УДК 517.958

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ФИНАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

Н. Л. Гольдман[1]

Исследуются вопросы постановок в пространствах Гельдера обратных задач с краевыми условиями третьего рода для линейных и квазилинейных параболических операторов общего вида с неизвестными коэффициентами при младших членах. Получены достаточные условия единственности решения на основе принципа двойственности. Такой подход позволяет учитывать зависимость заданных коэффициентов параболических уравнений не только от переменной x, но и от (x,t) в линейном случае и от (x,t,u) в квазилинейном случае.

Ключевые слова: пространства Гельдера, обратные задачи, параболические уравнения, краевые задачи, принцип двойственности.

Введение. В работе исследуются обратные задачи с финальным наблюдением для линейных и квазилинейных параболических уравнений общего вида с неизвестными коэффициентами при младших членах. Этот класс задач включает проблемы идентификации и управления процессами теплообмена, в которых участвуют тепловые источники, зависящие от температуры. Аналогичные проблемы возникают и в механике сплошной среды, например в процессах диффузии неустойчивого газа, скорость распада которого пропорциональна концентрации.

Характерной чертой таких обратных задач является возможное отсутствие решения и его неустойчивость относительно погрешностей входных данных. Основная цель работы — выбрать естественные функциональные пространства для постановок этого класса некорректных задач и изучить условия, при которых они обладают свойством единственности решения (в случае его существования). Особенностью данного исследования коэффициентных обратных задач с финальным наблюдением является предложенный подход к использованию принципа двойственности. На основе этого подхода установлена связь проблемы единственности решения этих обратных задач в классах Гельдера со свойствами решений соответствующих сопряженных задач. Доказано, что эти свойства близки свойствам плотности наблюдений и их усреднений в задачах управления для линейных параболических уравнений с управляющими воздействиями в начальном условии. В таких задачах управления эти свойства плотности являются, как известно [1, 2], следствием так называемого свойства обратной единственности, т.е. параболических операторов с обратным направлением времени [3].

Проведенное исследование проблемы единственности для этого класса обратных задач позволяет учитывать зависимость всех заданных коэффициентов параболического уравнения не только от переменной x, но и от (x,t) в линейном случае и от (x,t,u) в квазилинейном случае (ср., например, с [4–8]).

1. Постановка обратной задачи для квазилинейного параболического уравнения. Требуется найти функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ и $p(x)$ при $0\leqslant x\leqslant l$, удовлетворяющие краевой задаче

$$c(x,t,u)u_t - Lu = f(x,t,u), \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$a(x,t,u)u_x - e_0(t,u)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0<t\leqslant T, \tag{2}$$

$$a(x,t,u)u_x + e_1(t,u)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0<t\leqslant T, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4}$$

и дополнительному условию в конечный момент времени

$$u|_{t=T} = g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{5}$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: goldman@srcc.msu.ru

в предположении, что

$$Lu \equiv \big(a(x,t,u)u_x\big)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)p(x) \tag{6}$$

является равномерно эллиптическим оператором, $a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, d, f, e_i, q_i $(i=0,1)$, φ и g — известные функции, $a_{\min}$, $c_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

Сформулируем требования к входным данным обратной задачи (1)–(5), используя стандартные обозначения классов функций из [9].

(i) При $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, функции a, a_x, a_u, b, c, d, f равномерно ограничены, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $e_i \geqslant 0$ $(i=0,1)$.

(ii) При $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$, $M_0 \geqslant \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|$ функция a имеет непрерывную производную a_t и, кроме того, a_x, a_u, b, c, c_x, c_u, d и f принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$, $0 < \lambda < 1$, функции e_i имеют равномерно ограниченные производные e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} $(i=0,1)$.

