если среда электрически анизотропна [2]. Граничные условия Неймана применяются для моделирования лабораторных экспериментов, когда образец помещается в изолятор.

Решение уравнения (1) — пространственное распределение электрического потенциала $\varphi(\mathbf{x})$ внутри неоднородного образца породы. Используя этот потенциал, можно определить электрический ток

$$J_x = \int_0^{X_2} \int_0^{X_3} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_2 dx_3. \quad (5)$$

Необходимо заметить, что ток не зависит от пространственных координат.

С другой стороны, для однородной модели с неизвестной проводимостью $\hat{\sigma} = \text{const}$, т.е.

$$\nabla \cdot (\hat{\sigma} \nabla \hat{\varphi}(\mathbf{x})) = 0,$$

с граничными условиями (2) и (3) или (4) решение $\hat{\varphi}$ может быть построено аналитически:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \Phi_0 + \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{X_1} x_1.$$

Кроме того, электрический ток в направлении x_1 удовлетворяет закону Ома:

$$\hat{J}_x = \int_0^{X_2} \int_0^{X_3} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_2 dx_3 = \hat{\sigma} \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{X_1} S_1,$$

где S_1 — площадь поверхности сечения образца, перпендикулярного направлению x_1 .

Предполагая, что заданная разность потенциалов на двух противоположных сторонах образца должна вызывать одинаковый электрический ток в исходной неоднородной и эффективной однородной средах, т.е. $\hat{J}_x = J_x$, можно восстановить электропроводность эффективного материала:

$$\hat{\sigma} = J_x \frac{X_1}{S_1} \frac{1}{\Phi_1 - \Phi_0}. \quad (6)$$

Наиболее вычислительно трудоемкой задачей при численной оценке удельного электрического сопротивления, или проводимости является решение уравнения Пуассона в сильно неоднородной среде, где характерный размер неоднородностей составляет от одного до десяти вокселей, а амплитуда проводимости изменяется на несколько порядков.

3. Конечно-разностная аппроксимация. Предлагается использовать консервативные конечно-разностные схемы [8] для аппроксимации уравнения (1) в неоднородной области. Введем сетку с шагами h_1 , h_2 и h_3 вдоль направлений x_1 , x_2 и x_3 соответственно так, что $(x_j)_{m_j} = h_j m_j$. Кроме того, зададим ячейки сетки

$$C_{m_1, m_2, m_3} = \prod_{j=1}^3 [h_j(m_j - 1/2), h_j(m_j + 1/2)],$$

где \prod обозначает прямое произведение множеств. Определим потенциал и проводимость постоянными внутри ячейки сетки, при этом они могут иметь разрывы на гранях ячейки. Тогда конечно-разностную аппроксимацию уравнения Пуассона (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1} (\tilde{\sigma}_{m_1+1/2, m_2, m_3} D_1[\varphi]_{m_1+1/2, m_2, m_3} - \tilde{\sigma}_{m_1-1/2, m_2, m_3} D_1[\varphi]_{m_1-1/2, m_2, m_3}) + \\ & + \frac{1}{h_2} (\tilde{\sigma}_{m_1, m_2+1/2, m_3} D_2[\varphi]_{m_1, m_2+1/2, m_3} - \tilde{\sigma}_{m_1, m_2-1/2, m_3} D_2[\varphi]_{m_1, m_2-1/2, m_3}) + \\ & + \frac{1}{h_3} (\tilde{\sigma}_{m_1, m_2, m_3+1/2} D_3[\varphi]_{m_1, m_2, m_3+1/2} - \tilde{\sigma}_{m_1, m_2, m_3-1/2} D_3[\varphi]_{m_1, m_2, m_3-1/2}) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где конечно-разностные операторы определены как

$$\begin{aligned} D_1[\varphi]_{m_1+1/2, m_2, m_3} &= \frac{\varphi_{m_1+1, m_2, m_3} - \varphi_{m_1, m_2, m_3}}{h_1}, \\ D_2[\varphi]_{m_1, m_2+1/2, m_3} &= \frac{\varphi_{m_1, m_2+1, m_3} - \varphi_{m_1, m_2, m_3}}{h_2}, \\ D_3[\varphi]_{m_1, m_2, m_3+1/2} &= \frac{\varphi_{m_1, m_2, m_3+1} - \varphi_{m_1, m_2, m_3}}{h_3}, \end{aligned}$$

а электрическая проводимость на гранях ячеек сетки рассчитывается как гармоническое усреднение проводимостей соседних ячеек:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\sigma}_{m_1+1/2,m_2,m_3}} &= 2 \left(\frac{1}{\sigma_{m_1+1,m_2,m_3}} + \frac{1}{\sigma_{m_1,m_2,m_3}} \right), \\ \frac{1}{\tilde{\sigma}_{m_1,m_2+1/2,m_3}} &= 2 \left(\frac{1}{\sigma_{m_1,m_2+1,m_3}} + \frac{1}{\sigma_{m_1,m_2,m_3}} \right), \\ \frac{1}{\tilde{\sigma}_{m_1,m_2,m_3+1/2}} &= 2 \left(\frac{1}{\sigma_{m_1,m_2,m_3+1}} + \frac{1}{\sigma_{m_1,m_2,m_3}} \right). \end{aligned}$$

Более подробное описание построения аппроксимации можно найти, например, в [21, 22]. Эти модификации коэффициентов сохраняют второй порядок сходимости конечно-разностного решения [8].

