УДК 517.632.8

О РЕДУКЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ К ЛИНЕЙНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

М. Ю. Кокурин[1]

Исследуется двумерная нелинейная обратная задача для волнового уравнения. По семейству решений уравнения, заданному на замкнутом контуре, требуется реконструировать коэффициент при второй производной по времени. Рассматриваемая обратная задача сводится к однозначно разрешимому линейному интегральному уравнению первого рода. Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 09–01–00273а).

Ключевые слова: обратная задача, некорректная задача, волновое уравнение, линейное интегральное уравнение, единственность.

1. Введение. Объектом исследования в работе является нелинейная обратная задача определения коэффициента при старшей производной в двумерном волновом уравнении по данным о решениях этого уравнения, отвечающих набору сосредоточенных источников. Распространение колебаний в среде описывается волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2(x)}\, u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Задача (1), (2) возникает при математическом моделировании акустических и электромагнитных колебаний в трехмерной среде $\mathbb{R}^3 = \big\{(x, x_3)\big\}$, свойства которой не меняются по направлению x_3 в условиях, когда источник волн сосредоточен в цилиндре $\operatorname{supp}\varphi \times \mathbb{R}$ и имеет интенсивность, не зависящую от координаты x_3. В случае акустических колебаний $u(x,t)$ есть акустическое давление в точке $x \in \mathbb{R}^2$ в момент времени t, величина $c(x) > 0$ определяет скорость звука в этой точке.

Исследуемая обратная задача заключается в определении коэффициента $c(x)$ по результатам наблюдения полей $u(x,t)$, отвечающих некоторому семейству функций φ. Предполагается, что среда однородна вне некоторой априори заданной подобласти $R \subset \mathbb{R}^2$, так что $c(x) = c_0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus R$, где константа $c_0 > 0$ известна, а функция $c = c(x)$ при $x \in R$ подлежит определению. Наблюдение рассеянного неоднородностью поля проводится в точках гладкого контура Y, не пересекающегося с $\overline{R}$. Неоднородность облучается волновыми полями, источники которых описываются функциями $\varphi(x) = \varphi(x;q)$, $q \in X$. Здесь q — параметр, определяющий вид и положение источника колебаний, множество X описывает семейство источников рассеиваемых волн. Предполагается, что носители $\operatorname{supp}\varphi(\cdot;q)$ сосредоточены в пределах компактной области излучения, не пересекающейся с зондируемой областью R. Начальная задача (1), (2) допускает эквивалентную формулировку в виде [1, с. 223]

$$\frac{1}{c^2(x)}\, u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = \frac{1}{c^2(x)}\, \varphi(x;q)\delta(t), \quad u(x,t)\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{3}$$

В качестве $\varphi(x;q)$ в (2) и (3) могут выступать и обобщенные функции, например, часто рассматриваются $\varphi(x;q) = \delta(x-q)$. В этом случае X есть множество точек $q \in \mathbb{R}^2$, служащих источниками мгновенного возбуждения среды при $t = 0$.

Задача определения коэффициента $c(x)$ по различным данным о решении уравнений вида (3) с $x \in \mathbb{R}^n$ подробно изучалась как в случае $n = 2$, так и при $n \geqslant 3$ [2–7]. С вычислительной точки зрения — это сильно нелинейная некорректная задача. Достаточно полно она исследована для уравнений вида (3), в

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, просп. Ленина, д. 1, 424001, г. Йошкар-Ола; профессор, e-mail: kokurin@marsu.ru