(iii) Функции $\varphi(x)$ и $q_i(t)$ $(i=0,1)$ принадлежат, соответственно, $H^{2+\lambda}[0,l]$ и $O^1[0,T]$ и удовлетворяют условиям согласования при $t=0$:

$$a(x,0,\varphi)\varphi_x - e_0(0,\varphi)\varphi|_{x=0} = q_0(0), \quad a(x,0,\varphi)\varphi_x + e_1(0,\varphi)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

(iv) Функция $g(x)$ принадлежит $H^{2+\lambda}[0,l]$ и удовлетворяет условиям согласования при $t=T$:

$$a(x,T,g)g_x - e_0(T,g)g|_{x=0} = q_0(T), \quad a(x,T,g)g_x + e_1(T,g)g|_{x=l} = q_1(T).$$

Требования (i)–(iii) обеспечивают существование и единственность решения квазилинейной краевой задачи третьего рода (1)–(4) в классе Гельдера $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любом коэффициенте $p(x) \in C^1[0,l]$ оператора L вида (6) [9]. В соответствии с этим дадим следующее

Определение 1. Решением в классах Гельдера коэффициентной обратной задачи (1)–(5) назовем пару функций $\{u^0(x,t), p^0(x)\}$: $u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$, $p^0(x) \in C^1[0,l]$, $0<\lambda<1$, удовлетворяющих соотношениям (1)–(5) в обычном смысле.

2.Неустойчивость решения. Обратные задачи такого типа являются некорректно поставленными — решение $\{u^0(x,t), p^0(x)\}$ может отсутствовать. В случае существования оно неустойчиво к погрешностям входных данных. Это показывает следующий

Пример 1. Функции $u^0(x,t) = x(x+t+1)+1$, $p^0(x) = x+1$ являются решением коэффициентной обратной задачи в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$u_t - u_{xx} + p(x)u = x(x+1)(x+t+1) + 2x - 1, \quad (x,t) \in Q,$$
$$u_x|_{x=0} = t+1, \quad u_x|_{x=1} = t+3, \quad 0 < t \leqslant T, \quad u|_{t=0} = x(x+1)+1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

с финальным наблюдением $u|_{t=T} = g(x)$, $g(x) = x(x+T+1)+1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть вместо функции $g(x)$ задано ее приближение $g_n(x) = g(x) + \delta_n(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, с погрешностью $\delta_n(x) = n^{-1}Tx^2(x-1)^2$, где $n > 0$ — любое целое, при $n \to \infty$ $\delta_n(x) \to 0$ в равномерной метрике. Решением обратной задачи с финальным наблюдением $g_n(x)$ является пара функций: $u_n = u^0 + \Delta_n u$, $p_n = p^0 + \Delta_n p$, погрешности которых имеют вид $\Delta_n u = n^{-1}tx^2(x-1)^2 \exp n^2(T-t)$, $\Delta_n p = K_n(x,t)G_n^{-1}(x,t)$, где

$$K_n(x,t) = (n^2t-1)x^2(x-1)^2 + 2t(2x-1)^2 + 4xt(x-1) - tx^2(x-1)^2(x+1),$$
$$G_n(x,t) = (x^2+xt+x+1)n\exp n^2(t-T) + tx^2(x-1)^2.$$

Таким образом, хотя при $n \to \infty$ погрешность в финальном наблюдении $\delta_n(x) \to 0$, тем не менее погрешности решения $\Delta_n u \to \infty$, $\Delta_n p \to \infty$ в равномерной метрике.

3. Проблема единственности решения для обратной задачи (1)–(5).

3.1. В случае существования решения $\{u^0(x,t), p^0(x)\}$ оно может обладать свойством единственности. Предлагаемый подход к доказательству достаточных условий, при которых $\{u^0(x,t), p^0(x)\}$ определяется однозначно, состоит в следующем.

Допустим, что $\{u_1^0, p_1^0\}$ и $\{u_2^0, p_2^0\}$ — два решения обратной задачи (1)–(5). Функции u_1^0 и u_2^0 можно рассматривать как решения краевой задачи (1)–(4), соответствующие коэффициентам p_1^0 и p_2^0 в операторе L (см. (6)), т.е. для них справедливы оценки в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [9]. Для разностей

$\Delta u = u_2^0 - u_1^0$ и $\Delta p = p_2^0 - p_1^0$ в силу (1)–(6) следуют соотношения

$$c(x,t,u_1^0)\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u + d(x,t,u_1^0)\Delta p(x) = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x - \mathcal{E}_0\Delta u|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{8}$$

$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x + \mathcal{E}_1\Delta u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{9}$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad \Delta u|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{10}$$