4. Итеративный решатель. Для решения системы линейных алгебраических уравнений обычно применяются методы крыловского типа. Однако число обусловленности системы растет с увеличением ее размера. Кроме того, в геоматериалах электропроводность (удельное сопротивление) может варьироваться на несколько порядков, что еще больше увеличивает число обусловленности. Для увеличения скорости сходимости итерационных методов для уравнения Пуассона традиционно используются несколько способов предобусловливания. Среди прочих часто используются неполная LU-факторизация [21], в том числе малоранговые аппроксимации [28], и многосеточные методы [24, 33]. Как уже упоминалось, первые подходы требуют хранения матрицы и ее сомножителей; таким образом, в памяти должно храниться не менее $4N$ дополнительных переменных, где N — размер задачи (количество точек сетки в вычислительной области). Подходы из второго класса требуют решения ряда задач (1) на наборе вложенных сеток и хранения их решений. Однако, если мы рассмотрим модели, представленные на рис. 1 или рис. 4, изменение масштаба или размера сетки приводит к изменению топологии и геометрии порового пространства, которое является основной проводящей частью модели. Таким образом, решение задачи на грубой сетке не будет ближе к истинному, чем для однородных сред. В то же время систему уравнений (7) с постоянной проводимостью можно эффективно решить спектральным методом [17, 30] с использованием графических процессоров.

Рассмотрим систему уравнений (7), записанную в краткой форме

$$L\phi = f,$$

после предобусловливания мы получаем систему

$$(L_0^{-1}L)\varphi = A\varphi = L_0^{-1}f,$$

где L и L_0 — аппроксимации оператора Лапласа для неоднородных и однородных сред соответственно. Наиболее трудоемкой частью алгоритма является вычисление умножения матрицы на вектор. Действие матрицы L описывается формулами (7), в то время как действие L_0^{-1} требует решения системы уравнений (7) с постоянной проводимостью для различных правых частей. Чтобы вычислить $L_0^{-1}\psi$ для произвольного ψ , мы предлагаем использовать спектральные методы. Применяя преобразование Фурье в направлениях x_2 и x_3 к уравнению (1), получаем серию одномерных задач

$$\frac{d^2\Phi}{dx_1^2} - (k_2^2 + k_3^2)\Phi = g(x_1, k_2, k_3)/\sigma_0,$$

где Φ — фурье-образ искомой функции, а $g(x_1, k_2, k_3)$ — образ правой части. Заметим, что для каждой частоты задачу можно решать независимо. Для решения одномерных уравнений используется та же аппроксимация, что и в уравнении (7), а затем применяется метод прогонки. После этого к решению применяется обратное преобразование Фурье. Таким образом, решение задачи можно представить следующим образом:

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_0} \mathcal{F}_{2,3}^{-1} \left[\hat{L}(k_2, k_3)^{-1} \mathcal{F}_{2,3} [f(\mathbf{x})] \right],$$

где $\mathcal{F}_{2,3}$ — оператор преобразования Фурье, а $\hat{L}(k_2, k_3)$ — одномерный оператор, зависящий от пространственных частот k_2 и k_3 . Параметр σ_0 равен проводимости флюида.

Необходимо заметить, что если используются периодические граничные условия, то правые части и решения являются периодическими, что позволяет избежать эффекта Гиббса. В случае граничных условий Неймана мы предлагаем выполнить дополнительный шаг для уменьшения эффекта Гиббса. Вместо

того чтобы применять преобразование Фурье непосредственно к правым частям, мы отражаем его относительно $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ как четные функции. Это обеспечивает непрерывность новых функций. Более того, использование тривиальных граничных условий Неймана обеспечивает непрерывность нормальных производных.

5. Численные эксперименты.

5.1. Верификация алгоритма. Для верификации разработанного алгоритма мы рассчитали электрический ток для наборов простых моделей. Сначала мы рассмотрели кубический образец с низкой проводимостью с одним проводящим каналом квадратного сечения. Сторона сечения канала была равна одной пятой части образца. Электропроводность вмещающей среды σ_b составляла 0.5 См, а электропроводность канала σ_c — 5 См. Шаг сетки задавался равным 1 мкм, а граничные условия — $\varphi(0, x_2, x_3) = 0$ и $\varphi(X_1, x_2, x_3) = 1$, т.е. разность потенциалов была равна единице. Мы задавали размер образцов как $5 \cdot 2^n$ точек, где $n = 0, \dots, 6$, т.е. изменяли размер от 5 до 320 точек. После вычисления электрического потенциала внутри образца эффективная электропроводность оценивалась по формуле (6).

С другой стороны, рассматриваемая модель эквивалентна электрическому контуру с параллельными резисторами, поэтому по закону Ома эффективная проводимость равна

$$\sigma_{||} = \sigma_b S_b / S + \sigma_c S_c / S,$$

где S_b и S_c — области образца вокруг канала и самого канала соответственно, а S — площадь поперечного сечения образца. Для описанных экспериментов $S_c / S = 0.04$ и $S_b / S = 0.96$, таким образом, $\sigma_{||} = 0.68$ См. Для всех рассмотренных размеров расчетной области оцененная проводимость составила 0.68 См с машинной точностью. В качестве основного итерационного метода использовался метод BiCGStab (Biconjugate Gradient Stabilized), который сошелся за одну итерацию.

