УДК 519.6

КРИТЕРИИ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ХОРОШО ЛОКАЛИЗОВАННЫХ БАЗИСОВ

Д. А. Петров[1]

Рассматривается процесс получения критерия ортогональности обобщенного хорошо локализованного базиса Вейля–Гейзенберга для случая сопряженной N-симметрии формирующей функции. Построен редуцированный базис, который является ортогональным в смысле обычного скалярного произведения при условии ортогональности базиса Вейля–Гейзенберга в смысле вещественного скалярного произведения. Для редуцированного базиса доказаны критерии ортогональности как в частотной, так и во временно́й области. Результаты моделирования подтверждают хорошие свойства локализации базисов и выполнимость критериев ортогональности. Полученные критерии необходимы для разработки вычислительно эффективного алгоритма формирования базисов и имеют применение при анализе и формировании сигналов, в частности в системах передачи информации с ортогональным частотно-временны́м уплотнением.

Ключевые слова: базис Вейля–Гейзенберга, хорошо локализованный базис, OFDM, OFTDM, ортогонализация.

Введение. При передаче информации в реальных дисперсионных каналах кроме аддитивного шума возникают помехи в виде межсимвольной интерференции (МСИ) и межканальной интерференции (МКИ). МСИ может быть практически полностью устранена за счет использования защитных интервалов или циклических префиксов. При этом в идеальных каналах МКИ также становится пренебрежимо малой за счет ортогональности базисных функций. Однако реальные беспроводные каналы далеки от идеальных. Физически, возникновение МСИ и МКИ в каналах с частотно-временны́м рассеянием объясняется потерей ортогональности между "возмущенными" базисными функциями сигнала на выходе канала. В результате процедура демодуляции этого сигнала на приемной стороне оказывается неоптимальной. Возникает просачивание информации из каждого поднесущего канала в соседние [1, 2]. Кроме того, использование циклического префикса приводит к потере спектральной эффективности и повышению энергопотребления [3].

Требуется построить базис с наилучшей локализацией и по времени, и по частоте, использование которого приводит к минимальным значениям МСИ и МКИ. Тем самым необходимо решить задачу синтеза ортогонального оптимально локализованного базиса, получаемого равномерными сдвигами по времени и частоте двух и более инициализирующих функций (обобщенного базиса Вейля–Гейзенберга).

Известно [4], что наилучшей частотно-временно́й локализацией обладает функция Гаусса, доставляющая равенство в соотношении неопределенности Гейзенберга, которое ограничивает возможности бесконечно точной локализации функции по времени и по частоте одновременно. Однако базис Габора, который строится на основе гауссиана, не является ортогональным.

Из теоремы Балиан–Лоу (Balian–Low) [5] следует, что невозможно синтезировать ортогональные базисы на основе хорошо локализованных формирующих импульсов в случае предельной плотности частотно-временно́й сетки. Таким образом, нельзя построить ортогональный сигнальный базис с хорошей локализацией для OFDM систем без потери спектральной эффективности. С другой стороны, ортогональность является обязательным требованием, от которого нельзя отказаться. Решение этой дилеммы привело к разработке альтернативной схемы модуляции, позволяющей получить наилучшее частотно-временно́е уплотнение модулирующих символов (OFTDM — Orthogonal Frequency Time Division Multiplexing).

В среде с пространственно-временны́м рассеянием именно хорошо локализованные базисы обеспечивают наилучшее восстановление сигнала. Такие базисы применяются, например, в системах связи, использующих принцип передачи с ортогональным частотным уплотнением (OFDM — Orthogonal Frequency Division Multiplexing), и в радиолокации. OFDM система с таким оптимальным базисом будет обладать робастным свойством — наименьшей чувствительностью к дисперсионным возмущениям в канале.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; аспирант, e-mail: dapetroff@gmail.com

Необходимо отметить, что разложение по ортогональным базисам Вейля–Гейзенберга дает частотно-временно́е описание сигналов, сходное с вейвлет-преобразованием [6]. Таким образом, разработка методов синтеза таких базисов представляет самостоятельный интерес независимо от области их последующего применения.