в которых

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Delta u \quad &\equiv \big(a(x,t,u_1^0)\Delta u_x\big)_x - \mathcal{A}(x,t)\Delta u_x - \mathcal{B}(x,t)\Delta u,\\
\mathcal{A}(x,t) &= b(x,t,u_1^0) - a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0,\\
\mathcal{B}(x,t) &= c_u(x,t,u_1^0)u_{2t}^0 + b_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0 + d_u(x,t,u_1^0)p_2^0(x) - f_u(x,t,u_1^0) -\\
&\quad -\big\{a_u u_{2xx}^0 + a_{uu}(u_{2x}^0)^2 + a_{xu}u_{2x}^0\big\},\\
\mathcal{E}_0(t) \quad &= \big\{-a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0 + e_0(t,u_1^0) + e_{0u}(t,u_1^0)u_2^0\big\}\big|_{x=0},\\
\mathcal{E}_1(t) \quad &= \big\{a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0 + e_1(t,u_1^0) + e_{1u}(t,u_1^0)u_2^0\big\}\big|_{x=l}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для доказательства утверждения, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta p = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, изучается краевая задача, сопряженная с (7)–(10):

$$\big(c(x,t,u_1^0)\psi\big)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{12}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A})\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{13}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{A})\psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{14}$$

$$\psi|_{t=T} = \eta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{15}$$

в которой $\eta(x)$ — произвольная функция из $C^2[0,l]$, $\mathcal{L}^*\psi \equiv \big(a(x,t,u_1^0)\psi_x\big)_x + (\mathcal{A}\psi)_x - \mathcal{B}\psi$.

3.2. Имеет место

Лемма 1. *Пусть выполнены требования* (i)–(iv) *и, кроме того, производная c_t непрерывна при $(x,t,u) \in \overline{D}$, производные e_{iu} непрерывны по t при $t \in [0,T]$, $|u| \leqslant M_0$. Тогда при любой $\eta(x) \in C^2[0,l]$ соответствующее решение $\psi(x,t;\eta)$ сопряженной задачи* (12)–(15) *принадлежит $C(\overline{Q}) \bigcap C^{2,1}(Q)$ и удовлетворяет соотношению*

$$\int_0^T\int_0^l \psi(x,t;\eta)d(x,t,u_1^0)\Delta p(x)\,dx\,dt = 0 \quad \forall \eta \in C^2[0,l]. \tag{16}$$

Доказательство. Требования к входным данным и принадлежность функций $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ классу $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$, $p_1^0(x)$ и $p_2^0(x)$ классу $C^1[0,l]$ позволяют заключить, что все коэффициенты в уравнении и в граничных условиях сопряженной задачи (12)–(15) непрерывны как функции (x,t) и t соответственно. Следовательно, задача (12)–(15), являясь линейной краевой задачей относительно функции ψ, разрешима в классе $C(\overline{Q}) \bigcap C^{2,1}(Q)$, причем приграничные производные $\psi_x|_{x=0}$, $\psi_x|_{x=l}$ непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant T$ [3, 9].

При выводе соотношения (16) рассматривается выражение

$$I = \int_0^T\int_0^l \psi\{c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u\}\,dx\,dt + \int_0^T\int_0^l \Delta u\big\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\big\}\,dx\,dt,$$

для которого в силу (7) и (12) справедливо утверждение

$$I = \int_0^T\int_0^l \psi(x,t;\eta)d(x,t,u_1^0)\Delta p(x)\,dx\,dt. \tag{17}$$

С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (7)–(10) и (12)–(15) дает

$$I = \int_0^T \Delta u|_{x=l}\big\{a\psi_x + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{A})\psi\big\}\big|_{x=l}\,dt - \int_0^T \Delta u|_{x=0}\big\{a\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A})\psi\big\}\big|_{x=0}\,dt = 0.$$

Отсюда и из (17) следует утверждение (16). Лемма 1 доказана.

Дальнейшее исследование единственности решения $\{u^0(x,t), p^0(x)\}$ обратной задачи (1)–(5) состоит в изучении требований к ее входным данным, которые позволили бы заключить из (16), что $\Delta p(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$.

3.3. Установим прежде всего, при каких условиях из выполнения при $\tau \in [0,T]$ соотношения

$$\int\limits_0^l \psi(x,t;\eta)\big|_{t=\tau}\, w(x)\,dx = 0 \quad \forall \eta \in C^2[0,l] \tag{18}$$

для некоторой непрерывной функции $w(x)$ следует, что $w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Иными словами, при каких условиях множество значений при $t = \tau$ решений $\{\psi(x,t;\eta)\big|_{t=\tau}\}$ сопряженной задачи (12)–(15), получаемое при пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $C^2[0,l]$, является всюду плотным.