Таблица 1
Результаты для последовательных резисторов с
измельчением сетки

Размер модели	Точность	σ_{\perp}	σ_{est}	Ошибка
5	$1.01 \cdot 10^{-17}$	1.7857	1.53846	0.138
10	$3 \cdot 10^{-15}$	1.7857	1.6667	0.067
20	$3 \cdot 10^{-15}$	1.7857	1.7272	0.0328
40	$5 \cdot 10^{-14}$	1.7857	1.7567	0.0162
80	$1 \cdot 10^{-13}$	1.7857	1.7713	0.00807
160	$2 \cdot 10^{-13}$	1.7857	1.7785	0.00404
320	$5 \cdot 10^{-13}$	1.7857	1.7821	0.00202

Таблица 2
Результаты для последовательных резисторов с
увеличением количества слоев

Размер модели	Точность	σ_{\perp}	σ_{est}	Ошибка
5	$1.01 \cdot 10^{-17}$	1.7857	1.53846	0.138
10	$7.5 \cdot 10^{-17}$	1.7857	1.6667	0.067
20	$1.2 \cdot 10^{-16}$	1.7857	1.7272	0.0327
40	$7 \cdot 10^{-16}$	1.7857	1.75676	0.0162
80	$2 \cdot 10^{-15}$	1.7857	1.7713	0.00807
160	$3,55 \cdot 10^{-15}$	1.7857	1.77852	0.00403
320	$1 \cdot 10^{-14}$	1.7857	1.78212	0.00201

Тот же эксперимент был выполнен на моделях с большим контрастом параметров. Мы рассмотрели ту же постановку, но снизили проводимость образца вокруг канала до 0.001 См. В этом случае эффективная

проводимость образца составила $\sigma_{||} = 0.20096$ См. Алгоритм сходится за одну итерацию с относительной погрешностью не более 10^{-14} .

Вторая серия экспериментов выполнена для слоистых сред со слоями, перпендикулярными основному направлению изменения потенциала. Этот тип моделей соответствует последовательному соединению резисторов в законе Ома, и эффективную проводимость можно оценить по формуле

$$\frac{1}{\sigma_{\perp}} = \frac{l_b}{L} \frac{1}{\sigma_b} + \frac{l_c}{L} \frac{1}{\sigma_c},$$

где l_b — это общая толщина вмещающей среды, l_c — общая толщина проводящих слоев и L — длина образца. Мы рассмотрели $\sigma_c = 5$ См и $\sigma_b = 0.5$ См. Использование более низкой проводимости во вмещающей среде делает весь образец изолятором. Во всех экспериментах мы фиксируем отношения $l_c/L = 0.5$ и $l_b/L = 0.8$, а размер модели изменяем так же, как и раньше, т.е. он составляет $5 \cdot 2^n$, $n = 0, \dots, 6$. Вместе с размером модели меняется и сама модель, причем двумя способами. В первом мы сохраняем один проводящий слой и увеличиваем его толщину пропорционально размеру области, а во втором мы сохраняем толщину слоев, но увеличиваем их количество пропорционально размеру области. Результаты моделирования представлены в табл. 1 и 2. Необходимо заметить, что независимо от размера модели, метод BiCGStab сходится за 3 итерации с относительной погрешностью, не превышающей 10^{-13} . Численные оценки электропроводности сходятся к теоретическим оценкам с первым порядком. Мы либо увеличивали количество точек сетки на слой, либо количество слоев. В первом случае сходимость обусловлена измельчением сетки, показывающим скорость сходимости алгоритма, а во втором — приближением модели к периодической, для которой построена теоретическая оценка.

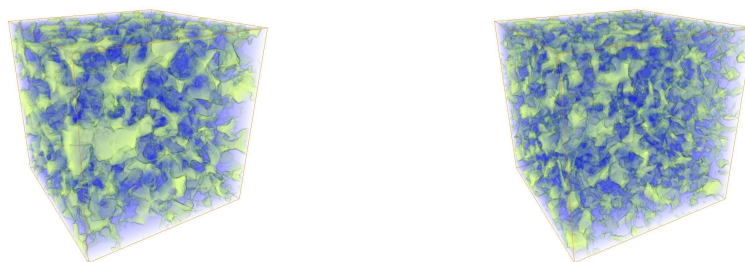


Рис. 1. Изображение порового пространства песчаника Бентхайм (Bentheimer). Слева — цифровой образец с разрешением 3.44 мкм, справа — 5.58 мкм на воксель

5.2. Применение алгоритма для цифровых образцов горной породы. Для тестирования разработанного алгоритма мы использовали модели, построенные по КТ-изображениям реальных горных пород [14]. Для всех образцов выполнялась сегментация на две фазы: поровое и скелетное пространство зерна, что позволило нам представить результаты моделирования в виде formation factor (FF), который определяется как отношение проводимости насыщающей жидкости к эффективной проводимости породы: $F = \sigma_{fl}/\hat{\sigma}$.

5.2.1. Песчаник Бентхайм. Первая серия экспериментов выполнена на образцах песчаника Бентхайм (Bentheimer), описанных в [16]. Мы рассмотрели изображения с разрешением 5.58 мкм и 3.44 мкм на воксель (изображения В и С из [16] соответственно). По ним построены модели размером 400^3 вокселей, поровые пространства которых представлены на рис. 1. Сначала рассчитывались электрические потенциалы в образцах, затем оценивалась электропроводность и, наконец, коэффициенты проводимости пласта. Для изображения В (5.58 мкм) FF составил 25.6826, а для изображения С (3.44 мкм) — 20.543. Число итераций

