

УДК 532.529.6, 532.6, 519.6

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И. Л. Майков¹, Л. Б. Директор¹

Разработана численная модель динамики вязкой жидкости на основе метода функции уровня для описания процессов нелинейных колебаний капли во время свободного падения, соударения с горизонтальной поверхностью, дробления и слияния капель жидкости в несмешивающейся среде. Получены решения для сред с характерным отношением плотностей менее 10^{-3} и $Re > 1000$. Проведено сравнение результатов моделирования процесса падения капли с имеющимися расчетными и экспериментальными данными.

Ключевые слова: математическое моделирование, вязкая жидкость, функция уровня, шарик Плато, свободная поверхность.

1. Введение. Сложность описания динамики капли вязкой жидкости заключается в необходимости решения системы уравнений Навье–Стокса с учетом граничных условий на свободной поверхности с одновременным определением положения этой поверхности. Эволюцией свободной поверхности во многом определяются основные характеристики гидродинамических процессов.

Проблеме разработки численных методов решения задач со свободными границами посвящено большое число публикаций. Следует отметить, что большинство методов разработано для решения задач динамики одиночной вязкой капли, и обобщение этих методов на ансамбль капель является проблематичным. Наиболее перспективным представляется использование методов сквозного счета с моделированием двухфазной системы однофазной средой с резко меняющимися параметрами на границе раздела в предположении, что граница раздела сред имеет конечную толщину и изменение физических свойств при переходе от одной среды к другой происходит внутри границы [1–7]. Поверхностные силы на границе рассматриваются как объемные и вводятся в уравнение движения. Для определения границы раздела сред используется уравнение переноса скалярной функции, которая претерпевает разрыв на границе фаз [3, 4]. Другой подход заключается в использовании вспомогательной функции — функции уровня (level set function) [6, 7], которая имеет противоположные по знаку значения в разных средах, а нулевой уровень функции соответствует положению границы раздела. Уравнение переноса решается для вспомогательной функции, а значения исходных функций (плотность, вязкость) определяются по функции уровня. Использование функции уровня позволяет описывать динамику областей с изменяющейся топологией.

В уравнении для функции уровня диссипативный механизм переноса отсутствует, и такое уравнение является уравнением гиперболического типа. Дискретизация уравнения переноса с использованием центральных разностей приводит к абсолютно неустойчивой схеме [8]. Схема “против потока” приводит к понижению порядка численной схемы до первого. Такая схема хотя и устойчива, но обладает интенсивной численной диффузией, что достаточно быстро приводит к сильному искажению численного решения. Другой традиционный способ заключается в получении модифицированной условно устойчивой схемы второго порядка точности. Модифицированные схемы второго порядка обладают гораздо менее выраженной численной диффузией и, как правило, хорошо работают, когда искомая функция является достаточно гладкой. Однако если имеются большие градиенты или разрывы функции в некоторых областях (например, на границе раздела сред газ–жидкость), данные схемы становятся непригодными: в решении появляются сильные численные осцилляции.

Численные методы решения уравнений Навье–Стокса делятся на методы, использующие процедуру коррекции давления, и методы, основанные на принципе расщепления по физическим процессам и пространственным координатам [9].

К первым относится полуняевный метод SIMPLE [10] и его различные модификации, позволяющие добиться лучшего согласования поля давления и поля скорости. Несмотря на то что модификации

¹Объединенный институт высоких температур РАН, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2, 125412, Москва; И. Л. Майков, вед. науч. сотр., e-mail: maikov_i@mail.ru; Л. Б. Директор, вед. науч. сотр., e-mail: director@oivtran.ru

метода SIMPLE широко используются на практике и включаются во многие современные вычислительные пакеты, ни один из них не является универсальным. Ко вторым относятся метод маркеров и ячеек (MAC) [11, 12] и связанный с ним метод проекции (projection method) [12], который совпадает с ним во внутренних точках, но отличается реализацией граничных условий. Выбор метода решения во многом зависит от условий задачи.

В отличие от модели [13], построенной с использованием адаптивных сеток и пригодной для расчетов процессов колебаний одиночной капли, разработанная модель описывает как процессы нелинейных колебаний одиночной капли жидкости (колебания в процессе свободного падения, колебания на горизонтальной поверхности), так и процессы дробления и слияния нескольких капель.

В настоящей работе уравнения Навье–Стокса, записанные в переменных “скорость–давление” на прямоугольной равномерной сетке с шахматным расположением узлов в цилиндрической системе координат с симметрией по углу, решаются при помощи метода расщепления по физическим процессам (метода проекции). Для дискретизации производных по времени используется схема Рунге–Кутты третьего порядка точности, для дискретизации диффузионных потоков — центрально-разностные схемы второго порядка точности, конвективных потоков — конечно-разностные схемы повышенной разрешающей способности (ENO-схема третьего порядка точности) [7] для получения неосциллирующих решений на границе раздела сред (характерное отношение плотностей сред составляет 10^{-3} , характерные числа Re — более 1000).

Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения задачи о падении капли из капилляра (отрыв от капилляра, полет, соударение с плоской поверхностью и растекание).