которых правая часть имеет вид $f(x,t) = \psi(x;q)e^{-i\omega t}$ и описывает гармонический по времени возбуждающий источник. Если считать, что наблюдаются установившиеся гармонические колебания, т.е. решения уравнения (3), гармонически с частотой ω зависящие от времени, то задача определения функции c сводится к нелинейной коэффициентной обратной задаче для эллиптического уравнения. Если $n = 3$, $\psi(x;q) = \delta(x-q)$ и для измерения доступны амплитуды гармонических колебаний среды на разных частотах $\omega_1, \omega_2, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty}\omega_n = 0$, то задача определения функции c сводится к линейному интегральному уравнению Фредгольма первого рода [2, с. 224]. В случае $n = 3$ при облучающем поле вида $f(x,t) = \psi(x;q)g(t)$, $\psi(\cdot,q) \in C(\mathbb{R}^3)$, $g \in C[0,\infty)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, обратная задача для уравнения (3) исследовалась в [8, 9]. В [6, 8, 9] показано, что данная нелинейная обратная задача во многих случаях допускает эквивалентную редукцию к однозначно разрешимому линейному интегральному уравнению первого рода. Тем самым к ней оказывается применимым широкий спектр известных методов решения линейных некорректных задач. Важным достоинством этого подхода по сравнению с альтернативными схемами, трактующими задачу определения коэффициента c непосредственно как нерегулярное нелинейное операторное уравнение, является нелокальная сходимость получаемых итерационных схем нахождения c.

В подтверждение сказанного сошлемся на известное свойство глобальной сходимости итерационных методов решения линейных некорректных операторных уравнений [10, 11]. Это свойство отсутствует у итерационных методов решения нелинейных уравнений общего вида, как регулярных, так и нерегулярных [11, 12]. Используемая в [6, 8, 9] схема предполагает применение к уравнению (3) преобразования Лапласа, приводящего оператор в левой части к виду $c^{-2}(x)p^2 - \Delta$, где $p \in \mathbb{C}$ — параметр преобразования. Принятая в этих работах методика существенно использует тот факт, что при $n = 3$ функция Грина соответствующей задачи с постоянным коэффициентом $c_0^{-2}p^2$ переходит при $p \to 0$ в функцию Грина оператора Лапласа $(-\Delta)$. Если $n = 2$, то эта методика требует модификации, поскольку функция Грина, отвечающая оператору $c_0^{-2}p^2 - \Delta$, $x \in \mathbb{R}^2$, имеет при $p = 0$ логарифмическую особенность.

Целью настоящей статьи является обоснование редукции нелинейной обратной задачи определения коэффициента c в двумерном волновом уравнении (1) к однозначно разрешимому линейному интегральному уравнению.

2. Постановка задачи. Вопрос о разрешимости задачи Коши (1), (2) достаточно хорошо изучен, особенно в случае гладкой функции φ и коэффициента c. Следуя [13, с. 183], отметим лишь, что если функция c имеет в $\mathbb{R}^2$ непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка и $\varphi \in W_2^{(k)}(\mathbb{R}^2)$ $(k \geqslant 3)$, то задача (1), (2) имеет обобщенное решение $u \in W_2^{(k)}\big(\mathbb{R}^2 \times [0,T]\big)$ при любом $T > 0$. В случае $k \geqslant 4$ это решение является классическим. Если функции φ и c бесконечно дифференцируемы, то этим же свойством обладает и решение $u(x,t)$.

Для дальнейшего существенно наличие у функции $u = u(x,t)$ и ее производных u_{tt}, $u_{x_1x_1}$, $u_{x_2x_2}$ в уравнениях (1) и (3) преобразования Лапласа по переменной t, определенного в открытой правой полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > 0\}$. Для локально интегрируемой функции $v = v(t)$, $v(t)\big|_{t<0} \equiv 0$, такой, что $\big|v(t)\big| \leqslant Ae^{\alpha t}$ при $t \to +\infty$, преобразование Лапласа определяется формулой

$$\widetilde{v}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}v(t)\,dt, \quad \operatorname{Re} p > \alpha. \tag{4}$$

Указанное преобразование определяется также и для обобщенных функций медленного роста, т.е. для $u \in \mathcal{S}'$ [1, с. 177]. Интересующая нас возможность вычисления преобразования Лапласа для функции $u(x,t)$ и ее производных имеется по крайней мере в случае бесконечно дифференцируемых функций c и φ. Всюду ниже считаем, что $\operatorname{supp}(c - c_0) \subset S_a \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant a\}$, $a > 0$. Обычный способ обоснования преобразования Лапласа решения (1), (2) и его производных с произвольным $p \in \mathbb{C}^+$ состоит в наложении на параметры задачи следующего "условия неловушечности".