Справедливость этого утверждения при $\tau = T$ следует из (15) в силу произвольности $\eta(x) \in C^2[0,l]$ и плотности этого пространства в $L_2[0,l]$. В любой достаточно малой окрестности временного слоя $t = T$ свойством плотности обладает также множество $\{\psi(x,t;\eta)\big|_{t=T-\varepsilon}\}$ в силу непрерывности $\psi(x,t;\eta)$ при любой $\eta(x) \in C^2[0,l]$ (лемма 1).

Для значений τ таких, что $0 \leqslant \tau \leqslant T-\varepsilon$, рассмотрим линейную краевую задачу, сопряженную с (12)–(15) в области $\overline{Q}_\tau = \{0 \leqslant x \leqslant l, \tau \leqslant t \leqslant T\}$ (ср. с (7)–(10)):

$$c(x,t,u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad 0 < x < l, \quad \tau < t \leqslant T, \tag{19}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x - \mathcal{E}_0 z|_{x=0} = 0, \quad \tau < t \leqslant T, \tag{20}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x + \mathcal{E}_1 z|_{x=l} = 0, \quad \tau < t \leqslant T, \tag{21}$$

$$z|_{t=\tau} = \theta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{22}$$

$\mathcal{L}z \equiv \big(a(x,t,u_1^0)z_x\big)_x - \mathcal{A}z_x - \mathcal{B}z$, $\theta(x) = \big(c(x,t,u_1^0)|_{t=\tau}\big)^{-1} w(x)$. В силу требований к входным данным и принадлежности $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ классу $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$, $p_1^0(x)$ и $p_2^0(x)$ классу $C^1[0,l]$ следует, что все коэффициенты в уравнении и в граничных условиях задачи (19)–(22) непрерывны как функции (x,t) и t соответственно. Это позволяет заключить, что существует ее решение $z(x,t;\tau)$ в классе $C(\overline{Q}_\tau) \bigcap C^{2,1}(Q_\tau)$, причем $z(x,t;\tau)$ непрерывным образом зависит от параметра τ в силу устойчивости относительно входных данных [9]. Имеет место вспомогательная

Лемма 2. *Пусть входные данные удовлетворяют условиям леммы* 1 *и для функции* $w(x)$ *выполнено* (18). *Тогда решение* $z(x,t;\tau)$ *задачи* (19)–(22) *с начальной функцией* $\theta(x) = \Big(c(x,t,u_1^0)\big|_{t=\tau}\Big)^{-1} w(x)$ *удовлетворяет в конечный момент времени условию* $z(x,t;\tau)\big|_{t=T} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим непрерывную по τ $(0 \leqslant \tau \leqslant T-\varepsilon)$ функцию

$$F(\tau) = \int\limits_\tau^T \int\limits_0^l z\big\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\big\}\,dx\,dt + \int\limits_\tau^T \int\limits_0^l \psi\{cz_t - \mathcal{L}z\}\,dx\,dt. \tag{23}$$

С одной стороны, $F(\tau) = 0$ в силу однородности уравнений (12) и (19). С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (12)–(15) и (19)–(22), а также предположение (18) позволяют привести функцию $F(\tau)$ к виду

$$F(\tau) = \int\limits_0^l c(x,t,u_1^0)\big|_{t=T} z(x,T;\tau)\eta(x)\,dx - \int\limits_0^l \psi(x,t;\eta)\big|_{t=\tau}\, w(x)\,dx = 0 \quad \forall \eta \in C^2[0,l].$$

Отсюда в силу произвольности функции $\eta(x) \in C^2[0,l]$ и неравенства $c(x,t,u) \geqslant c_{\min} > 0$ вытекает, что $z|_{t=T} = 0$. Лемма 2 доказана.