2. Математическая модель. Система из двух несмешивающихся и несжимаемых жидкостей описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \rho_i (\mathbf{U}_i \nabla) \mathbf{U}_i = -\nabla p_i + \nabla \boldsymbol{\tau}_i + \rho_i \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$\nabla \mathbf{U}_i = 0, \tag{2}$$

где i — номер среды (фазы) ($i = 1, 2$), ρ_i — плотность, \mathbf{U}_i — вектор скорости, p_i — давление, t — время, $\boldsymbol{\tau}_i = \mu_i (\nabla \mathbf{U}_i + \nabla \mathbf{U}_i^T)$ — тензор вязких напряжений, μ_i — динамическая вязкость, \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, верхний индекс “Т” означает операцию транспонирования. Индекс “1” будем относить к более плотной среде. На границе раздела сред выполняется динамическое условие

$$(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2) \mathbf{n} = (p_1 - p_2 + \sigma k) \mathbf{n}, \tag{3}$$

где \mathbf{n} — вектор нормали, направленный из первой среды во вторую, k — кривизна поверхности и σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Представим систему из двух сред как однофазную с резко меняющимися параметрами (плотность и вязкость) на границе раздела сред. Предположим, что плотность и динамические вязкости каждой среды постоянны.

Пусть \mathbf{x} — радиус-вектор точки пространства $\Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$ (рис. 1). Введем функцию уровня $\varphi(\mathbf{x}, t)$, такую что $\varphi(\mathbf{x}, t) > 0$ при $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \Omega_1$, $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ при $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \Gamma$, $\varphi(\mathbf{x}, t) < 0$ при $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \Omega_2$. Такое представление двухфазной среды позволяет вводить любое количество подобластей Ω_1 и Ω_2 . Геометрические характеристики границы раздела Γ (в трехмерном случае поверхности) однозначно определяются по функции уровня.

Вектор нормали к поверхности: $\mathbf{n} = \left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right)_{\varphi=0}$. Кривизна границы раздела

$$k = \left(\nabla \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right)_{\varphi=0}. \tag{4}$$

Введем скорость (в дальнейшем будем называть ее скоростью жидкости): $\mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_1, & \varphi > 0, \\ \mathbf{U}_2, & \varphi \leq 0. \end{cases}$

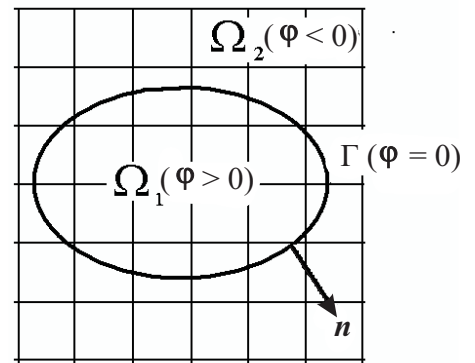


Рис. 1. Расчетная область: Ω_1, Ω_2 — несмешивающиеся жидкости; Γ — граница раздела сред; $\varphi(\mathbf{x}, t)$ — функция уровня; \mathbf{n} — вектор нормали

Скорость — непрерывная функция на границе раздела фаз ($\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ при $\varphi = 0$).

Граница раздела сред движется со скоростью частиц жидкости; уравнение переноса функции уровня можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla \varphi = 0. \quad (5)$$

Поверхностная капиллярная сила может быть сведена к объемной. Объемная капиллярная сила действует только в узком переходном слое и в пределе толщины переходного слоя, стремящейся к нулю, превращается в динамическое условие на границе раздела (3). Выражение для объемной силы имеет вид [14]: $\mathbf{F} = -\sigma k \delta(\varphi) \nabla \varphi$, где $\delta(\varphi)$ — дельта-функция.

Уравнения (1), (2) можно записать в виде

$$\varrho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \varrho (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla \tau + \varrho \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (6)$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0. \quad (7)$$

Здесь $\varrho = \varrho_2 + (\varrho_1 - \varrho_2)H(\varphi)$, $\mu = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)H(\varphi)$, $H(\varphi)$ — функция Хевисайда: $H(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi < 0, \\ 1, & \varphi \geq 0. \end{cases}$

Определим безразмерные переменные следующим образом $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}$, $\tilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{U}$, $\tilde{t} = \frac{tU}{L}$, $\tilde{p} = \frac{p}{\varrho_1 U^2}$, $\tilde{g} = \frac{g}{g_1}$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_1}$, $\tilde{e} = \frac{g}{g}$, где L и U — характерные длина и скорость.

Уравнения (6), (7) в безразмерном виде примут вид

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{U}} \nabla) \tilde{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\tilde{\varrho}} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \tilde{\tau} + \frac{1}{\text{Fr}} \mathbf{e} + \frac{1}{\text{We}} \frac{\tilde{\mathbf{F}}}{\tilde{\varrho}}, \quad (8)$$

$$\nabla \tilde{\mathbf{U}} = 0,$$

где \mathbf{e} — единичный вектор в направлении вектора \mathbf{g} , $\tilde{\tau}$ — безразмерный тензор вязких напряжений, $\tilde{\mathbf{F}}$ — безразмерная объемная сила, Re — число Рейнольдса, Fr — число Фруда, We — число Вебера и $\tilde{\varrho} = \lambda + (1 - \lambda)H(\varphi)$, $\tilde{\mu} = \eta + (1 - \eta)H(\varphi)$, где $\lambda = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, $\eta = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

3. Численный метод.

3.1. Решение уравнений Навье–Стокса. Пусть в момент времени \tilde{t}^n известны поле скоростей $\tilde{\mathbf{U}}^n$ и поле давления \tilde{p}^n . Тогда для расчета неизвестных функций в момент времени \tilde{t}^{n+1} используется схема расщепления [9], состоящая из трех шагов.