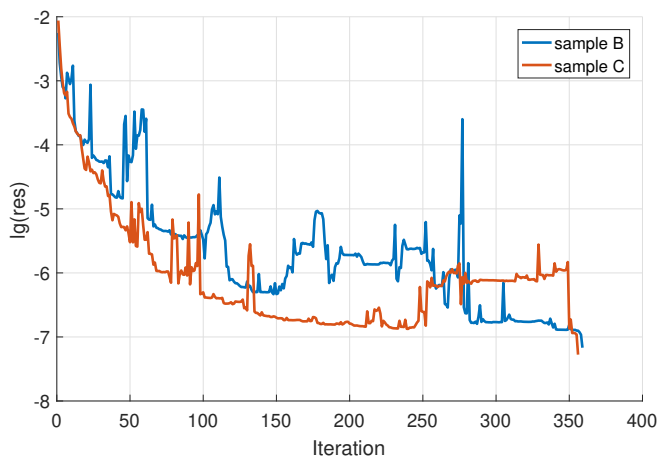


Рис. 2. Невязки в логарифмическом масштабе для экспериментов с песчаником Бентхайм (Bentheimer)

BiCGStab составило 356 и 359 для изображений В и С соответственно, а среднее время на итерацию — 1.22 секунды для обоих изображений. На графике зависимости невязки от номера итерации (рис. 2) видно, что сначала невязка быстро стремится к нулю, но затем сходимость замедляется, что типично для методов крыловского типа.



Рис. 3. Поровое пространство модели карбоната АН в первый (слева) и последний (справа) моменты растворения



Рис. 4. Поровое пространство модели карбоната ВН в первый (слева) и последний (справа) моменты растворения

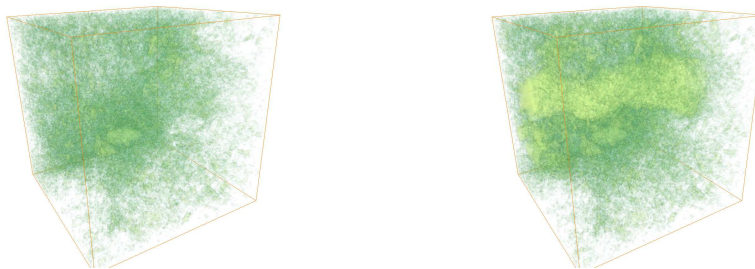


Рис. 5. Поровое пространство модели карбоната АЛ в первый (слева) и последний (справа) моменты растворения

5.2.2. Карбонатные породы. Вторая серия экспериментов выполнена для образцов карбонатных пород водоносного горизонта, расположенного на Ближнем Востоке, представленных в [11]. Четыре образца карбоната были насыщены углекислотой CO_2 , что привело к частичному растворению кальцита и эрозии порового пространства, как показано на рис. 3–6. В базе данных [12] доступно по десять томографических изображений для каждого образца в разные моменты времени. Образцы сгруппированы в две пары в зависимости от скорости потока, используемой в лабораторных экспериментах, поскольку чем выше скорость потока, тем быстрее происходит растворение матрицы образца и образование червоточин.

Подробное описание образцов и лабораторных экспериментов приведено в [11], мы сохраняем те же обозначения для изображений, т.е. модели АН и ВН соответствуют экспериментам с высокой скоростью потока, а АЛ и ВЛ — с низкой скоростью.

Чтобы вычислить электрические потенциалы и оценить электропроводность и FF пласта, мы вырезали части размером 400^3 вокселей из каждого доступного в базе образца (одинаковые для всех десяти изображений в разные моменты времени). Изображения порового пространства в первый и последний моменты растворения представлены на рис. 3 и 4 для высокой скорости потока и на рис. 5 и 6 — для низкой.



Рис. 6. Поровое пространство модели карбоната BL в первый (слева) и последний (справа) моменты растворения

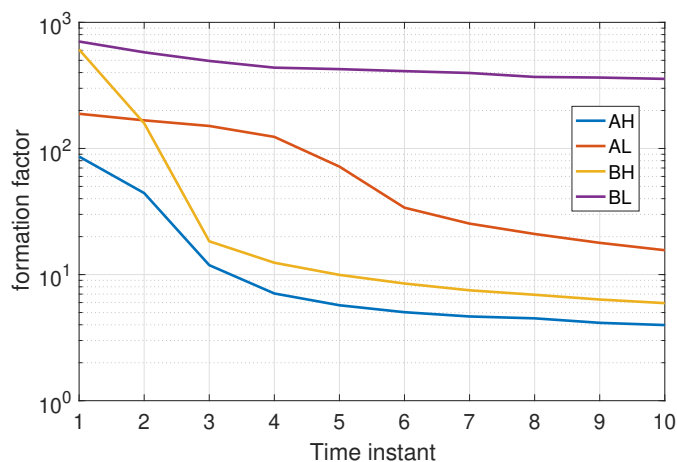


Рис. 7. Коэффициенты проводимости пласта четырех образцов карбоната в зависимости от времени растворения матрицы

Таблица 3

Результаты для карбонатов в экспериментах с высокой скоростью потока

exp.	$F - AH$	it. — AH	$T/it. - AH$	$F - BH$	it. — BH	$T/it. - BH$
1	86.2707	198	1.2424	609.272	357	1.2297
2	44.2759	621	1.2287	158.399	352	1.2159
3	11.8764	592	1.2196	18.3608	1197	1.2164
4	7.08208	673	1.2199	12.416	741	1.2213
5	5.71026	909	1.2563	9.94478	950	1.2189
6	5.03017	629	1.2178	8.49411	574	1.2178
7	4.65335	413	1.2179	7.5035	848	1.2170
8	4.49725	413	1.2131	6.91817	643	1.2177
9	4.14367	425	1.2118	6.34032	625	1.2256
10	3.97739	498	1.2209	5.93876	1048	1.2214