Вопрос о плотности множества $\Big\{\psi(x,t;\eta)\big|_{t=\tau}\Big\}$ свелся таким образом к вопросу о единственности решения краевой задачи для $z(x,t;\tau)$ с обратным направлением времени. А именно, следует ли из (19)–(22) и условия $z|_{t=T} = 0$, что $z(x,t;\tau) \equiv 0$ в $\overline{Q}_\tau$, а тем самым, что и $\theta(x) = 0$, $w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Имеет место

Лемма 3. Плотность множества $\Big\{\psi(x,t;\eta)\big|_{t=\tau}\Big\}$**.** *Пусть выполнены требования леммы* 1 *и, кроме того, производные* a_{ut} *и* a_{uu} *непрерывны по* t *и* u *при* $(x,t,u) \in \overline{D}$; *производные* e_{it} *непрерывны по* t, *производные e_{iut} и e_{iuu} непрерывны по t и u при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|u| \leqslant M_0$; производные q_{it} непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 0, 1$. Тогда из выполнения равенства* (18), *в котором $\psi(x,t;\eta)$ — решение сопряженной задачи* (12)–(15), *$w(x)$ — некоторая непрерывная функция, следует, что $w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что все коэффициенты уравнения (19) как функции (x,t) удовлетворяют в силу своей непрерывности и равномерной ограниченности в $\overline{Q}_\tau$ (см. выше) тем требованиям регулярности, при которых соответствующая краевая задача для линейного параболического уравнения с обратным направлением времени имеет единственное решение в классе гладких функций [3, с. 222].

Другое требование, налагаемое в [3] на коэффициенты в граничных условиях, означает применительно к (20), (21), что $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ как функции t должны быть непрерывны вместе со своими производными при $0 < t \leqslant T$. Непрерывность $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ очевидным образом следует из (11) при выполнении требований леммы 1 к входным данным и принадлежности $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$. Но принадлежность к этому классу Гельдера не обеспечивает, вообще говоря, непрерывности приграничных производных u_{2xt}^0 при $x = 0$ и $x = l$ (из нее следует только, что $u_{2x}^0|_{x=0} \in H^{(1+\lambda)/2}[0,T]$, $u_{2x}^0|_{x=l} \in H^{(1+\lambda)/2}[0,T]$, $0 < \lambda < 1$), которая в силу (11) необходима для непрерывности производных $\mathcal{E}_{it}$ $(i = 0, 1)$. Однако дополнительные требования к гладкости входных данных, накладываемые условиями леммы 3, обеспечивают непрерывность $u_{2xt}^0|_{x=0}$ и $u_{2xt}^0|_{x=l}$, а также непрерывность и самих коэффициентов $\mathcal{E}_{it}$ $(i = 0, 1)$.

Таким образом, предположения леммы 3 позволяют использовать так называемое свойство обратной единственности [3], чтобы заключить для однородной линейной краевой задачи (19)–(22) с дополнительным условием $z(x,t;\tau)\big|_{t=T} = 0$ (лемма 2), что $z(x,t;\tau) \equiv 0$ в $\overline{Q}_\tau$. Но тогда при $t = \tau$ следует, что $\theta(x) = 0$, т.е. $w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Отсюда и следует свойство плотности множества $\left\{\psi(x,t;\eta)\big|_{t=\tau}\right\}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T - \varepsilon)$. Лемма 3 доказана.

3.4. Дальнейшее исследование единственности решения $\{u^0(x,t), p^0(x)\}$ обратной задачи (1)–(5) связано с изучением функций $\Psi(x;\eta) = T_0^{-1}\int\limits_0^{T_0} \psi(x,t;\eta)\,dt$, $\forall \eta \in C^2[0,l]$, усредненных на временном интервале $[0,T_0]$, где T_0 — произвольная точка, $0 < T_0 < T$.

Лемма 4. *Пусть входные данные удовлетворяют условиям леммы* 3. *При пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $C^2[0,l]$ соответствующие усредненные функции $\Psi(x;\eta)$ образуют множество, всюду плотное в $L_2[0,l]$, т.е. из соотношения для некоторой функции $w(x) \in C[0,l]$*

$$\int\limits_0^l \Psi(x;\eta)\,w(x)\,dx = 0 \quad \forall \eta \in C^2[0,l] \tag{24}$$

следует, что $w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$.