Запишем уравнение (8) в виде

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{\tilde{\varrho}} \nabla \tilde{p} + \mathbf{f}, \quad (9)$$

где $\mathbf{f} = -(\tilde{\mathbf{U}} \nabla) \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \tilde{\tau} + \frac{1}{\text{Fr}} \mathbf{e} + \frac{1}{\text{We}} \frac{\tilde{\mathbf{F}}}{\tilde{\varrho}}$.

На первом шаге решения уравнения (9) предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии: $\frac{\tilde{\mathbf{U}}^* - \tilde{\mathbf{U}}^n}{\Delta \tilde{t}_{n+1}} = \mathbf{f}$, где $\Delta \tilde{t}_{n+1} = \tilde{t}^{n+1} - \tilde{t}^n$, $\tilde{\mathbf{U}}^*$ — промежуточное поле скорости, которое не удовлетворяет уравнению неразрывности.

На втором шаге по найденному промежуточному полю скорости $\tilde{\mathbf{U}}^*$ с учетом соленоидальности вектора скорости $\tilde{\mathbf{U}}^{n+1}$ рассчитывается поле давления

$$\nabla \left(\frac{\nabla \tilde{p}^{n+1}}{\tilde{\varrho}(\varphi^n)} \right) = \frac{1}{\Delta \tilde{t}_{n+1}} \nabla \tilde{\mathbf{U}}^*. \quad (10)$$

Для решения уравнения Пуассона (10) на каждом шаге по времени обычно используются либо итерационные, либо прямые методы. В работе используется метод сопряженных градиентов [15].

На третьем шаге предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет градиента давления (конвекция и диффузия отсутствуют)

$$\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}^* - \Delta t \left(\frac{\nabla \tilde{p}^{n+1}}{\tilde{\varrho}(\varphi^n)} \right). \quad (11)$$

Уравнение Пуассона (10) получается при применении оператора дивергенции к обеим частям равенства (11) и с учетом уравнения неразрывности.

3.2. Процедура реинициализации. Проведем дополнительное сглаживание (размазывание) границы раздела сред (в результате граница приобретает конечную толщину) с помощью модельной функции Хевисайда [5]

$$H_\epsilon(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi < -\epsilon, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varphi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin(\pi\varphi/\epsilon) \right), & |\varphi| \leq \epsilon, \\ 1, & \varphi > \epsilon, \end{cases} \quad (12)$$

где ϵ — малая положительная величина.

Из уравнения (12) можно получить толщину слоя $d = \frac{2\epsilon}{|\nabla\varphi|}$. Если $d = \text{const}$, то функция уровня должна удовлетворять соотношению

$$|\nabla\varphi| = 1, \quad |\varphi| \leq \epsilon. \quad (13)$$

При численном решении уравнения переноса (5) за счет ошибок аппроксимации с течением времени условие (13) нарушится, что приводит к размазыванию границы и уменьшению точности вычислений.

Для обеспечения выполнения соотношения (13) необходима дополнительная численная процедура (процедура реинициализации [5]).

Введем функцию $\psi(\mathbf{x})$, удовлетворяющую условию: $|\psi(\mathbf{x})| = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ 1, & \mathbf{x} \notin \Gamma. \end{cases}$

Функция $\psi(\mathbf{x})$ определяет расстояние по нормали от границы раздела сред до произвольной точки пространства и совпадает по знаку с функцией уровня.

Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} - S(\varphi)(1 - |\nabla\varphi|) = 0 \quad (14)$$

с начальным условием $\psi(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}, \tilde{t}^n)$, где τ — аналог времени, $S(\varphi)$ — функция знака, определяемая как

$$S(\varphi) = \begin{cases} -1, & \varphi < 0, \\ 0, & \varphi = 0, \\ 1, & \varphi > 0. \end{cases} \quad (15)$$

Стационарное решение уравнения (14) имеет вид

$$|\psi| = 1. \quad (16)$$

Так как $S(0) = 0$, то обе функции $\psi(\mathbf{x}, \tau \rightarrow \infty)$ и $\varphi(\mathbf{x}, \tilde{t}^n)$ имеют один и тот же нулевой уровень, а решение (16) справедливо и при условии $|\psi| \leq \epsilon$. Функция $\psi(\mathbf{x}, \tau \rightarrow \infty)$, являющаяся решением уравнения (14), удовлетворяет условию (13), т.е. толщина границы остается постоянной в любой момент времени.

Таким образом, процедура реинициализации состоит в получении стационарного решения уравнения (14) для функции $\psi(\mathbf{x}, \tau)$ с начальным условием $\psi(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}, \tilde{t}^n)$ на каждом шаге по времени и корректировке значений функции уровня по формуле $\varphi(\mathbf{x}, \tilde{t}^n) = \psi(\mathbf{x}, \tau \rightarrow \infty)$.

Уравнение (14) можно записать в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + (\mathbf{W}\nabla)\psi = 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{W} = S(\varphi) \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$.

Уравнение (17) представляет собой нелинейное гиперболическое уравнение с характеристической скоростью, направленной по нормали от поверхности, и функция $\psi(\mathbf{x}, \tau)$, удовлетворяющая условию (16)

при малых значениях τ , соответствует точкам пространства вблизи границы раздела сред. Отсюда следует, что нет необходимости получать стационарное решение уравнения (14) во всей области и достаточно сделать не более чем $\frac{2\epsilon}{\Delta\tau}$ итераций, где $\Delta\tau$ — шаг по переменной τ . Вместо разрывной функции (15) при численных расчетах аналогично функции Хевисайда (12) вводится сглаженная (размазанная по толщине слоя) функция знака $S_\epsilon(\varphi) = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \epsilon^2}}$.