Математическая модель OFTDM сигнала. Запишем модель OFTDM сигнала в дискретном времени. Если формирующая функция $g(t)$ имеет полосу пропускания $F = \dfrac{1}{T}$, то с учетом M сдвигов в частотной области (положим число поднесущих M четным) ширина спектра сигнала $s(t)$ будет равна $W = \dfrac{M}{T}$. На конечном временно́м интервале $[0, NT]$ дискретизированный с частотой $f_{\rm d} = W$ сигнал $s(t)$ и соответствующий дискретный базис Вейля–Гейзенберга $B[J_N]$ будут иметь вид:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{L-1} c_{kl}^R\,\psi_{kl}^R[n] + \sum_{l=0}^{L-1} c_{kl}^I\,\psi_{kl}^I[n]\right), \quad n\in J_N, \tag{1}$$

$$\psi_{kl}^R[n] = g\big[(n-lM)_{\mathrm{mod}\,N}\big]\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{M}\,k(n-\alpha/2)\right), \tag{2}$$

$$\psi_{kl}^I[n] = -jg\big[(n+M/2-lM)_{\mathrm{mod}\,N}\big]\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{M}\,k(n-\alpha/2)\right), \tag{3}$$

$$B[J_N] = \big\{\psi_{kl}^R[n],\,\psi_{kl}^I[n]\big\}, \tag{4}$$

где $s[n] = s\big(nT/M\big)$, $g[n] = g\big(nT/M\big)$; $J_N = \{0,1,\ldots,N-1\}$, $N = ML \geqslant M$ ($M\geqslant 2$, L — любое натуральное число). На линейном пространстве дискретных функций, заданных на J_N, определим вещественное скалярное произведение как реальную часть обычного скалярного произведения:

$$\big\langle x[n],\,y[n]\big\rangle_R = \mathrm{Re}\Big(\big\langle x[n],\,y[n]\big\rangle\Big), \quad \big\langle x[n],\,y[n]\big\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,y^*[n], \tag{5}$$

где “*” — знак комплексного сопряжения.

Формула (1) описывает алгоритм формирования (модуляции) OFTDM сигнала в дискретном времени. Соответствующий алгоритм демодуляции имеет вид: $c_{kl}^R = \big\langle s[n],\,\psi_{kl}^R[n]\big\rangle_R$, $c_{kl}^I = \big\langle s[n],\,\psi_{kl}^I[n]\big\rangle_R$.

В соответствии с определением (5), базис $B[J_N]$ является ортогональным, если выполняются следующие условия:

$$\big\langle\psi_{kl}^R[n],\,\psi_{k'l'}^R[n]\big\rangle_R = \delta_{kk'}\,\delta_{ll'}\,, \tag{6}$$

$$\big\langle\psi_{kl}^R[n],\,\psi_{k'l'}^I[n]\big\rangle_R = 0, \tag{7}$$

$$\big\langle\psi_{kl}^I[n],\,\psi_{k'l'}^I[n]\big\rangle_R = \delta_{kk'}\,\delta_{ll'} \quad \forall k,\ k'\in J_M, \quad \forall l,\ l'\in J_L, \tag{8}$$

где $\delta_{kk'}$ — символ Кронекера.

Для упрощения записи, когда аргумент дискретной функции берется по модулю некоторого числа, будем использовать следующее сокращение: $g\big[(n)_{\mathrm{mod}\,N}\big] = g\big[(n)_N\big]$.

Условия ортогональности базиса (6)–(8) могут быть записаны в более компактном виде. Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Необходимыми и достаточными условиями ортогональности базиса $B[J_N]$ являются равенства:*

$$\big\langle\psi_{kl}^R[n],\,\psi_{00}^R[n]\big\rangle_R = \delta_{k0}\,\delta_{l0}\,, \tag{9}$$

$$\big\langle\psi_{kl}^R[n],\,\psi_{00}^I[n]\big\rangle_R = 0 \quad \forall k\in J_M, \quad \forall l\in J_L. \tag{10}$$

Критерий ортогональности базиса Вейля–Гейзенберга в случае сопряженной N-симметрии. Рассмотрим частный случай, когда $g[n]$ является действительной функцией и обладает свойством сопряженной N-симметрии:

$$g[n] = g^*\big[(-n)_N\big]. \tag{11}$$

Этому типу симметрии соответствует оптимальное значение фазового параметра $\alpha = (M/2)_{\mathrm{mod}\,M}$ [7]. При этом, когда α отлично от оптимального, получаемая в результате алгоритма ортогонализации формирующая функция для базиса Вейля–Гейзенберга уже не является симметричной и хуже локализована.