Условие A [14, с. 234]. Разрывы функции Грина $E(x,t;x_0)$ уравнения (1) удаляются в бесконечность при $t \to +\infty$, т.е. для любого $d > 0$ существует такой момент $\tau = \tau(d)$, что $E(x,t;x_0)$ является бесконечно дифференцируемой функцией при $|x_0| \leqslant a$, $|x| \leqslant d$, $t > \tau(d)$.

Функция Грина $E(x,t;x_0)$ определяется как решение задачи (1), (2) с $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$.

В [14, с. 269] приведена эквивалентная формулировка условия A в терминах гамильтоновой системы, ассоциированной с уравнением (1). Условие A и его варианты широко используются при исследовании асимптотического поведения решений начальных и начально-краевых задач для гиперболических уравнений [14]. Они находят применение и при обосновании численных методов решения коэффициентных обратных задач для соответствующих уравнений [3, 15].

Предложение 1 [14, с. 273]. *Пусть функции c, φ являются бесконечно дифференцируемыми на $\mathbb{R}^2$, выполняется условие* A *и* $\operatorname{supp}\varphi \subset S_a$. *Тогда существуют такие постоянные T_1, T_2, что для решения $u(x,t)$ задачи* (1), (2) *при $|x| \leqslant b$, любых целых α_1, α_2, $j \geqslant 0$ и любых $t > T_1 + jT_2$ справедлива оценка*

$$\left| \frac{\partial^{j+\alpha_1+\alpha_2}}{\partial t^j\, \partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}}\, u(x,t) \right| \leqslant C(\alpha_1, \alpha_2, j)\, t^{-j-1}\, \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) с учетом гладкости $u(x,t)$ при $t \geqslant 0$ следует, что при выполнении условий предложения 1 производные всех порядков функции $u(x,t)$ обладают преобразованием Лапласа для всех $p \in \mathbb{C}^+$.

Для наших целей условия предложения 1 являются избыточными. Функцию c всюду ниже будем считать дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}^2$, функцию φ выбираем в виде $\varphi(x;q) = \delta(x-q)$. Введем следующее предположение, заменяющее условия предложения 1.

Условие B. Решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) (или, эквивалентно, задачи (3)) таково, что при некотором $\kappa \geqslant 0$ функция $\left(1 + |x|^2 + t^2\right)^{-\kappa} u(x,t)$ интегрируема на $\mathbb{R}^3 = \{(x,t)\}$.

При выполнении условия B локально интегрируемая функция $u(x,t)e^{-\sigma t}$ при любом $\sigma \geqslant 0$ порождает обобщенную функцию медленного роста, т.е. элемент пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ [1, с. 151]. Отметим, что в условиях конечной гладкости коэффициента c произведение $c^{-2}(x)u_{tt}(x,t)$ в (3) понимается в смысле определения, данного в [16, с. 85]. Если выполняется условие B, то функция u и ее производные по переменным x_1, x_2, t обладают преобразованием Лапласа, определенным для всех $p \in \mathbb{C}^+$, при этом преобразование Лапласа от производных понимается, вообще говоря, в смысле обобщенных функций [1, с. 176].

Следующие соображения говорят о том, что наложенное условие, по-видимому, не является излишне обременительным. Во-первых, в случае полностью однородного пространства, когда $c(x) \equiv c_0$, имеем

$$u(x,t) = E(x,t;q) = \frac{\theta\big(t - |x-q|/c_0\big)}{2\pi c_0^2 \sqrt{t^2 - \big(|x-q|/c_0\big)^2}}\,, \tag{6}$$

