УДК 519.2:541.1

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ УСЛОВИЯХ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ НЕКОРРЕКТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В. А. Морозов¹

Рассмотрены проблемы устойчивого решения достаточно широкого класса некорректных вариационных задач (задач обобщенной минимизации). Указаны условия, гарантирующие сходимость обобщенных методов регуляризации, невязки и квазирешений в исходном пространстве, а также усиленную сходимость при некоторых дополнительных условиях на функционалы. Выводы работы существенно обобщают ряд результатов, полученных ранее для линейных и нелинейных уравнений с неограниченными операторами. Исследовано влияние ошибок в задаче как исходного, так и стабилизирующего функционалов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00026) и РФФИ-Юг (код проекта 03-01-96698).

Ключевые слова: метод регуляризации, некорректные задачи, вариационные задачи, обобщенная минимизация, устойчивость, численные методы, метод обобщенной невязки.

1. Постановка задачи. Пусть H — гильбертово пространство (в п. 8 показано, как освободиться от этого условия), на части которого $D \subseteq H$ задан вещественный функционал $\varphi(u)$. Предположим, что множество $D^* = \{u \in D : \varphi(u) = \varphi^* = \inf_{u \in D} \varphi(u) > -\infty\} \neq \emptyset$ и на D^* определен некоторый оператор F , такой, что $FD^* = \hat{D}^* \subseteq D^*$. В частности, оператор F может переводить все множество D^* в одну точку: $\hat{D}^* = \{\hat{u}\}$. Оператор F будем называть *фильтрационным*.

Основная задача (обобщенная задача минимизации), рассматриваемая далее, заключается в следующем. Пусть задана пара $(\tilde{\varphi}, \tilde{F})$, которая является в некотором смысле приближением к паре (φ, F) , а степень точности приближения характеризуется вектором $\delta = (\delta_0, \delta_1)$. Требуется построить (необязательно однозначный) алгоритм $\tilde{R}: (\tilde{\varphi}, \tilde{F}) \xrightarrow{\tilde{R}} \tilde{D} \subset H$ таким образом, чтобы множество $\tilde{D}$ *аппроксимировало* множество $\hat{D}^*$ в смысле приводимого ниже определения.

Определение 1. Будем говорить, что множество $\tilde{D}$ β_H -аппроксимирует множество $\hat{D}^*$, если

$$\lim_{|\delta| \rightarrow 0} \beta_H(\tilde{D}, \hat{D}^*) = 0, \quad |\delta| = (\delta_0^2 + \delta_1^2)^{1/2},$$

а $\beta_H(\tilde{D}, \hat{D}^*)$ — так называемое *полуотклонение* [1] множеств $\tilde{D}$ и $\hat{D}^*$ в пространстве H , определяемое согласно формуле $\beta_H(\tilde{D}, \hat{D}^*) = \sup_{u \in \tilde{D}} \rho_H(u, \hat{D}^*)$.

Определение 2. Если алгоритм $\tilde{R}$ позволяет указать при любом векторе δ множества $\tilde{D}$, β_H -аппроксимирующее множество $\hat{D}^*$, то он называется β_H -устойчивым (*регуляризирующим*) алгоритмом решения основной задачи [11].

Выбор фильтрационного оператора F может быть обусловлен самыми различными причинами. Обычно он определяется совокупностью априорных знаний относительно искомых решений *исходной* вариационной задачи для функционала $\varphi(u)$, $u \in D$. Так, если известно, что множество $D^* \cap N$ непусто, где N — некоторое *заданное* множество пространства H , то действие оператора F может заключаться в выборе общих точек множеств D^* и N . Более удобен, однако, следующий достаточно общий и получивший широкое распространение [11, 28] способ построения фильтрационного оператора. Этого способа мы и будем придерживаться в дальнейшем.