При оговоренных выше условиях можно показать, что базис

$$E[J_N] = \{g_{lm}[n]\}, \quad g_{lm}[n] = g\big[(n-lM)_N\big]\,\exp\!\left(j\,\frac{4\pi}{M}\,mn\right), \quad m \in J_{M/2}, \quad l \in J_L, \tag{12}$$

является ортогональным в смысле обычного скалярного произведения только в том случае, когда обобщенный базис Вейля–Гейзенберга, построенный на основе той же инициализирующей функции $g[n]$, является ортогональным в смысле вещественного скалярного произведения (5).

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если формирующая функция $g[n]$ обобщенного базиса Вейля–Гейзенберга* (2)–(4) *является действительной и обладает свойством сопряженной N-симметрии* (11), *а фазовый параметр выбран оптимально ($\alpha = M/2$), то необходимым и достаточным условием его ортогональности является равенство*:

$$\sum_{n=0}^{N-1} g[n]\,g\big[(n-lM)_N\big]\,\exp\!\left(\pm j\,\frac{2\pi\,mn}{M/2}\right) = \delta_{l0}\,\delta_{m0} \quad \forall m \in J_{M/2}, \quad \forall l \in J_L. \tag{13}$$

Доказательство. Введем функцию $f_1^l[n] = g\big[(n-lM)_N\big]\,g\big[(n+M/2)_N\big]$. Она является симметричной на интервале $n \in \big[0;\, lM - M/2\big]$, т.е.

$$f_1^l\big[lM - M/2 - n\big] = g\big[-M/2 - n\big]_N\,g\big[lM - n\big]_N = g\big[n + M/2\big]_N\,g\big[n - lM\big]_N = f_1^l[n],$$

а также на интервале $n \in \big[lM - M/2 + 1;\, N-1\big]$, так как для любых $p \in \big[1;\, N - 1 - lM + M/2\big]$

$$\begin{aligned} f_1^l[N-p] &= g\big[(N-p-lM)_N\big]\,g\big[(N-p+M/2)_N\big] = \\ &= g\big[(p+lM-M/2+M/2)_N\big]\,g\big[(p+lM-M/2-lM)_N\big] = f_1^l\big[p+lM-M/2\big]. \end{aligned}$$

На этих же интервалах функция $\sin\left(\dfrac{2\pi}{M}\,k\big(n-\pi/2\big)\right)$ является антисимметричной:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(lM - M/2 - n - M/4\big)\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(-n-3M/4\big)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right), \\ \sin\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(lM - M/2 + p - M/4\big)\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(p+M/4\big)\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(N-p-M/4\big)\right). \end{aligned}$$

Поэтому условие (10) ортогональности базиса $B[J_N]$, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} j\,f_1^l[n]\,\exp\!\left(j\,\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-\alpha/2\big)\right)\right\} &= -\sum_{n=0}^{N-1} f_1^l[n]\,\sin\!\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right) = \\ = -\left\{\sum_{n=0}^{lM-M/2} f_1^l[n]\,\sin\!\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right)\right\} &- \left\{\sum_{n=lM-M/2+1}^{N-1} f_1^l[n]\,\sin\!\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right)\right\} = 0, \end{aligned}$$

выполняется автоматически для любых $k \in J_M$ и любых $l \in J_M$, так как обе суммы произведений симметричной и антисимметричной функции обращаются в нуль.

Отсюда непосредственно следует, что необходимым и достаточным условием ортогональности базиса $B[J_N]$ является только условие (9).

Определим следующую вспомогательную функцию:

$$f_2^l = g\big[(n-lM)_N\big]\,g\big[(n)_N\big]. \tag{14}$$

Она является N-периодической и симметричной на интервале $n \in [0;\, lM]$, поскольку

$$f_2^l\big[lM - n\big] = g\big[(-n+lM)_N\big]\,g\big[(-n)_N\big] = g\big[(n-lM)_N\big]\,g\big[n\big] = f_2^l[n], \tag{15}$$

а также на интервале $n \in \big[lM+1;\, N-1\big]$, так как для любого $p \in \big[1;\, N-lM-1\big]$ выполнено

$$f_2^l[p+lM] = g\big[(p+lM)_N\big]\,g\big[(p)_N\big] = g\big[(-p-lM)_N\big]\,g\big[(-p)_N\big] = f_2^l\big[N-p\big]. \tag{16}$$