где θ — функция Хевисайда, $\theta(\tau) = 0$, $\tau \leqslant 0$, и $\theta(\tau) = 1$, $\tau > 0$. Выполнение условия B в данном случае проверяется непосредственно. Функция (6) вблизи характеристического конуса $c_0 t = |x-q|$ имеет интегрируемую особенность по t, а при $t \to +\infty$ убывает как $O\big(t^{-1}\big)$. Последняя асимптотика совпадает с порядком правой части оценки (5) при $j = 0$, известной для задач с гладкими данными c, φ. Можно ожидать, что такой же порядок $\big|u(x,t)\big|$ по $t \to +\infty$ во многих случаях сохранится и в задачах с коэффициентом $c(x)$ конечной гладкости при $\varphi(x) = \delta(x-q)$. Что же касается асимптотики решения задачи (3) вблизи характеристического конуса, то она остается интегрируемой по t и в случае неоднородного пространства. Для $x \neq q$ положим $\tau(x) = \sup\{t \geqslant 0 :\ u(x,s) = 0,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Величина $\tau(x)$ есть время прихода сигнала в точку x при возбуждении среды мгновенным источником, расположенным в точке q. В случае $c(x) \equiv c_0$ имеем $\tau(x) = \dfrac{|x-q|}{c_0}$. Согласно [3, с. 30, 31], для решения задачи (3) с $\varphi(x) = \delta(x-q)$ и функцией $c(x)$ конечной гладкости вместо явной формулы (6) имеем оценку $u(x,t) = \theta\big(t - \tau(x)\big) O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2 - \tau^2(x)}}\right)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau(x) + \epsilon$. Приведенные оценки показывают, что при фиксированной точке $x \neq q$ функция $u(x,t)$ обладает преобразованием Лапласа для любого $p \in \mathbb{C}^+$. Если же коэффициенты этих оценок достаточно регулярно зависят от x, то можно ожидать выполнения условия B.

Ранее в [17] был изучен вопрос о единственности решения следующей обратной задачи.

Постановка задачи. Пусть $R \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, X, Y — замкнутые кусочно-гладкие кривые, не охватывающие область R и такие, что $X \cap \overline{R} = \emptyset$, $Y \cap \overline{R} = \emptyset$.

Будем рассматривать семейство решений $u(x,t) = u(x,t;q)$ задачи (1), (2), отвечающих функциям $\varphi(x;q) = \delta(x-q)$, $q \in X$. По известным значениям $u(x,t;q)$, $x \in Y$, $t \geqslant 0$, $q \in X$, требуется найти коэффициент $c(x)$ при $x \in R$. Кривая Y играет роль множества, на котором расположены детекторы, фиксирующие волновое поле, инициированное источником $\varphi(\cdot, q)$, при этом наблюдения проводятся для всех значений $q \in X$.

В [17] установлено, что поставленная задача имеет единственное решение, т.е. что коэффициент $c(x)$, $x \in R$, однозначно восстанавливается по данным наблюдения $u(x,t;q) = E(x,t;q)$, $(x,q) \in Y \times X$. Для трехмерных волновых уравнений с распределенными источниками волн аналогичные утверждения имеются в [8, 9]. Ниже покажем, что сформулированная обратная задача сводится к линейному интегральному уравнению первого рода, имеющему единственное решение.

3. Редукция к линейному интегральному уравнению. Введем обозначение $\xi(x) = \dfrac{1}{c^2(x)} - \dfrac{1}{c_0^2}$,

$x \in R$. Очевидно, что рассматриваемая обратная задача сводится к определению функции $\xi(x)$, $x \in R$. Из (3) получаем $\Delta u(x,t;q) - \dfrac{1}{c_0^2}\, u_{tt}(x,t;q) = -\dfrac{1}{c_0^2}\, \delta(x-q)\delta(t) + \xi(x) u_{tt}(x,t;q)$.

Вычисляя преобразование Лапласа по t от обеих частей последнего равенства с использованием соотношения $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ и тождеств из [1, с. 163, формула (22); с. 178, формула (10); с. 179, формула (12)], находим

$$\Delta \widetilde{u}(x,p;q) - \frac{p^2}{c_0^2}\, \widetilde{u}(x,p;q) = -\frac{1}{c_0^2}\, \delta(x-q) + p^2\, \widetilde{u}(x,p;q)\xi(x), \quad p \in \mathbb{C}^+. \tag{7}$$

Функция Грина для оператора, стоящего в левой части уравнения (7), имеет вид

$$G(x,x';p) = -\frac{1}{2\pi}\, K_0\left(\frac{p|x-x'|}{c_0}\right), \quad |\arg p| < \pi, \tag{8}$$