Пусть на множестве D определен еще один *целевой* функционал $g(u)$, $u \in D$, такой, что

$$g^* = \inf_{u \in D^*} g(u) > -\infty.$$

Рассматривается задача определения множества $\hat{D}^* = \{\hat{u} \in D^* : g(\hat{u}) = g^*\}$. Если множество $\hat{D}^*$ непусто, то действие оператора F заключается в построении этого множества, которое мы будем называть *множеством g -минимальных решений* исходной вариационной задачи.

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Целесообразность постановки задачи в указанном виде заключается в возможности *более точного* математического описания реальных физических ситуаций. Так, например, если элемент $\hat{u} \in H$, минимизирующий функционал $\varphi(u)$, $u \in D$, характеризует состояние некоторого проектируемого объекта, то условие выбора g -минимальных решений может соответствовать *принципу минимальной сложности* его структуры. Далее, если в распоряжении вычислителя уже есть некоторая модель $\bar{u}$ описываемого явления, то задавая функционал $g(u)$ в виде $g(u) = g^*(u - \bar{u}) \geq 0$, $g^*(0) = 0$, можно условие выбора g -минимальных решений трактовать в смысле *принципа минимума отклонений* от этой модели (“идя вперед — оглядывайся назад!”). В частности, элемент $\bar{u}$ может быть получен и в результате *непосредственных* (прямых) измерений параметра u . Описанная ситуация довольно часто реализуется в задачах, имеющих статистическую природу. Условие g -минимальности можно трактовать для этого класса задач как условие выбора *наиболее вероятного* вектора, характеризующего “состояние природы”, если известно его *априорное распределение*, т.е. реализуется схема, описанная в работах [14, 15].

Нетрудно видеть, что понятие g -минимального решения задачи (1) обобщает известные понятия нормального решения [2], псевдорешения [3], главного решения [4].

2. Вспомогательные определения и утверждения.

Определение 3. Вещественный функционал $p(u)$, $u \in Q \subseteq H$, $Q \neq \emptyset$, называется (*слабо*) *замкнутым*, если для всякой последовательности $u_n \in Q$, такой, что $u_n \xrightarrow{(с.л.)} u_0 \in H$, $p(u_n) \rightarrow p^* = \inf p(u) > -\infty$, $n \rightarrow \infty$, следует, что $u_0 \in Q^* = \{u \in Q : p(u) = p^*\}$.

Это определение встречается в [5]. Легко видеть, что если функционал $p(u)$ слабо замкнут, то он и замкнут; обратное, вообще говоря, неверно. Однако справедлива

Теорема 1. *Если функционал $p(u)$, $u \in Q$, выпуклый, то для слабой замкнутости необходима и достаточна его замкнутость.*

Доказательство теоремы 1 вполне аналогично доказательству эквивалентности слабой полунепрерывности снизу выпуклых функционалов их полунепрерывности снизу, приведенному, например, в [6].

С определением 3 тесно связано

Определение 4. Функционал $p(u)$, $u \in Q$, называется (*слабо*) *полузамкнутым снизу* [31], если для всякой последовательности $u_n \in Q$, такой, что $u_n \xrightarrow{(с.л.)} u_0 \in H$, $p(u_n) \rightarrow p \neq \pm\infty$, $n \rightarrow \infty$, следует, что $u_0 \in Q$ и $p(u_0) \leq p$.

Заметим, что в случае, когда множество Q (*слабо*) *замкнуто*, условие (*слабой*) *полузамкнутости снизу* эквивалентно известному условию (*слабой*) *полунепрерывности снизу* функционала $p(u)$, $u \in Q$. При этом справедлива аналогичная вышеприведенной

Теорема 1'. *Если функционал $p(u)$, $u \in Q$, выпуклый, то для слабой полузамкнутости снизу необходима и достаточна его полузамкнутость снизу.*

Заметим также, что всякий (*слабо*) *полузамкнутый снизу* функционал является (*слабо*) *замкнутым*. Достаточно широкий класс полузамкнутых снизу функционалов составляют функционалы типа

$$p(u) \equiv \|Au - \bar{f}\|_F^2, \quad u \in D_A \subseteq H, \quad (1)$$

где $A : H \rightarrow F$ — линейный замкнутый оператор, действующий в гильбертово пространство F , $\bar{f}$ — элемент из F , D_A — область определения A .