На этих же интервалах симметричность функции $\cos\left(\dfrac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right)$ зависит от четности k:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(lM-n-M/4\big)\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)+\pi k\right)=(-1)^k\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right),$$
$$\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(lM+p-M/4\big)\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(N-p-M/4\big)+\pi k\right)=(-1)^k\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(N-p-M/4\big)\right).$$

Условие (9), которое можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-\alpha/2\big)\right)\right\}=\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{Ml} f_2^l[n]\,\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right)+\sum_{n=Ml+1}^{N-1} f_2^l[n]\,\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,k\big(n-M/4\big)\right)\Bigg\}=\delta_{l0}\,\delta_{k0},$$

выполняется автоматически для нечетных k, так как обе суммы в левой части равенства, очевидно, обращаются в нуль.

Остается рассмотреть случай, когда k является четным, т.е. $k=2m$, $m\in J_{M/2}$.

Дискретное преобразование Фурье функции $f_2^l[n]$ имеет вид

$$F_2^l[v]=\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\exp\left(-j\,\frac{2\pi}{N}\,vn\right),\quad v\in J_N. \tag{17}$$

Следовательно,

$$F_2^l[2Lm]=\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\exp\left(-j\,\frac{2\pi}{N}\,2Lmn\right). \tag{18}$$

Учитывая свойства симметрии (15) и (16) функции $f_2^l[n]$, можно показать, что:

$$F_2^l[-2Lm]=F_2^l[2Lm]. \tag{19}$$

Действительно,

$$F_2^l[-2Lm]=\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\exp\left(-j\,\frac{2\pi}{N}\,(2Lm)n\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{lM} f_2^l[lM-n]\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{N}\,2Lmn\right)+\sum_{n=lM+1}^{N-1} f_2^l[N-n+lM]\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{N}\,2Lmn\right)=$$
$$=\sum_{n'=0}^{lM} f_2^l[n']\,\exp\left(-j\,\frac{2\pi}{N}\,2Lmn'\right)\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{N}\,2LmlM\right)+$$
$$+\sum_{n''=lM+1}^{N-1} f_2^l[n'']\,\exp\left(-j\,\frac{2\pi}{N}\,2Lmn''\right)\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{N}\,2Lm(lM+N)\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\exp\left(-j\,\frac{2\pi}{N}\,2Lmn\right)=F_2^l[2Lm],$$

где была использована замена переменных: $n'=lM-n,\ n''=N-n+lM$.

Для четных $k=2m$ левая часть условия (9) принимает вид

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{M}\,2m\big(n-M/4\big)\right)\right\}=(-1)^m\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\cos\left(\frac{2\pi}{M}\,2mn\right)=$$
$$=\frac{(-1)^m}{2}\left(\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{M}\,2mn\right)+\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\,\exp\left(-j\,\frac{2\pi}{M}\,2mn\right)\right\}=\frac{(-1)^m}{2}\Big(F_2^l[2Lm]+F_2^l[-2Lm]\Big).$$

Учет равенства (19) приводит к следующему условию ортогональности базиса $B[J_N]$, являющегося аналогом соотношения (9):

$$F_2^l[2Lm] = F_2^l[-2Lm] = \delta_{l0}\,\delta_{m0} \quad \forall m \in J_{M/2}, \quad \forall l \in J_L. \tag{20}$$

Принимая во внимание вид функции $f_2^l[n]$ (14) и соотношение (18) для ее преобразования Фурье, получим из равенства (20) искомую форму необходимого и достаточно условия ортогональности базиса Вейля–Гейзенберга (13). Теорема доказана.

Для редуцированного базиса $E[J_N]$ можно получить условия ортогональности, доказав лемму, аналогичную лемме 1 для базиса Вейля–Гейзенберга.

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием ортогональности базиса $E[J_N]$ (12) в смысле обычного скалярного произведения (5) является*

$$\big\langle g_{lm}[n],\, g_{00}[n]\big\rangle = \delta_{m0}\,\delta_{l0} \quad \forall m \in J_{M/2}, \quad \forall l \in J_L. \tag{21}$$

Замечание 1. Из леммы 2 и явного вида функций редуцированного базиса (12) непосредственно следует, что равенство (13) (или (20)) является необходимым и достаточным условием ортогональности базиса $E[J_N]$. Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 1, из ортогональности базиса $B[J_N]$ вытекает ортогональность базиса $E[J_N]$ и наоборот.