Заметим, что образцы AL и AH были выбраны авторами [11] как имеющие более высокую начальную гидродинамическую проницаемость, чем образцы BH и BL. Это подтверждается также геометрией порового пространства. В образцах AH и AL поры объединяются в кластеры, образуя предпочтительные пути потока, в то время как в образцах BH и BL поровое пространство более разрозненное. В результате коэффициенты проводимости пласта у образцов А ниже, чем у образцов В, как показано в табл. 3 и 4. После химического растворения матрицы для образцов, в которых скорость потока жидкости была высокой,

Таблица 4

Результаты для карбонатов в экспериментах с низкой скоростью потока

exp.	$F - AL$	it. — AL	T/it. — AL	$F - BL$	it. — BL	T/it. — BL
1	188.378	460	1.2174	704.888	400	1.2325
2	167.126	1039	1.2117	578.978	346	1.2312
3	150.857	1092	1.2106	494.477	408	1.2304
4	123.602	633	1.1580	437.39	350	1.2371
5	71.829	405	1.2173	425.808	528	1.2330
6	33.9191	648	1.2160	410.464	316	1.23428
7	25.3597	350	1.2257	396.813	379	1.2296
8	20.9849	528	1.2178	369.259	296	1.2635
9	17.85	473	1.2156	365.082	386	1.2280
10	15.6039	490	1.2102	356.321	425	1.2329

образуются широкие червоточины, которые значительно снижают FF пласта. Кроме того, червоточина сформировалась и в образце AL, где в эксперименте была низкая скорость потока жидкости, из-за изначально существовавшего предпочтительного пути в образце 5, которая так же привела к уменьшению коэффициента проводимости пласта. При этом в образце BL (низкая начальная проницаемость и низкая скорость потока) наблюдалось слабое растворение и соответственно малое изменение коэффициента проводимости пласта (табл. 4). Для всех четырех экспериментов также приводятся графики зависимости коэффициентов проводимости пласта от времени растворения, которые показывают значительное снижение скорости изменения порового пространства при образовании червоточин (рис. 7). Заметим, что во всех случаях число итераций, необходимых для сходимости алгоритма, варьируется в пределах 400–1100 итераций, зависит от геометрии порового пространства и сложности топологии и может потребовать дополнительного изучения. При этом время на итерацию стабильно для всех экспериментов. Все моделирование выполнялись с использованием графических карт Nvidia GTX 2080Ti.

6. Заключение. Представлен алгоритм численного моделирования потенциального электрического поля в пористых материалах. Алгоритм основан на итерационных методах крыловского типа для решения дискретизированного уравнения Пуассона. Мы используем обратный оператор Лапласа для однородных сред в качестве предобусловливателя, который вычисляется с использованием метода FFT в направлениях, перпендикулярных основному направлению изменения потенциалов. После этого с использованием метода прогонки решается серия одномерных задач. Решатель реализован на графических процессорах, что позволяет решать задачи размером до 400^3 вокселей на одном GPU. Количество итераций практически не зависит от размера модели, но зависит от контраста между проводимостями жидкости и матрицы породы и от геометрической сложности порового пространства. Несомненно, увеличение размеров модели потребует разработки и реализации параллельного алгоритма, ориентированного на использование вычислительных систем с многими GPU, либо в пределах одного вычислительного узла (сервера), либо систем с распределенной памятью. Первое, по-нашему мнению, предпочтительно как с точки зрения эффективности реализации, так и с практической точки зрения.

Мы применили алгоритм для оценки коэффициента проводимости пласта песчаника Бентхайм, используя его КТ-изображения различного разрешения, а также исследовали процесс изменения коэффициента проводимости пласта карбонатных образцов при их насыщении углекислым газом CO_2 . Мы показали, что из-за химического растворения карбонатной матрицы коэффициент проводимости пласта уменьшается, однако скорость изменения снижается, когда образуются червоточины.

Работа поддержана РФФИ (гранты 19-01-00347, 18-05-00031, 18-01-00579), а также грантом Президента РФ для поддержки молодых ученых — докторов наук МД-20.2019.5. Численные эксперименты проводились на кластере НКС-30Т Сибирского суперкомпьютерного центра и суперкомпьютере “Ломоносов” Московского государственного университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базайкин Я.В., Колохин Д.Р., Лисица В.В., Новиков М.А., Решетова Г.В., Хачкова Т.С. Влияние масштаба