где $K_0(z) = -I_0(z)\left(\ln \dfrac{z}{2} + \gamma\right) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(k!)^2}\left(\sum\limits_{m=1}^{k} \dfrac{1}{m}\right)\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2k}$ $(\arg z| < \pi)$ — функция Макдональда [18, с. 124], $I_0(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(k!)^2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2k}$ $(z \in \mathbb{C})$ — функция Бесселя и $\gamma = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера. Непосредственно проверяется, что представление $K_0(z) = -\left(\ln \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{4}\ln \dfrac{z}{2} + \gamma + \dfrac{(\gamma-1)z^2}{4}\right) + O\big(|z|^3\big)$, $|\arg z| < \pi$, имеет место при $z \to 0$. Через $\ln z$ всюду обозначается главная ветвь логарифма, определенная при $|\arg z| < \pi$. Таким образом, для функции Грина $G(x,x';p)$ имеем

$$\begin{aligned} G(x,x';p) = \frac{1}{2\pi}\bigg(&\ln p + \gamma + \ln \frac{|x-x'|}{2c_0} + \frac{|x-x'|^2}{4c_0^2}\, p^2 \ln p + \\ &+ \frac{|x-x'|^2}{4c_0^2}\, p^2 \ln \frac{|x-x'|}{2c_0} + \frac{(\gamma-1)|x-x'|^2}{4c_0^2}\, p^2\bigg) + O\big(|p|^3\big), \quad p \to 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Используя функцию Грина (8), из (7) получим

$$\widetilde{u}(x,p;q) = -\frac{1}{c_0^2}\, G(x,q;p) + p^2 \int\limits_R G(x,x';p)\, \widetilde{u}(x',p;q)\xi(x')\, dx', \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad q \in X. \tag{10}$$

Пусть $\rho > 0$ выбрано так, что $X, Y, R \subset S_\rho$, тогда согласно (10)

$$\widetilde{u}(x,p;q) = -\frac{1}{c_0^2}\, G(x,q;p) + p^2 \int\limits_{S_\rho} G(x,x';p)\, \widetilde{u}(x',p;q)\xi(x')\, dx', \quad x \in S_\rho, \quad q \in X. \tag{11}$$

Для p из положительной полуокрестности $S_\varepsilon^+ = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \varepsilon, \operatorname{Re} z > 0\big\}$, $\varepsilon < 1$, рассмотрим функцию $v(x,p;q) = (\ln p)^{-1}\, \widetilde{u}(x,p;q)$, $x \in S_\rho$. Из (11) следует, что

$$v(x,p;q) = \frac{G(x,q;p)}{-c_0^2 \ln p} + p^2 \int\limits_{S_\rho} G(x,x';p)\, v(x',p;q)\xi(x')\, dx', \quad x \in S_\rho, \quad q \in X. \tag{12}$$

Введем оператор $B_p : L_2(S_\rho) \to L_2(S_\rho)$ следующим образом:

$$(B_p w)(x) = p^2 \int\limits_{S_\rho} G(x,x';p)\, \xi(x')\, w(x')\, dx', \quad x \in S_\rho. \tag{13}$$

Пусть $g(x,p;q) = (-c_0^2 \ln p)^{-1} G(x,q;p)$. Тогда уравнение (12) запишется в виде $v(x,p;q) = g(x,p;q) + (B_p v)(x)$, $x \in S_\rho$; $p \in S_\varepsilon^+$, $q \in X$. Поскольку функция ξ непрерывна, из (9) и общих свойств операторов типа потенциала [19, с. 159] следует, что при всех $p \in S_\varepsilon^+$ оператор B_p вполне непрерывен. Кроме того, в силу (9), $\|B_p\|_{L(L_2(S_\rho),L_2(S_\rho))} = O\big(|p|^2 |\ln |p||\big)$, так что при малом $\varepsilon > 0$, $\forall p \in S_\varepsilon^+$ выполняется $\|B_p\|_{L(L_2(S_\rho),L_2(S_\rho))} < 1$. Таким образом, для функции v справедливо представление

$$v(x,p;q) = (I - B_p)^{-1}\, g(x,p;q) = \big(I + B_p + B_p^2 + \ldots\big)\, g(x,p;q). \tag{14}$$