Критерии ортогональности редуцированного базиса. Вне зависимости от типа симметрии действительного формирующего импульса можно получить дополнительные критерии ортогональности редуцированного базиса в частотной и временно́й области.

Докажем следующие теоремы.

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием ортогональности базиса $E[J_N]$ (12) во временно́й области является следующее равенство*

$$\sum_{r=0}^{2L-1} g\big[(n - rM/2)_N\big]\, g\big[(n - rM/2 - lM)_N\big] = \frac{2}{M}\,\delta_{l0} \quad \forall n \in J_N, \quad \forall l \in J_L. \tag{22}$$

Доказательство. Учитывая выражение (17) для дискретного преобразования Фурье функции $f_2^l[n]$, эта функция может быть представлена в виде

$$f_2^l[n] = \frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1} F_2^l[v]\, \exp\!\left(j\,\frac{2\pi}{N}\,nv\right).$$

Поэтому для любого $r \in J_{2L}$:

$$f_2^l\big[n - rM/2\big] = \frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1} F_2^l[v]\, \exp\!\left(j\,\frac{2\pi}{N}\,(n - rM/2)\right).$$

Проведем в этом выражении суммирование по r от 0 до $2L-1$ и учтем явный вид функции $f_2^l[n]$ (14):

$$\sum_{r=0}^{2L-1} f_2^l\big[n - rM/2\big] = \sum_{r=0}^{2L-1} g\big[(n - rM/2)_N\big]\, g\big[(n - rM/2 - lM)_N\big] =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1} \exp\!\left(j\,\frac{2\pi}{N}\,vn\right) F_2^l[v] \sum_{r=0}^{2L-1} \exp\!\left(j\,\frac{2\pi}{2L}\,r(-v)\right).$$

Заметим, что $\displaystyle \frac{1}{2L}\sum_{r=0}^{2L-1} \exp\!\left(j\,\frac{2\pi}{2L}\,r(-v)\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } v \text{ кратных } 2L, \\ 0, & \text{для остальных } v. \end{cases}$

Так как $v \in J_N$, то можно заключить, что $\displaystyle\sum_{r=0}^{2L-1} \exp\!\left(j\,\frac{2\pi}{2L}\,r(-v)\right)$ отлична от нуля и равняется $2L$ только при $v = 2Lm$, $m \in J_{M/2}$; поэтому

$$\sum_{r=0}^{2L-1} g\big[(n - rM/2)_N\big]\, g\big[(n - rM/2 - lM)_N\big] = \frac{2}{M}\sum_{m=0}^{M/2-1} \exp\!\left(j\,\frac{4\pi}{M}\,mn\right) F_2^l[2Lm]. \tag{23}$$

Очевидно, что в случае ортогональности базиса $E[J_N]$, т.е. когда выполняется условие (20), выполняется и равенство (22). Таким образом, условие (22) является необходимым для ортогональности редуцированного базиса. Для доказательства достаточности условия (22), заметим, что если оно выполнено, то для любых $l \in \{1, 2, \dots, L-1\}$ и $m \in J_{M/2}$ из соотношения (23) следует: $F_2^l[2Lm] = 0$, $\dfrac{2}{M}\sum\limits_{m=0}^{M/2-1} \exp\left(j\,\dfrac{4\pi}{M}\,mn\right) F_2^0[2Lm] = 1$, причем последнее равенство выполняется только в том случае, когда $F_2^0[2Lm] = \delta_{m0}$, $m \in J_{M/2}$. Следовательно, полностью выполняется необходимое и достаточное условие ортогональности базиса в виде (20). Теорема доказана.