- микротомографических изображений на оценку макромасштабных свойств породы // Технологии сейсморазведки. 2016. № 2. 38–47.
2. *Васильев Р.В., Герке К.М., Карсанина М.В., Корост Д.В.* Решение уравнения Стокса в трехмерной геометрии конечно-разностным методом // Математическое моделирование. 2015. **27**, № 6. 67–80.
 3. *Воронин К.В., Соловьев С.А.* Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоранговой аппроксимации в качестве предобусловливателя // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 268–280.
 4. *Гадьльшина К.А., Хачкова Т.С., Лисица В.В.* Численное моделирование химического взаимодействия флюида с горной породой // Вычислительные методы и программирование. 2019. **20**. 457–470.
 5. *Лихачев А.В.* Выделение трех уровней яркости на зашумленном изображении // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**. 180–186.
 6. *Неклюдов Д.А., Сильвестров И.Ю., Чеверда В.А.* Итерационный метод решения трехмерного уравнения Гельмгольца с “почти аналитическим” предобусловливателем для моделирования акустических волновых полей в задачах сейсморазведки // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 514–529.
 7. *Решетова Г.В., Хачкова Т.С.* Численный метод оценки эффективных упругих характеристик горной породы по двумерным и трехмерным цифровым изображениям ядра // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 416–433.
 8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
 9. *Соловьев С.А.* Решение разреженных систем линейных уравнений методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 441–460.
 10. *Хачкова Т.С., Базайкин Я.В., Лисица В.В.* Применение методов вычислительной топологии для анализа изменения порового пространства породы в процессе химического растворения // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**. 41–55.
 11. *Al-Khulaifi Y., Lin Q., Blunt M.J., Bijeljic B.* Pore-scale dissolution by CO₂ saturated brine in a multiminerale carbonate at reservoir conditions: impact of physical and chemical heterogeneity // Water Resources Research. 2019. **55**, N 4. 3171–3193.
 12. *Al-Khulaifi Y., Lin Q., Blunt M.J., Bijeljic B.* Pore-scale dissolution by CO₂ saturated brine in a multi-mineral carbonate at reservoir conditions: impact of physical and chemical heterogeneity. 2019 <http://dx.doi.org/10.5285/52b08e7f-9fba-40a1-b0b5-dda9a3c83be2>
 13. *Alpak F.O., Riviere B., Frank F.* A phase-field method for the direct simulation of two-phase flows in pore-scale media using a non-equilibrium wetting boundary condition // Computational Geosciences. 2016. **20**. 881–908.
 14. *Andrä H., Combaret N., Dvorkin J., Glatt E., Han J., Kabel M., Keehm Y., Krzikalla F., Lee M., Madonna C., Marsh M., Mukerji T., Saenger E., Sain R., Saxena N., Ricker S., Wiegmann A., Zhan X.* Digital rock physics benchmarks — part I: Imaging and segmentation // Computers and Geosciences. 2013. **50**. 25–32.
 15. *Andrä H., Combaret N., Dvorkin J., Glatt E., Han J., Kabel M., Keehm Y., Krzikalla F., Lee M., Madonna C., Marsh M., Mukerji T., Saenger E., Sain R., Saxena N., Ricker S., Wiegmann A., Zhan X.* Digital rock physics benchmarks — part II: Computing effective properties // Computers and Geosciences. 2013. **50**. 33–43.
 16. *Bazaikin Y., Gurevich B., Iglauer S., et al.* Effect of CT image size and resolution on the accuracy of rock property estimates // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2017. **122**, N 5. 3635–3647.
 17. *Belonosov M., Kostin V., Neklyudov D., Tcheverda V.* 3D numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver // Geophysics. 2018. **83**, N 6. T333–T344.
 18. *Dugan N., Genovese L., Goedecker S.* A customized 3D GPU Poisson solver for free boundary conditions // Computer Physics Communications. 2013. **184**, N 8. 1815–1820.
 19. *Edelsbrunner H., Harer J.* Computational Topology, An Introduction. Providence: AMS Press, 2010.
 20. *Gerke K.M., Karsanina M.V., Katsman R.* Calculation of tensorial flow properties on pore level: Exploring the influence of boundary conditions on the permeability of three-dimensional stochastic reconstructions // Physical Review E. 2019. **100**, N 5. doi 10.1103/PhysRevE.100.053312.
 21. *Haber E., Ascher U.M., Aruliah D.A., Oldenburg D.W.* Fast simulation of 3D electromagnetic problems using potentials // Journal of Computational Physics. 2000. **163**, N 1. 150–171.
 22. *Haber E., Ascher U.M.* Fast finite volume simulation of 3D electromagnetic problems with highly discontinuous coefficients // SIAM Journal on Scientific Computing. 2001. **22**, N 6. 1943–1961.
 23. *Iassonov P., Gebrenegus T., Tuller M.* Segmentation of X-ray computed tomography images of porous materials: a crucial step for characterization and quantitative analysis of pore structures // Water Resources Research. 2009. **45**, N 9. doi 10.1029/2009WR008087.
 24. *Johansen H., Colella Ph.* A Cartesian grid embedded boundary method for Poisson’s equation on irregular domains // Journal of Computational Physics. 1998. **147**, N 1. 60–85.
 25. *Jodra J.L., Gurrutxaga I., Muguerza J., Yera A.* Solving Poisson’s equation using FFT in a GPU cluster // Journal of Parallel and Distributed Computing. 2017. **102**. 28–36.
 26. *Kameda A., Dvorkin J., Keehm Y., Nur A., Bosl W.* Permeability-porosity transforms from small sandstone fragments // Geophysics. 2006. **71**, N 1. doi 10.1190/1.2159054.
 27. *Karsanina M.V., Gerke K.M.* Hierarchical optimization: fast and robust multiscale stochastic reconstructions with rescaled correlation functions // Physical Review Letters. 2018. **121**, N 26. doi 10.1103/PhysRevLett.121.265501.