Как и при выводе лемм 2 и 3, рассматривается краевая задача (19)–(22) в области $\overline{Q}_\tau$, но уже при всех значениях τ, $0 \leqslant \tau \leqslant T_0$, где T_0 — произвольная точка, $0 < T_0 \leqslant T - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — произвольно малое, но конечное число). Для функции $F(\tau)$ (см. (23)) имеет место соотношение

$$\int\limits_0^{T_0} F(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^l \int\limits_0^{T_0} z(x,T;\tau)\,d\tau\, c(x,t,u_1^0)\big|_{t=T}\,\eta(x)\,dx - \int\limits_0^l \int\limits_0^{T_0} \psi(x,\tau;\eta)\,d\tau\, w(x)\,dx = 0.$$

В силу (24) и произвольности $\eta(x)$ следует, что $\int\limits_0^{T_0} z(x,T;\tau)\,d\tau = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, при любом $0 < T_0 \leqslant T - \varepsilon$. Рассматривая этот интеграл как функцию x и верхнего предела, заключаем, что $z(x,T;T_0) = 0$. Таким образом, решение задачи (19)–(22) в области $\overline{Q}_\tau$ при $\tau = T_0$ удовлетворяет в конечный момент времени дополнительному условию $z(x,T;T_0) = 0$. Используя, как и при выводе леммы 3, результаты обратной единственности для такой задачи [3], приходим к тождеству $z(x,t;T_0) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{T_0}$. Следовательно, при $t = T_0$ из (22) вытекает, что $\theta(x) = 0$, $w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Таким образом, усредненные функции $\Psi(x;\eta)$ обладают свойством плотности, причем в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и T_0, $0 < T_0 \leqslant T - \varepsilon$, и на всем интервале $0 < t < T$. Лемма 4 доказана.

Изучим теперь функции $\Psi(x;\eta;\alpha) = T_0^{-1}\int\limits_0^{T_0} \alpha(x,t)\psi(x,t;\eta)\,dt$, $0 < T_0 < T$, которые можно рассматривать как усреднения с весом $\alpha(x,t)$ решений сопряженной задачи (12)–(15) на интервале $[0,T_0]$. Обобщением леммы 4 является

Лемма 5. *Пусть для входных данных выполнены условия леммы 2 и пусть весовая функция $\alpha(x,t)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству $\left|\alpha(x,t)\right| > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. Тогда множество усреднений $\Psi(x;\eta;\alpha)$, получаемое при пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $C^2[0,l]$, является всюду плотным в $L_2[0,l]$.*

Вывод леммы 5 проводится по той же схеме, что и вывод леммы 4. Отметим только, что в качестве начальной функции $\theta(x)$ в (22) берется $\theta(x) = \left(c(x,t,u_1^0)\big|_{t=\tau}\right)^{-1} \alpha(x,\tau)w(x)$.

3.5. Свойства плотности, установленные для сопряженной задачи (12)–(15), позволяют получить достаточные условия единственности решения коэффициентной обратной задачи (1)–(5). Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены требования* (i)–(iv) *и пусть, кроме того, производная c_t непрерывна при $(x,t,u) \in \overline{D}$, производные a_{ut} и a_{uu} непрерывны по t и u при $(x,t,u) \in \overline{D}$, производные e_{it} непрерывны по t, производные e_{iut} и e_{iuu} непрерывны по t и u при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|u| \leqslant M_0$, а производные q_{it} непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 0, 1$. Предположим также, что при $(x,t,u) \in \overline{D}$ выполнено неравенство $\left|d(x,t,u)\right| > 0$.*

Тогда обратная задача (1)–(5) *не может иметь двух различных решений в классе гладких функций:*

$$
\begin{aligned}
&u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\,\overline{Q}\,), \quad u_x^0(x,t) \in C(\,\overline{Q}\,)\bigcap C^{2,1}(Q),\\
&u_{xt}^0|_{x=0} \in C(0,T], \quad u_{xt}^0|_{x=l} \in C(0,T], \quad p^0(x) \in C^1[0,L], \quad 0 < \lambda < 1.
\end{aligned}
$$

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством плотности усреднений $\Psi(x;\eta;\alpha)$ (лемма 5) при $\alpha(x,t) = d\big(x,t,u_1^0(x,t)\big)$, чтобы заключить из интегрального соотношения (16) леммы 1, что $\Delta p(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Тогда из соотношений (7)–(10), которые представляют собой линейную краевую задачу относительно $\Delta u(x,t)$, вытекает в силу единственности ее решения в классе гладких функций [9], что $\Delta u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Замечание 1. Теорема 1 устанавливает единственность решения коэффициентной обратной задачи (1)–(5) в более узком классе по сравнению с определением 1, так как при ее выводе накладываются более жесткие требования к входным данным, чем требования (i)–(iv). Однако эти дополнительные требования вызваны только условиями обратной единственности для линейных краевых задач третьего рода в [3].