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием ортогональности базиса* $E[J_N]$ (12) *в частотной области является равенство*

$$\sum_{k=0}^{M-1} G\big[(p+kL)_N\big]\, G^*\big[(p+kL-2Lm)_N\big] = \frac{1}{L}\,\delta_{m0} \quad \forall p \in J_N, \quad \forall m \in J_{M/2}. \tag{24}$$

Доказательство. Согласно (13) необходимое и достаточное условие ортогональности базиса $E[J_N]$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{N-1} g[n]\left(g\big[(n-lM)_N\big]\,\exp\left(j\,\frac{2\pi}{N}\,2Lmn\right)\right)^* = \delta_{l0}\,\delta_{m0} \quad \forall l \in J_L, \quad \forall m \in J_{M/2}\,.$$

Применив равенство Парсеваля, получим

$$\sum_{\kappa=0}^{N-1} G[\kappa]\, G^*\big[(\kappa-2Lm)_N\big]\,\exp\left(-j\,\frac{2\pi}{L}\,l\kappa\right) = \delta_{l0}\,\delta_{m0}\,, \tag{25}$$

где $G[\kappa]$ — дискретное преобразование Фурье функции $g[n]$.

Левую часть условия (25) можно представить в виде разложения в ряд Фурье некоторой L-периодической функции

$$\Gamma_m[p] = \sum_{k=0}^{M-1} G\big[(p+kL)_N\big]\, G^*\big[(p+kL-2Lm)_N\big], \quad p \in J_L.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{p=0}^{L-1} \exp\left(-j\,\frac{2\pi}{L}\,pl\right)\Gamma_m[p] = \delta_{l0}\,\delta_{m0}\,.$$

Очевидно, что при $m \neq 0$ это равенство выполняется только в том случае, если $\Gamma_m[p] = 0$ $\forall p \in J_L$, а при $m = 0$, если $\Gamma_m[p] = \dfrac{1}{L}$ $\forall p \in J_L$. Таким образом, условие $\Gamma_m[p] = \dfrac{1}{L}\,\delta_{l0}$ $\forall p \in J_L$, представляет собой необходимое и достаточное условие ортогональности базиса $E[J_N]$.

Если учесть вид функции $\Gamma_m[p]$ и ее L-периодичность, то мы получим искомый вид условия ортогональности (24) редуцированного базиса в частотной области для любых $p \in J_N$. Теорема доказана.

Результаты моделирования. Редуцированный базис (12) формируется на основе такой же инициализирующей функции, что и базис Вейля–Гейзенберга. Таким образом, синтезировав базис $E[J_N]$, мы получаем функцию

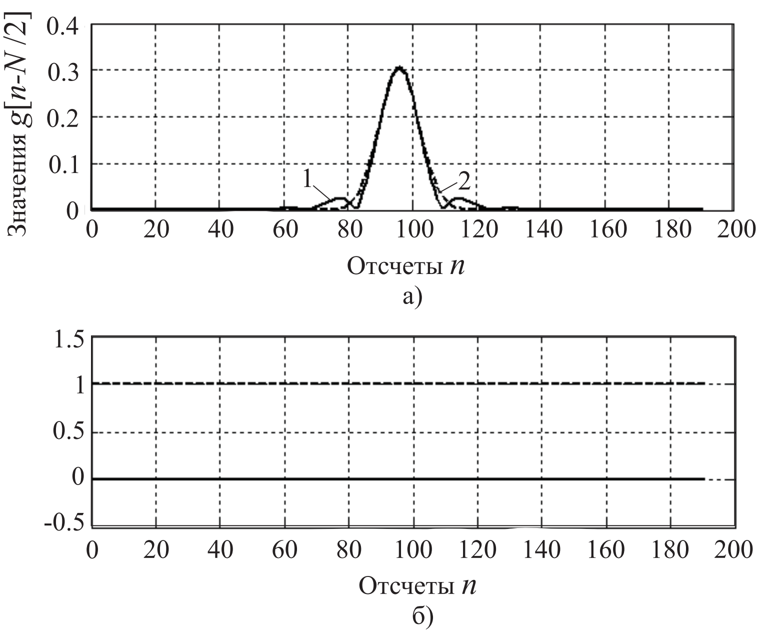

Рис. 1. Формирующая функция $g[n]$ и функция Гаусса; проверка критерия ортогональности базиса $E[J_N]$ во временно́й области

$g[n]$, необходимую для построения базиса $B[J_N]$. В [1] был предложен алгоритм формирования ортогонального базиса Вейля–Гейзенберга, обладающего хорошей локализацией за счет своей близости к идеально локализированному, но не ортогональному, базису Габора, построенному на основе гауссовской инициализирующей функции $g_0(t) = (2\sigma)^{1/4}\exp\bigl(-\pi\,\sigma\,t^2\bigr)$, $t \in R$. Этот алгоритм был применен для построения редуцированного базиса $E[J_N]$.