28. *Kostin V., Solovyev S., Bakulin A., Dmitriev M.* Direct frequency-domain 3D acoustic solver with intermediate data compression benchmarked against time-domain modeling for full-waveform inversion applications // *Geophysics*. 2019. **84**, N 4. doi 10.1190/geo2018-0465.1.
29. *Madonna C., Quintal B., Frehner M., Almqvist B.C.G., Tisato N., Pistone M., Marone F., Saenger E.H.* Synchrotron-based X-ray tomographic microscopy for rock physics investigations // *Geophysics*. 2013. **78**, N 1. doi 10.1190/geo2012-0113.1.
30. *Pleshkevich A., Vishnevskiy D., Lisitsa V.* Sixth-order accurate pseudo-spectral method for solving one-way wave equation // *Applied Mathematics and Computation*. 2019. **359**. 34–51.
31. *Saenger E.H., Lebedev M., Uribe D.* Analysis of high-resolution X-ray computed tomography images of Bentheim sandstone under elevated confining pressures // *Geophysical Prospecting*. 2016. **64**, N 4. 848–859.
32. *Shulakova V., Pervukhina M., Müller T.M., et al.* Computational elastic up-scaling of sandstone on the basis of X-ray micro-tomographic images // *Geophysical Prospecting*. 2013. **61**, N 2. 287–301.
33. *Stüben K.* A review of algebraic multigrid // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001. **128**, N 1–2. 281–309.
34. *Wollner U., Kerimov A., Mavko G.* Scale and boundary effects on the effective elastic properties of 2-D and 3-D non-REV heterogeneous porous media // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2018. **123**, N 7. 5451–5465.
35. *Zhan X., Schwartz L.M., Toksöz M.N., et al.* Pore-scale modeling of electrical and fluid transport in Berea sandstone // *Geophysics*. 2010. **75**, N 5. doi 10.1190/1.3463704.

Поступила в редакцию
20.07.2020

Numerical Estimation of Electrical Resistivity in Digital Rocks Using GPUs

T. S. Khachkova¹, V. V. Lisitsa², G. V. Reshetova³, and V. A. Tcheverda⁴

¹ *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptiyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Scientist, e-mail: KhachkovaTS@ipgg.sbras.ru*

² *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptiyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Associate Professor, Head of Laboratory, e-mail: lisitsavv@ipgg.sbras.ru*

³ *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: kgv@nmsf.sccc.ru*

⁴ *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptiyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: CheverdaVA@ipgg.sbras.ru*

Received July 20, 2020

Abstract: We present a numerical algorithm for computing the electric field in digital rock samples and estimating their electrical resistivity (conductivity). The main peculiarity of the algorithm is its applicability to strongly heterogeneous models including partially saturated and multi-mineral rock samples. The algorithm is based on the iterative Krylov-type solver preconditioned by the inverse Laplace operator for homogeneous media. The preconditioner is computed using the spectral method in directions orthogonal to the direction of the main electric current, whereas the series of 1D problems are solved by the Thomas algorithm. We implement the algorithm using GPUs, which allows us to use a single GPU to solve the problems for samples whose size is up to 400³ voxels.

Keywords: digital rock physics, finite-difference method, iterative methods, electrical resistivity, numerical upscaling.

References

1. Ya. V. Bazaikin, D. R. Kolyukhin, V. V. Lisitsa, et al., “Effect of CT-Image Scale on Macro-Scale Properties Estimation,” *Tekhnol. Seismorazved.*, No. 2, 38–47 (2016).