Замечание 2. Установлена следующая связь между проблемой единственности для параболических уравнений с финальным наблюдением, в которых неизвестны коэффициенты при младших членах, и проблемой плотности для соответствующей сопряженной задачи:

— плотность множеств решений сопряженной задачи (12)–(15) на любом временном слое $t = \tau$ $\left\{\psi(x,t;\eta)\big|_{t=\tau}\right\}$ и их усреднений на любом временном интервале $[0,T_0]$ следует из единственности решения однородной краевой задачи в случае линейного параболического уравнения с обратным направлением времени (из свойства обратной единственности);

— в свою очередь, свойства плотности, которыми обладают решения сопряженной задачи (12)–(15), обеспечивают единственность решения $\left\{u^0(x,t), p^0(x)\right\}$ исходной обратной задачи (1)–(5).

4. Проблема единственности решения для обратной задачи в случае линейного параболического уравнения. Остановимся кратко на достаточных условиях единственности, которые вытекают из проведенного исследования в том случае, когда обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $p(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ из условий

$$c(x,t)u_t - \big(a(x,t)u_x\big)_x + b(x,t)u_x + d(x,t)p(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = \big\{0 < x < l, 0 < t \leqslant T\big\}, \tag{25}$$

$$a(x,t)u_x - e_0(t)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{26}$$

$$a(x,t)u_x + e_1(t)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{27}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{28}$$

и дополнительного условия при $t = T$

$$u|_{t=T} = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{29}$$

где $a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, d, f, e_i, q_i $(i = 0, 1)$, φ и g — известные функции своих аргументов.

Пусть входные данные удовлетворяют следующим требованиям.

(j) При $(x,t) \in \overline{Q}$ функция $a(x,t)$ принадлежит $H^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\,\overline{Q}\,)$, функции $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$ и $f(x,t)$ принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2}(\,\overline{Q}\,)$, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $0 < \lambda < 1$.

(jj) Функции $e_i(t)$ и $q_i(t)$ принадлежат $H^{(1+\lambda)/2}[0,T]$, $e_i \geqslant 0$, $\varphi(x) \in H^{2+\lambda}[0,l]$, выполнены условия согласования
$$a(x,0)\varphi_x - e_0(0)\varphi|_{x=0} = q_0(0), \quad a(x,0)\varphi_x + e_1(0)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

(jjj) Функция $g(x)$ принадлежит $H^{2+\lambda}[0,l]$ и удовлетворяет условиям согласования
$$a(x,T)g_x - e_0(T)g|_{x=0} = q_0(T), \quad a(x,T)g_x + e_1(T)g|_{x=l} = q_1(T).$$

Требования (j) и (jj) обеспечивают существование и единственность решения $u(x,t)$ линейной краевой задачи третьего рода (25)–(28) в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любом коэффициенте $p(x)$ из $H^{\lambda}[0,l]$ при младшем члене уравнения (25) [9]. Исходя из этого, дадим

Определение 2. Решением в классах Гельдера коэффициентной обратной задачи (25)–(29) назовем пару функций $\{u^0(x,t),p^0(x)\}$: $u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$, $p^0(x) \in H^{\lambda}[0,l]$, $0<\lambda<1$, удовлетворяющих соотношениям (25)–(29) в обычном смысле.

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности решения $\{u^0(x,t),p^0(x)\}$ принимает следующий вид.

Теорема 2. *Предположим, что входные данные удовлетворяют требованиям* (j)–(jjj). *Пусть, кроме того, производные a_t, b_x и c_t непрерывны в $\overline{Q}$, производные e_{it} $(i=0,1)$ непрерывны при $\leqslant t \leqslant T$, выполнено неравенство $|d(x,t)|>0$ при $(x,t)\in\overline{Q}$.*

Тогда в случае существования решения обратной задачи (25)–(29) $\{u^0(x,t),p^0(x)\}$, *такого, что $u^0(x,t)$ знакопостоянно при $0\leqslant x\leqslant l$, $0<t<T$, оно единственно в смысле определения* 2.