На рис. 1а представлены графики полученной формирующей функции $g[n]$ (кривая 1) и идеально локализованной функции Гаусса (штрихованная кривая 2) во временно́й области для количества поднесущих $M = 16$ и $L = 12$. Для наглядности функции сдвинуты в середину интервала $N = LM$. Видно, что $g[n]$ близка к функции Гаусса и обладает хорошей локализацией. На рис. 1б приведены результаты проверки критерия ортогональности базиса $E[J_N]$ во временно́й области. Для $l = 0$ и любых $n \in J_N$ в соответствии с равенством (22) получена горизонтальная прямая на уровне единицы, а для остальных $l \in J_N$ — на уровне нуля.

На рис. 2а построен модуль спектра $G[k]$ формирующей функции $g[n]$, который также обладает хорошими характеристиками локализации (кривая 1), и модуль спектра функции Гаусса (штрихованная кривая 2). На рис. 2б приведены результаты проверки критерия ортогональности (24) в частотной области.

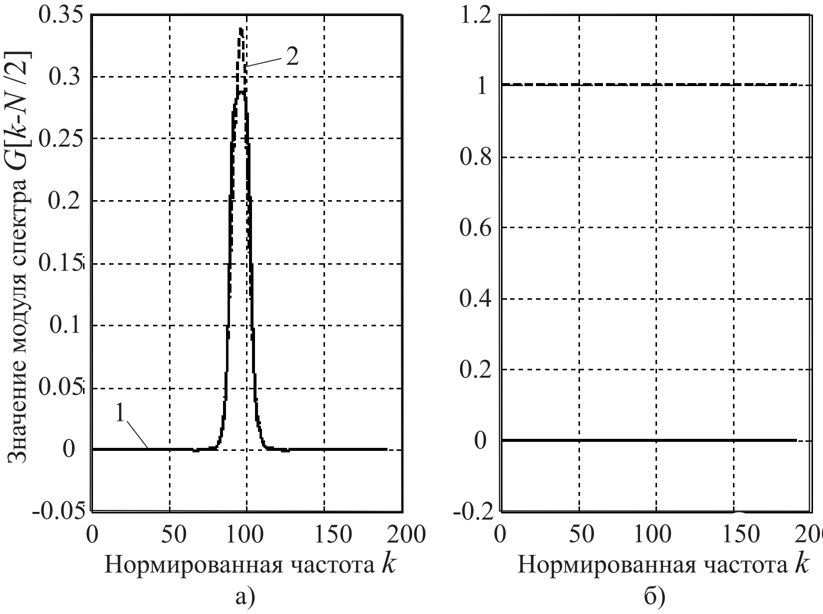

Рис. 2. Модуль спектра формирующей функции $g[n]$ и функции Гаусса (а); проверка критерия ортогональности базиса $E[J_N]$ в частотной области (б)

Проведенные исследования показали, что предлагаемые алгоритмы позволяют строить хорошо локализованные базисы, обладающие высокой степенью ортогональности, которые могут получить широкое прикладное применение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волчков В.П.* Сигнальные базисы с хорошей частотно-временно́й локализацией // Электросвязь. 2007. № 2. 21–25.
2. *Zou W.Y., Wu Y.* COFDM: An overview // IEEE Trans. Broadc. 1995. **41**. 1–8.
3. *Du J., Signell S.* Classical OFDM systems and pulse shaping OFDM/OQAM systems. Technical Report on the Wireless KTH Project. 2007.
4. *Gabor D.* The theory of communication // J. IEE (London). 1946. bf 93, N 26. 429–457.
5. *Bolcskei H., Grochenig K., Hlawatsch F., Feichtinger H.G.* Oversampled Wilson expansions // IEEE Signal Processing Letters. 1997. **4**. 106–108.
6. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
7. *Волчков В.П., Петров Д.А.* Оптимизация ортогонального базиса Вейля–Гейзенберга для цифровых систем связи, использующих принцип OFDM/OQAM передачи // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 2009. № 1, вып. 9/1. 104–115.

Поступила в редакцию
11.06.2009