2. R. V. Vasilyev, K. M. Gerke, M. V. Karsanina, and D. V. Korost, "Solution of the Stokes Equation in Three-Dimensional Geometry by the Finite-Difference Method," *Mat. Model.* **27** (6), 67–80 (2015) [*Math. Models Comput. Simul.* **8** (1), 63–72 (2016)].
3. K. V. Voronin and S. A. Solovyev, "Solution of the Helmholtz Problem Using the Preconditioned Low-Rank Approximation Technique," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 268–280 (2015).
4. K. A. Gadylyshina, T. S. Khachkova, and V. V. Lisitsa, "Numerical Modeling of Chemical Interaction between a Fluid and Rocks," *Vychisl. Metody Programm.* **20**, 457–470 (2019).
5. A. V. Likhachov, "Allocation of Three Brightness Levels on a Noisy Image," *Vychisl. Metody Programm.* **21**, 180–186 (2020).
6. D. A. Neklyudov, I. Yu. Silvestrov, and V. A. Tcheverda, "A 3D Helmholtz Iterative Solver with a Semi-Analytical Preconditioner for Acoustic Wavefield Modeling in Seismic Exploration Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 514–529 (2014).
7. G. V. Reshetova and T. S. Khachkova, "A Numerical Method to Estimate the Effective Elastic Moduli of Rocks from Two- and Three-Dimensional Digital Images of Rock Core Samples," *Vychisl. Metody Programm.* **18**, 416–433 (2017).
8. A. A. Samarskii, *The Theory of Finite Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1989; Marcel Dekker, New York, 2001).
9. S. A. Solovyev, "Application of the Low-Rank Approximation Technique in the Gauss Elimination Method for Sparse Linear Systems," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 441–460 (2014).
10. T. S. Khachkova, Ya. V. Bazaikin, and V. V. Lisitsa, "Use of the Computational Topology to Analyze the Pore Space Changes during Chemical Dissolution," *Vychisl. Metody Programm.* **21**, 41–55 (2020).
11. Y. Al-Khulaifi, Q. Lin, M. J. Blunt, and B. Bijeljic, "Pore-Scale Dissolution by CO₂ Saturated Brine in a Multimineral Carbonate at Reservoir Conditions: Impact of Physical and Chemical Heterogeneity," *Water Resour. Res.* **55** (4), 3171–3193 (2019).
12. Y. Al-Khulaifi, Q. Lin, M. J. Blunt, and B. Bijeljic, "Pore-Scale Dissolution by CO₂ Saturated Brine in a Multi-Mineral Carbonate at Reservoir Conditions: Impact of Physical and Chemical Heterogeneity," (2019) <http://dx.doi.org/10.5285/52b08e7f-9fba-40a1-b0b5-dda9a3c83be2>. Cited August 15, 2020.
13. F. O. Alpak, B. Riviere, and F. Frank, "A Phase-Field Method for the Direct Simulation of Two-Phase Flows in Pore-Scale Media Using a Non-Equilibrium Wetting Boundary Condition," *Computat. Geosci.* **20**, 881–908 (2016).
14. H. Andrä, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., "Digital Rock Physics Benchmarks — Part I: Imaging and Segmentation," *Comput. Geosci.* **50**, 25–32 (2013).
15. H. Andrä, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., "Digital Rock Physics Benchmarks — Part II: Computing Effective Properties // *Comput. Geosci.* **50**, 33–43 (2013).
16. Y. Bazaikin, B. Gurevich, S. Iglauer, et al., "Effect of CT Image Size and Resolution on the Accuracy of Rock Property Estimates," *J. Geophys. Res.: Solid Earth* **122** (5), 3635–3647 (2017).
17. M. Belonosov, V. Kostin, D. Neklyudov, and V. Tcheverda, "3D Numerical Simulation of Elastic Waves with a Frequency-Domain Iterative Solver," *Geophysics* **83** (6), T333–T344 (2018).
18. N. Dugan, L. Genovese, and S. Goedecker, "A Customized 3D GPU Poisson Solver for Free Boundary Conditions," *Comput. Phys. Commun.* **184** (8), 1815–1820 (2013).
19. H. Edelsbrunner and J. Harer, *Computational Topology: An Introduction* (AMS Press, Providence, 2010).
20. K. M. Gerke, M. V. Karsanina, and R. Katsman, "Calculation of Tensorial Flow Properties on Pore Level: Exploring the Influence of Boundary Conditions on the Permeability of Three-Dimensional Stochastic Reconstructions," *Phys. Rev. E* **100** (2019). doi 10.1103/PhysRevE.100.053312
21. E. Haber, U. M. Ascher, D. A. Aruliah, and D. W. Oldenburg, "Fast Simulation of 3D Electromagnetic Problems Using Potentials," *J. Comput. Phys.* **163** (1), 150–171 (2000).
22. E. Haber and U. M. Ascher, "Fast Finite Volume Simulation of 3D Electromagnetic Problems with Highly Discontinuous Coefficients," *SIAM J. Sci. Comput.* **22** (6), 1943–1961 (2001).
23. P. Iassonov, T. Gebrenegus, and M. Tuller, "Segmentation of X-Ray Computed Tomography Images of Porous Materials: A crucial Step for Characterization and Quantitative Analysis of Pore Structures," *Water Resour. Res.* **45** (2009). doi 10.1029/2009WR008087
24. H. Johansen and Ph. Colella, "A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Poisson's Equation on Irregular Domains," *J. Comput. Phys.* **147** (1), 60–85 (1998).
25. J. L. Jodra, I. Gurrutxaga, J. Muguerza, and A. Yera, "Solving Poisson's Equation Using FFT in a GPU Cluster," *J. Parallel Distr. Comput.* **102**, 28–36 (2017).

26. A. Kameda, J. Dvorkin, Y. Keehm, et al., “Permeability-Porosity Transforms from Small Sandstone Fragments,” *Geophysics* **71** (2006). doi 10.1190/1.2159054
27. M. V. Karsanina and K. M. Gerke, “Hierarchical Optimization: Fast and Robust Multiscale Stochastic Reconstructions with Rescaled Correlation Functions,” *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018). doi 10.1103/PhysRevLett.121.265501
28. V. Kostin, S. Solovyev, A. Bakulin, and M. Dmitriev, “Direct Frequency-Domain 3D Acoustic Solver with Intermediate Data Compression Benchmarked Against Time-Domain Modeling for Full-Waveform Inversion Applications,” *Geophysics* **84** (2019). doi 10.1190/geo2018-0465.1
29. C. Madonna, B. Quintal, M. Frehner, et al., “Synchrotron-Based X-Ray Tomographic Microscopy for Rock Physics Investigations,” *Geophysics* **78** (2013). doi 10.1190/geo2012-0113.1
30. A. Pleshkevich, D. Vishnevskiy, and V. Lisitsa, “Sixth-Order Accurate Pseudo-Spectral Method for Solving One-Way Wave Equation,” *Appl. Math. Comput.* **359**, 34–51 (2019).
31. E. H. Saenger, M. Lebedev, and D. Uribe, “Analysis of High-Resolution X-Ray Computed Tomography Images of Bentheim Sandstone under Elevated Confining Pressures,” *Geophys. Prospect.* **64** (4), 848–859 (2016).
32. V. Shulakova, M. Pervukhina, T. M. Müller, et al., “Computational Elastic Up-scaling of Sandstone on the Basis of X-Ray Micro-Tomographic Images,” *Geophys. Prospect.* **61** (2), 287–301 (2013).
33. K. Stüben, “A Review of Algebraic Multigrid,” *J. Comput. Appl. Math.* **128** (1–2), 281–309 (2001).
34. U. Wollner, A. Kerimov, and G. Mavko, “Scale and Boundary Effects on the Effective Elastic Properties of 2-D and 3-D Non-REV Heterogeneous Porous Media,” *J. Geophys. Res.: Solid Earth* **123** (7), 5451–5465 (2018).
35. X. Zhan, L. M. Schwartz, M. N. Toksöz, et al., “Pore-Scale Modeling of Electrical and Fluid Transport in Berea Sandstone,” *Geophysics* **75** (2010). doi 10.1190/1.3463704