Ограничимся вещественными значениями $p \in S_\varepsilon^+$, т.е. полагаем $p \in (0, \varepsilon]$. Из (9), (13) и (14) следует

$$\begin{aligned} g(x,p;q) &= g_0(x,p;q) + O\big(|p|^3\big), \\ g_0(x,p;q) &= -\frac{1}{2\pi c_0^2}\left(1 + \frac{\gamma}{\ln p} + \frac{1}{\ln p}\ln\frac{|x-q|}{2c_0} + \frac{|x-q|^2}{4c_0^2}p^2 + \right. \\ &\left. + \frac{|x-q|^2}{4c_0^2}\frac{p^2}{\ln p}\ln\frac{|x-q|}{2c_0} + \frac{(\gamma-1)|x-q|^2}{4c_0^2}\frac{p^2}{\ln p}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

На основании (14), (15) при $x \in Y$, $p \in (0, \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, e^{-\gamma})$, $q \in X$, имеем

$$\begin{aligned} v(x,p;q) &= g_0(x,p;q) + \frac{p^2}{4\pi^2}\left(1+\frac{\gamma}{\ln p}\right)^2 \ln p \int\limits_R \xi(x')\,dx' + \frac{p^2}{4\pi^2}\left(1+\frac{\gamma}{\ln p}\right) \times \\ &\times \int\limits_R \left(\ln\frac{|x-x'|}{2c_0} + \ln\frac{|x'-q|}{2c_0}\right)\xi(x')\,dx' + \frac{p^2}{4\pi^2\ln p}\int\limits_R \ln\frac{|x-x'|}{2c_0}\ln\frac{|x'-q|}{2c_0}\xi(x')\,dx' + O\big(|p|^3\big). \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим

$$h(x,p;q) = \frac{4\pi^2\big(v(x,p;q) - g_0(x,p;q)\big)}{\left(1+\dfrac{\gamma}{\ln p}\right)^2 p^2 \ln p}; \quad x \in Y, \quad p \in (0,\varepsilon], \quad q \in X. \tag{17}$$

Из (16), (17) получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для функции* $h(x,p;q)$, $x \in Y$, $p \in (0,\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, e^{-\gamma})$, $q \in X$, *имеет место разложение по степеням малого параметра* $(\ln p + \gamma)^{-1}$*:*

$$\begin{aligned} h(x,p;q) &= \int\limits_R \xi(x')\,dx' + \frac{1}{\ln p + \gamma}\int\limits_R \left(\ln\frac{|x-x'|}{2c_0} + \ln\frac{|x'-q|}{2c_0}\right)\xi(x')\,dx' + \\ &+ \frac{1}{(\ln p+\gamma)^2}\int\limits_R \ln\frac{|x-x'|}{2c_0}\ln\frac{|x'-q|}{2c_0}\xi(x')\,dx' + O\big(|p|\big). \end{aligned} \tag{18}$$

Переходя в (18) к пределу при $p \to 0$, последовательно находим

$$\int\limits_R \xi(x')\,dx' = H_0 \equiv \lim_{p\to 0} h(x,p;q) \quad \forall x \in Y, \quad q \in X; \tag{19}$$

$$\int\limits_R \left(\ln\frac{|x-x'|}{2c_0} + \ln\frac{|x'-q|}{2c_0}\right)\xi(x')\,dx' = H_1(x,q) \quad \forall x \in Y, \quad q \in X, \quad \text{где} \tag{20}$$

$$H_1(x,q) = \lim_{p\to 0}(\ln p + \gamma)\big(h(x,p;q) - H_0\big), \tag{21}$$

$$\int\limits_R \ln\frac{|x-x'|}{2c_0}\ln\frac{|x'-q|}{2c_0}\xi(x')\,dx' = H_2(x,q), \quad x \in Y, \quad q \in X, \quad \text{где} \tag{22}$$

$$H_2(x,q) = \lim_{p\to 0}(\ln p+\gamma)^2\left(h(x,p;q) - H_0 - \frac{H_1(x,q)}{\ln p + \gamma}\right). \tag{23}$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* B. *Тогда функция* $\xi(x)$, $x \in R$, *удовлетворяет линейному интегральному уравнению* (22), *в котором функция* H_2 *определена соотношениями* (19), (21), (23).