3.3. Дополнительная коррекция. Хотя процедура реинициализации обеспечивает постоянство толщины слоя, при численном решении уравнения (14) ошибки аппроксимации приводят к дополнительным источникам массы (обычно отрицательным), что является причиной исчезновения малых объектов, имеющих размеры в несколько расчетных ячеек. Модификации процедуры реинициализации функции уровня [5, 7] позволяют улучшить результаты расчетов.

В работе используется следующая модификация. Пусть функция φ вблизи границы не изменяется, если $|\varphi| \leq b$, $b > 0$ и b имеет величину, пропорциональную размеру расчетной ячейки. Тогда модифицированное уравнение (14) в дискретном виде можно записать как

$$\frac{\psi^{k+1} - \psi^k}{\Delta\tau} - S(\varphi^0)(1 - |\nabla\psi|^k)(1 - q(\varphi^0)) = \frac{\varphi^0 - \psi^k}{\Delta\tau} q(\varphi^0), \quad (18)$$

где индекс k относится к моменту времени τ , $k+1$ — к времени $\tau + \Delta\tau$, $q(\varphi) = \begin{cases} 1, & |\varphi| \leq b, \\ 0, & |\varphi| > b. \end{cases}$

Определенная таким образом функция q претерпевает разрыв. В качестве сглаженной функции q по толщине слоя выберем следующую функцию $q(\varphi) = \exp\left(-\left(\frac{\varphi}{2\Delta x}\right)^2\right)$.

Пусть ϵ_{ps} — малая величина. Уравнение (18) решается численно до достижения условия

$$\left| \frac{\psi^{k+1} - \psi^k}{\Delta\tau} \right| < \epsilon_{ps}. \quad (19)$$

Соотношение (19) с учетом уравнения (18) и определения функции q можно записать в виде $|S(\varphi^0)(1 - |\nabla\psi|)| < \epsilon_{ps}$, $|q| > b$,

$$\left| \frac{\varphi^0 - \psi}{\Delta\tau} \right| < \epsilon_{ps}, \quad |q| \leq b, \quad (20)$$

где ψ — стационарное решение уравнения (18). Выполнение условия (20) обеспечивает постоянство функции уровня для малых объектов величиной порядка b .

3.4. Конечно-разностная аппроксимация.

При численном решении задачи используются шахматная (сдвинутая) сетка (рис. 2).

Рассмотрим конвективные члены уравнений (5), (8) и (17). В общем случае конвективный перенос по оси x_1 для произвольной переменной $\xi = \{u, v, \varphi, \psi\}$ можно записать в виде $F^\xi = F_{i,j} \frac{\xi_{i+1/2,j} - \xi_{i-1/2,j}}{\Delta x}$,

где $F_{i,j}(u)$ — функция, зависящая от компоненты скорости u и аппроксимированная на сетке для переменной ξ . В качестве базовой схемы используем схему против потока первого порядка точности. Применяя интерполяционную формулу Ньютона [16], можно получить конечные разности различных порядков точности и определить поправки к базовой схеме (ENO-схемы) [7]. Аналогично определяются конвективные потоки в направлении оси x_2 .

При аппроксимации вязких членов (второй член в правой части уравнения (8)) и уравнения для кривизны поверхности (4) используется центрально-разностная схема второго порядка точности.

Для дискретизации производных по времени применяется схема Рунге–Кутты третьего порядка точности [7].

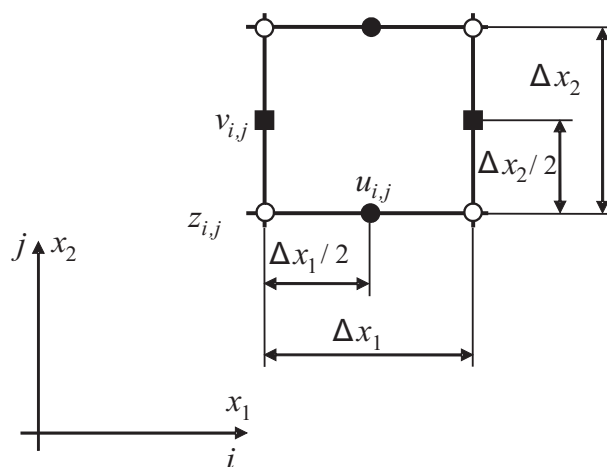


Рис. 2. Сетки интегрирования: основная сетка — для переменной z (давление \tilde{p} , плотность $\tilde{\rho}$, вязкость $\tilde{\mu}$, функция уровня φ и вспомогательная функция ψ); сетка для переменной u (сдвинутая на $0.5\Delta x_1$ по оси x_1 относительно основной сетки); сетка для переменной v (сдвинутая на $0.5\Delta x_2$ по оси x_2 относительно основной сетки); $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ — компоненты вектора скорости

4. Результаты. Все расчеты проводились с использованием прямоугольной равномерной сетки с шахматным расположением узлов в цилиндрической системе координат с симметрией по углу. Расчетная область представляла собой цилиндр радиусом kR и высотой mR , где R — радиус капли, k, m — целые числа, определяющие область вычислений, координаты x_1 и x_2 соответствовали координатам r и z в цилиндрической системе координат (рис. 3).