Доказательство повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 1, опираясь на соотношение $\int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi(x,t;\eta)d(x,t)u_1^0(x,t)\Delta p(x)\,dx\,dt = 0 \quad \forall\eta\in C^2[0,l]$ — аналог соотношения (16) для решения $\psi(x,t;\eta)$ сопряженной задачи, имеющей в данном случае вид
$$\begin{aligned}
&\big(c(x,t)\psi\big)_t + \big(a(x,t)\psi_x\big)_x + \big(b(x,t)\psi\big)_x - d(x,t)p_2^0(x)\psi = 0, \quad 0<x<l, \quad 0\leqslant t<T,\\
&a(x,t)\psi_x - \big(e_0(t)-b(x,t)\big)\psi|_{x=0} = 0, \quad 0\leqslant t<T,\\
&a(x,t)\psi_x + \big(e_1(t)+b(x,t)\big)\psi|_{x=l} = 0, \quad 0\leqslant t<T, \quad \psi|_{t=T}=\eta(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l.
\end{aligned}$$

При пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $C^2[0,l]$ решения $\psi(x,t;\eta)$ на любом временном слое $t=\tau$ и их усреднения на любом временном интервале $[0,T_0]$ $(0<T_0<T)$ образуют множества, всюду плотные в $L_2[0,l]$. Вывод этих утверждений основан (как и в квазилинейном случае) на теореме единственности для линейных параболических уравнений с обратным направлением времени [3]. Однако здесь в отличие от квазилинейного случая применение результатов из [3] не вызывает затруднений, достаточно лишь потребовать непрерывности производных a_t и e_{it}, $i=0,1$.

5. О классе допустимых решений. Выбор функциональных пространств в определениях 1 и 2 для решений $\{u^0(x,t),p^0(x)\}$ коэффициентных обратных задач является естественным, так как он обусловлен соответствующими дифференциальными зависимостями в классах Гельдера между входными данными и решением для параболических операторов с краевыми условиями третьего рода (в прямой постановке). Однако если неизвестный коэффициент p в уравнении (1) или (25) ищется в виде $p(x,t)$, а не $p(x)$, то такая обратная задача не обладает, вообще говоря, свойством единственности. Это показывает

Пример 2. Две пары функций
$$\begin{cases} u_k(x,t) = x^2(x-1)^2\big(1+t\exp(-t^k)\big)+t+1,\\ p_k(x,t) = \mathcal{P}_k(x,t)\Big\{x^2(x-1)^2\big(1+t\exp(-t^k)\big)+t+1\Big\}^{-1}, \end{cases}$$
где $\mathcal{P}_k(x,t) = \big\{x^2(x-1)^2(1-kt^k)-2t(6x^2-6x+1)\big\}\exp(-t^k)+12x-12x^2-1$, $k=1,\,2$, являются решениями коэффициентной обратной задачи с финальным переопределением в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1\}$:
$$\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} + p(x,t)u = 0, \quad 0<x<1, \quad 0<t\leqslant 1,\\
&u_x - u|_{x=0} = -(t+1), \quad u_x + u|_{x=1} = t+1, \quad 0<t\leqslant 1,\\
&u|_{t=0} = x^2(x-1)^2+1, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,
\end{aligned}$$
удовлетворяющими в конечный момент времени $t=1$ условию $u|_{t=1} = x^2(x-1)^2(1+e^{-1})+2$, $0\leqslant x\leqslant 1$, т.е. для этой задачи единственность решения не имеет места.

Таким образом, пары функций $\{u(x,t), p(x)\}$ составляют естественный класс допустимых решений в соответствующих функциональных пространствах для линейных и квазилинейных параболических операторов с неизвестными коэффициентами при младших членах. Его расширение путем включения в него пар функций $\{u(x,t), p(x,t)\}$ приводит к нарушению единственности решения.

Замечание 3. Все представленные результаты допускают обобщение для многомерных постановок рассматриваемого класса обратных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
2. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
3. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
4. *Клибанов М.В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Доклады АН СССР. 1985. **280**, № 3. 533–536.
5. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York, Basel: Marcel Dekker, 1999.
6. *Костин А.Б.* Разрешимость коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения // Обратные и некорректно поставленные задачи. М.: Изд-во МАКС Пресс, 2000. 42.
7. *Egger H., Engl H.W., Klibanov M.V.* Global uniqueness and Hölder stability for recovering a nonlinear source term in a parabolic equation // Inverse Problems. 2005. **21**, N 1. 271–290.
8. *Кожанов А.И.* Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами // Тезисы докладов международной конференции “Тихонов и современная математика”. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. 105–106.
9. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
19.03.2009