Одновременно с (22) получены еще равенства (19), (20), которым также удовлетворяет функция ξ. Нетрудно видеть, что совокупность условий (19), (20) не определяет искомую функцию однозначно. Это следует из того, что существуют ненулевые функции $\xi \in C(\overline{R})$, удовлетворяющие соотношениям

$$\int\limits_R \xi(x')\,dx' = 0, \qquad \int\limits_R \ln\frac{|x-x'|}{2c_0}\xi(x')\,dx' = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{R}. \tag{24}$$

Достаточно выбрать произвольную функцию φ класса $C^2(\mathbb{R}^2)$ с носителем, принадлежащим R, и положить $\xi(x) = \Delta\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Соотношения (24) вытекают после этого из первой и второй формул Грина [1, с. 331]. Однозначно разрешимым оказывается лишь уравнение (22). Доказательство этого проводится аналогично случаю $n = 3$ [8] и использует факт плотности линейных комбинаций функций из семейства $\{w_1 w_2 : \Delta w_1(x) = \Delta w_2(x) = 0,\ x \in \overline{R}\}$ в $L_2(R)$ [4, с. 47–52] и свойство плотности линейных комбинаций функций $\left\{\ln \dfrac{|x-q|}{2c_0}\right\}_{q \in X}$ в $\{w : \Delta w(x) = 0, x \in \overline{R}\}$. При этом существенно, что гармоническая при $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{q\}$ функция $\ln \dfrac{|x-q|}{2c_0}$ лишь коэффициентом и постоянным слагаемым отличается от фундаментального решения $(2\pi)^{-1} \ln |x-q|$ уравнения $\Delta u(x) = \delta(x-q)$ [1, с. 117].

Замечание. Величина $\displaystyle\int\limits_R \xi(x')\,dx' = \int\limits_R \left(c^{-2}(x') - c_0^{-2}\right) dx'$ имеет смысл мощности реконструируемой неоднородности. Как показывает равенство (19), эта мощность может быть найдена в результате реализации единственного эксперимента по зондированию неоднородной среды: производится мгновенное возбуждение среды в точке $q \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{R}$, результат фиксируется в точке $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{R}$. Определяемая в соответствии с (19) величина $\displaystyle\int\limits_R \xi(x')\,dx'$ не зависит от пары выбранных точек (q, x). Относительная простота численного нахождения правой части равенства (17) с $v(x,p;q) = (\ln p)^{-1}\, \widetilde{u}(x,p;q)$ по сравнению с решением уравнения (22) позволяет рассматривать данную упрощенную схему зондирования в качестве приема локализации множества $\operatorname{supp} \xi$, который потенциально реализуем в режиме реального времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
2. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
4. *Рамм А.Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
5. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Berlin: Springer, 1998.
6. *Лаврентьев М.М.* Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1965. **160**, № 1. 32–35.
7. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Об одной трехмерной обратной задаче диагностики в волновом приближении // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 9. 1364–1367.
8. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Козлов А.И.* Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // ЖВМ и МФ. 2003. **43**, № 8. 1201–1209.
9. *Кокурин М.Ю., Паймеров С.К.* Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // ЖВМ и МФ. 2008. **48**, № 1. 115–126.
10. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
11. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал УРСС, 2002.
12. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения нерегулярных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2006.
13. *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953.
14. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982.
15. *Beilina L., Klibanov M.* A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // SIAM J. Sci. Comput. 2008. **31**, N 1. 478–509.
16. *Шубин М.А.* Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003.
17. *Лаврентьев М.М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // ДАН СССР. 1964. **157**, № 3. 520–521.
18. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965.
19. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию
16.06.2009