Для оценки точности численной модели рассматривалась тестовая задача определения разности давлений в капле и вне ее при отсутствии внешних сил для невозмущенной сферической капли [2]. Капля находится в центре расчетной области, $k = 2R, m = 4R, \sigma = 0,073$ н/м, $R = 0,002$ м. В начальный момент времени задаются нулевые поля скоростей и давления, шаг интегрирования по времени — 0,001.

Считается, что расчетная ячейка лежит внутри капли, если выполняется условие $H_\epsilon(\varphi) \geq 0,5$. Численное значение давления дается формулой

$$p = \frac{1}{N_{in}} \sum_{n=1}^{N_{in}} p_n - \frac{1}{N_{out}} \sum_{n=1}^{N_{out}} p_n,$$

где N_{in} — количество расчетных ячеек, лежащих внутри капли, N_{out} — количество расчетных ячеек, лежащих вне капли.

Исследовалась зависимость чувствительности результатов численного решения от количества расчетных ячеек на радиусе капли $N = \frac{R}{\Delta x}$, где Δx — шаг разбиения по пространственной координате.

Результаты расчетов максимального значения модуля скорости U_{max} и нормы ошибки определения давления $L_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{N_\epsilon} \omega_n^2 \frac{(p - p_0)^2}{p_0^2}}$, где ω_n — объем ячейки n , $p = \frac{2\sigma}{R}$, через 50 шагов по времени представлены на рис. 4.

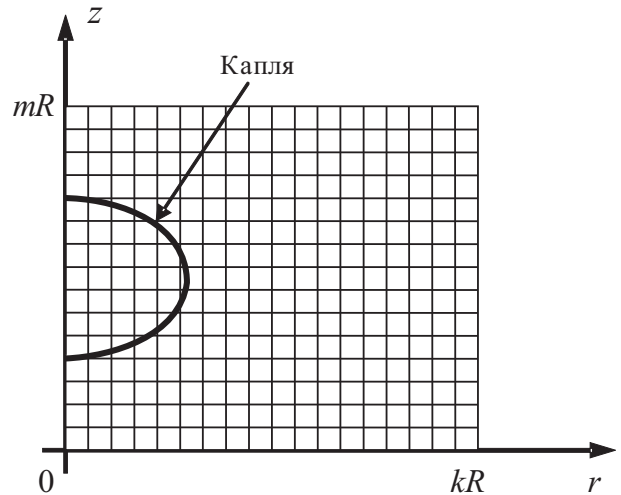


Рис. 3. Расчетная область

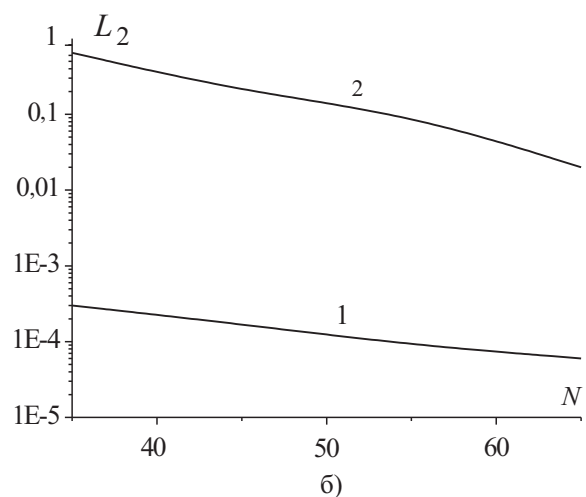
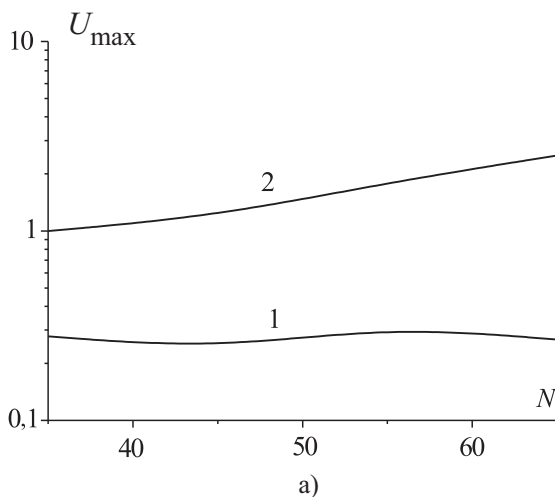


Рис. 4. Зависимости модуля скорости U_{max} (а) и нормы ошибок L_2 (б) от количества расчетных ячеек: 1 — разработанная модель, 2 — результаты расчетов по модели [2]

Поскольку капля находится в равновесии, расчетное поле скоростей должно стремиться к нулю при увеличении количества итераций. Разработанная модель дает существенно меньший уровень максимальной величины модуля скорости (рис. 4а) уже через 50 итераций, что показывает лучшую сходимость, чем модель [2], и этот уровень не увеличивается при увеличении количества ячеек на радиусе частицы. Существенно лучшие результаты модель показывает при определении поля давления. Норма ошибки на два порядка меньше, чем полученная в работе [2] (рис. 4б).

Зависимость относительной ошибки определения давления представлена на рис. 5. При $N > 60$ относительная ошибка составляет около 0,3%, что существенно ниже, чем в работе [2] (2%). В дальнейших расчетах выбиралось 65 расчетных ячеек на радиус капли.

Для проверки адекватности разработанной численной модели рассматривался процесс колебаний капли, возникающих в результате ее падения на горизонтальную поверхность. Проводилось сравнение с результатами работы [17]. В условиях расчетов [17] предполагалось, что в начальный момент времени капля имеет сферическую форму, касается поверхности в одной точке и все точки капли имеют скорость центра масс V_c . Безразмерные критерии $Re = 3200$, $We = 30$, $\lambda = 0,001$, $\eta = 0,05$ соответствуют следующим значениям теплофизических свойств жидкости: плотность — 996 кг/м^3 , коэффициент динамической вязкости — $0,000867 \text{ кг/мс}$, коэффициент поверхностного натяжения — $0,073 \text{ Н/м}$. Скорость движения центра масс $V_c = 0,77 \text{ м/с}$. Радиус капли — $1,8 \text{ мм}$. Размеры расчетной области соответствовали $k = 4R$, $m = 4R$.

Форма капли в различные моменты времени представлена на рис. 6.

При растекании капли (0–5,7 мс) наблюдается удовлетворительное соответствие обеих моделей по фазам колебаний (рис. 6). Отличие формы капли в стадии обратного движения (14,8 мс) связано с различной постановкой граничных условий в точке контакта (точка соприкосновения трех фаз — жидкость, газ и твердая поверхность). Координаты точки контакта вычисляются соответствующей экстраполяцией свободной поверхности с использованием значения краевого угла (угла смачивания). Скорость движения точки контакта зависит от принятой экстраполяции (линейная, кубическая) и количества точек разбиения, что в конечном итоге приводит к различию в распределении скоростей и давления и, как следствие, в расчетных формах капли.

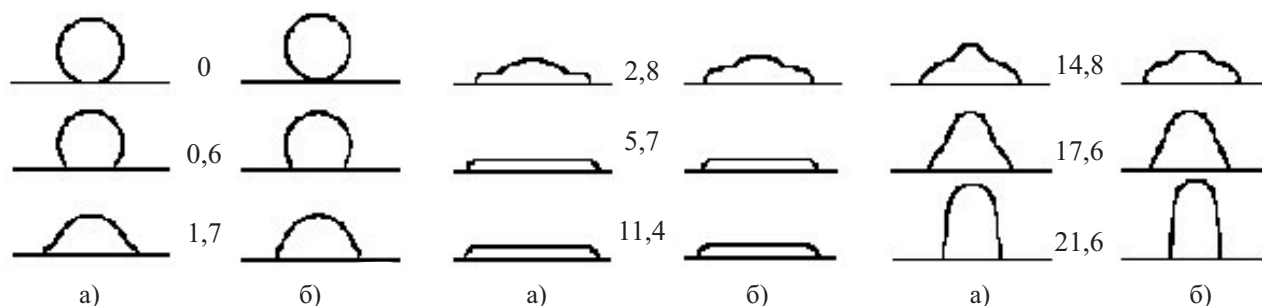


Рис. 6. Форма капли в различные моменты времени (мс) в процессе колебаний капли на горизонтальной поверхности: а) расчет по разработанной модели, б) расчетные данные [17]

Разработанная численная модель позволяет описывать процесс падения капли из капилляра на горизонтальную поверхность с учетом всех фаз движения: отрыв капли от капилляра, фаза свободного падения, фаза соударения с поверхностью и затухающих колебаний капли на горизонтальной поверхности.

Результаты моделирования и кадры скоростной видеосъемки [18] всех стадий движения капли дистиллированной воды, падающей из капилляра на плоскую фторопластовую поверхность, представлены на рис. 7–9.

В условиях эксперимента [18] расстояние от конца капилляра до плоской поверхности составляло 14 мм , радиус капилляра — $1,6 \text{ мм}$, видеосъемка проводилась со скоростью 1137 кадров в секунду.

При проведении численных расчетов радиус сферы эквивалентного объема капли принимался равным $1,86 \text{ мм}$, плотность воды — 1000 кг/м^3 , коэффициент динамической вязкости воды — $1,137 \times 10^{-3} \text{ кг/мс}$, коэффициент поверхностного натяжения — $0,073 \text{ Н/м}$, величина краевого угла (угла смачивания) — $87,9$ град. Предполагалось, что скорость выхода капли из капилляра постоянна. Безразмерные критерии,

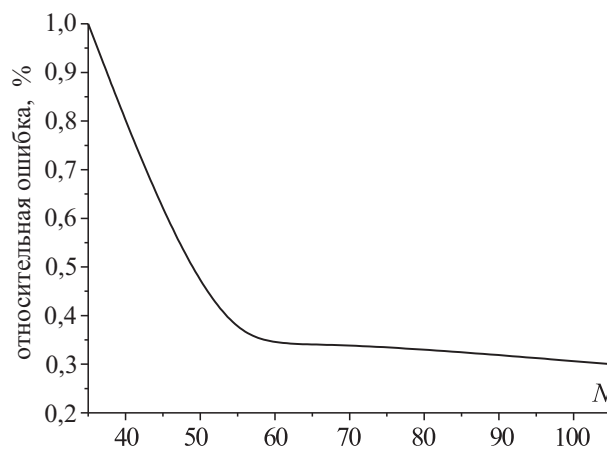


Рис. 5. Зависимость относительной ошибки определения давления от количества расчетных ячеек

характеризующие течение: $Re = 1300$, $We = 8$, $Fr = 4,3$, $\lambda = 1,23 \times 10^{-3}$, $\eta = 1,57 \times 10^{-2}$. Размеры расчетной области соответствовали $k = 4R$ и $m = 9R$.

Эволюция формы капли в фазе отрыва от капилляра представлена на рис. 7.

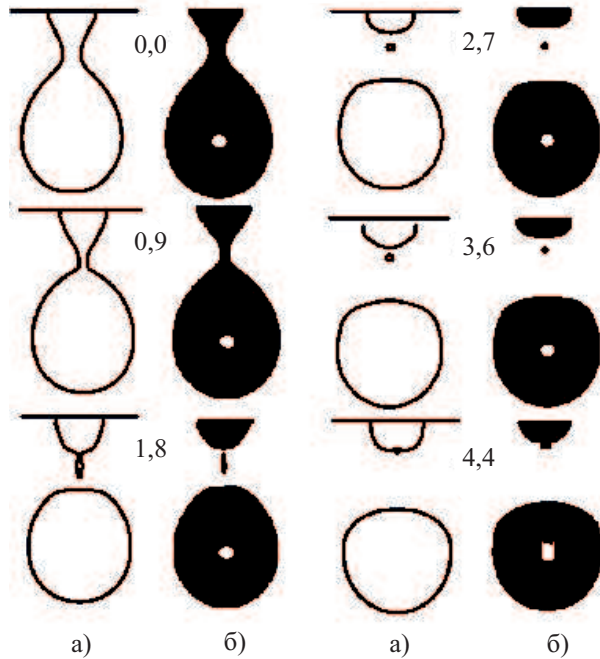


Рис. 7. Расчетная (а) и экспериментальная (б) форма капли при отрыве от капилляра в различные моменты времени (мс)

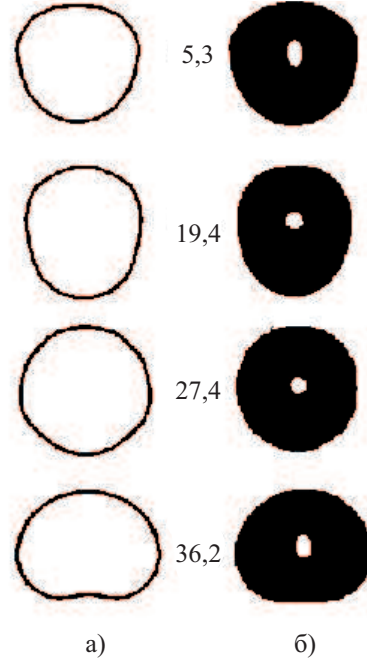


Рис. 8. Расчетная (а) и экспериментальная (б) форма капли в фазе полета (время в мс)

На начальных стадиях (0–0,9 мс) образуется сужение, которое рвется (1,8 мс) и возникает маленькая капля (шарик Плато [19]). Далее шарик Плато движется вверх (3,6 мс) и достигает капилляра (4,4 мс). Расчетная форма капли удовлетворительно совпадает с кадрами видеосъемки.

На начальной стадии существует только один объект — капля (0–0,9 мс). В дальнейшем происходит дробление капли на три объекта (1,8–3,6 мс): большая капля, шарик Плато и капля в капилляре, поведение которых моделируется в рамках разработанной модели с функцией уровня, имеющей три области Ω_1 (рис. 1). После слияния шарика Плато и капли в капилляре остаются два объекта: большая капля и капля в капилляре. Диаметр шарика Плато составляет 4–5 расчетных ячеек (5–7% от радиуса большой капли), и без дополнительной корректирующей процедуры, использованной в данной работе, шарик Плато в процессе расчетов исчезает.

Результаты моделирования стадии отрыва показывают возможности разработанной модели по описанию процессов дробления и слияния капель.

Эволюция формы капли в фазе полета представлена на рис. 8.

Капля периодически меняет свою форму: вытянутая форма (19,4 мс), практически шарообразная форма (22,7 мс), сплюснутая форма (36,2 мс).

Динамика капли после соударения с плоской поверхностью представлена на рис. 9.

В начальной стадии (соударение и растекание, времена до 47–48 мс) наблюдается хорошее соответствие фаз движения капли, полученных экспериментально и расчетным путем. Поведение капли в начальные моменты времени после соударения определяется инерционными членами и практически не зависит от граничных условий на твердой горизонтальной поверхности. С течением времени скорость падает за счет сил трения и поверхностного натяжения. Скорость движения контактной точки и максимальная величина соприкосновения капли с поверхностью определяются значением краевого угла и способом задания граничных условий в точке контакта с поверхностью, что определяет поля скоростей и давления в фазе обратного движения. Этим объясняется некоторое различие формы капли (расчет и эксперимент) в моменты времени 50,3 и 57,3 мс. В дальнейшем скорость движения контактной точки замедляется, краевой угол стремится к стационарному значению и практически не оказывает влияния на последующую картину течения (растекание, обратное течение и т.д.).

В целом, результаты моделирования хорошо согласуются с полученными в эксперименте как по фазам

и амплитудам колебаний, так и по форме капли.

5. Выводы. Разработанная численная модель динамики вязкой жидкости с использованием функции уровня адекватно описывает как процессы нелинейных колебаний одиночной капли жидкости в газовой среде (колебания в капилляре, колебания в процессе свободного падения, колебания на горизонтальной поверхности), так и процессы дробления (слияния) капель. Используемые при дискретизации основных уравнений схемы повышенного порядка точности позволили получить решения для сред с характерным отношением плотностей менее 10^{-3} и $Re > 1000$. Модификация метода решения уравнения для функции уровня одновременно разрешает и крупные, и малые объекты-капли с характерным соотношением радиусов порядка 40. Экспериментальные и расчетные результаты исследования фазы отрыва капли от капилляра с образованием шарика Плато показывают удовлетворительное согласие по фазам колебаний и форме капель. Результаты расчетов процесса падения капли во всех фазах показали возможность как качественного, так и количественного описания этого процесса с одновременным учетом появления и исчезновения нескольких объектов-капель и динамики их взаимодействия. Разработанный алгоритм и численная модель могут быть использованы при решении задач динамики и взаимодействия капель с различными отношениями плотностей — от $\lambda = 10^{-3}$ (жидкость-газ) до $\lambda = 1$ (жидкость-жидкость).

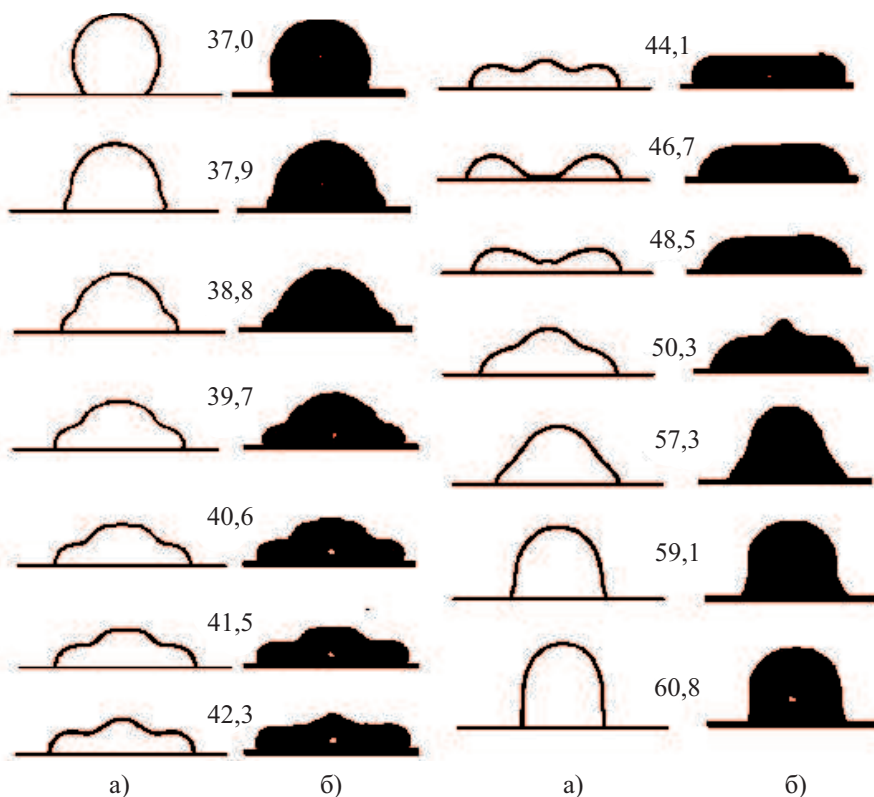


Рис. 9. Расчетная (а) и экспериментальная (б) форма капли в процессе колебаний на горизонтальной поверхности (время в мс)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Udaykumar H.S., Kan H.C., Shyy W., Tran-Son-Tay R.* Multiphase dynamics in arbitrary geometries on fixed Cartesian grids // *Journal of Computational Physics*. 1997. **137**. 366–405.
2. *Francois M., Shyy W.* Computation of drop dynamics with the immersed boundary method. Part 1: numerical algorithm and buoyancy-induced effect // *Numerical Heat Transfer. Part B*. 2003. **44**. 101–118.
3. *Hirt C.W., Nichols B.D.* Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *Journal of Computational Physics*. 1981. **39**. 201–225.
4. *Rudman M.* Volume tracking method for interfacial flow calculations // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1998. **24**. 671–691.
5. *Sussman M., Almgren A.S., Bell J.B., Colella P., Howell L., Welcome M.* An adaptive level set approach for incompressible two-phase flow // *Journal of Computational Physics*. 1999. **148**. 81–124.
6. *Sethian J.A.* Level Set methods and fast marching methods. Cambridge University Press. Cambridge, 2002.
7. *Osher S.J., Fedkiw R.P.* Level set methods and dynamic implicit surfaces. Springer. NY, 2003.
8. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
9. *Кобенья В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
10. *Patankar S.V.* Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation. NY, 1980.
11. *Ghorin A.J.* Numerical solution of Navier–Stokes equations // *Mathematics of Computations*. 1968. **22**. 745–762.
12. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994.
13. *Майков И.Л., Директор Л.Б.* Численное решение задачи о затухающих нелинейных колебаниях капли вязкой

- жидкости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2008. **133** (6). 1–8.
14. *Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.A.* A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. 1992. **100**. 335–354.
 15. *Van der Vorst H.* Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge University Press. Cambridge, 2003.
 16. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматлит, 1962.
 17. *Francois M., Shyy M.* Computation of drop dynamics with the immerse boundary method. Part 2: drop impact and heat transfer // Numerical Heat Transfer. Part B. 2003. **44**. 119–143.
 18. *Директор Л.Б., Майков И.Л., Середа А.А.* Теплофизические свойства веществ (жидкие металлы, сплавы и наносистемы) // Труды II Международного семинара. Нальчик: КБГУ, 2006. 67.
 19. *Сивухин Д.В.* Термодинамика и молекулярная физика. М: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
17.02.2009