Отметим, что в рассматриваемом случае функционал $p(u)$, $u \in Q$, является также слабо полузамкнутым снизу в силу теоремы 1'. Если в (1) оператор нелинейный, то для слабой полузамкнутости снизу $p(u)$, $u \in D_A$, в этом случае достаточна слабая замкнутость оператора A [7].

Дальше важную роль играет

Определение 5. Функционал $p(u)$, $u \in Q \subseteq H$, назовем *A-выпуклым*, если выполнены условия:

- 1) Q — выпуклое множество;
- 2) существует линейный оператор $A : H \rightarrow F$ с областью определения $D_A \supseteq Q$, такой, что

$$\mu(\|Au - Av\|_F) \leq \frac{1}{2} p(u) + \frac{1}{2} p(v) - p\left(\frac{u+v}{2}\right) \quad \forall u, v \in Q,$$

где $\mu(\tau) \geq 0$, $\mu(0) = 0$ — непрерывная в нуле строго возрастающая функция при $\tau \geq 0$.

Легко видеть, что если A — оператор аннулирования, то мы имеем дело с выпуклым функционалом; если уравнение $Au = 0$ имеет лишь тривиальное решение $u = 0$, то — со строго выпуклым функционалом, а если к тому же оператор A^{-1} ограничен, то — с равномерно выпуклым функционалом [8]. Таким образом, понятие *A-выпуклости* естественно обобщает ряд известных понятий. Нетрудно видеть, что функционал (1) при линейном операторе A является *A-выпуклым*.

3. Основные предпосылки. Существование g -минимальных решений. Далее наряду с $\varphi(u)$ и $g(u)$, $u \in D$, будут рассматриваться приближающие их функционалы $\tilde{\varphi}(u)$ и $\tilde{g}(u)$, $u \in D$.

Выделим ряд условий:

- I) $\varphi(u)$ слабо замкнут, $g(u)$ слабо полузамкнут снизу;
- I') $\varphi(u)$, $g(u)$ и их приближения $\tilde{\varphi}(u)$, $\tilde{g}(u)$ слабо полузамкнуты снизу;
- II) если последовательность $u_n \in D$, $n \rightarrow \infty$, такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) = \varphi^*, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g(u_n) \leq g^*, \quad (2)$$

то $\{u_n\}$ слабо компактна в H , а если, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = g^*, \quad (2')$$

то $\{u_n\}$ компактна в H ;

II') множества вида $D_C = \{u \in D : \varphi(u) \leq C, g(u) \leq C\}$ при любом конечном C слабо компактны, а любая последовательность $\{u_n\}$, удовлетворяющая (2), (2'), компактна в H ;

III) существуют постоянные $k_0, k_1, k_3 \geq 0$, $k_0 + k_1 > 0$, такие, что функционал $F(u) = k_0\varphi(u) + k_1g(u) + k_3 \geq 0$, $u \in D$, и выполнены условия аппроксимации

$$|\tilde{\varphi}(u) - \varphi(u)| \leq \delta_0 F(u), \quad |\tilde{g}(u) - g(u)| \leq \delta_1 F(u), \quad (3)$$

где δ_0, δ_1 — некоторые малые величины; считается, что $g(u), \tilde{g}(u) \geq 0$, $u \in D$;

IV') функционал $\varphi(u)$ — A -выпуклый, функционал $g(u)$ — L -выпуклый с функциями $\mu_0(\tau)$ и $\mu_1(\tau)$ соответственно, причем существуют постоянные $k'_0 \geq 0$, $k'_1 \geq 0$, $k'_0 + k'_1 > 0$, такие, что функционал

$$F_1(u) = k'_0\mu_0(\|Au\|_F) + k'_1\mu_1(\|Lu\|_G) \geq \gamma^2\nu(\|u\|_H), \quad u \in D, \quad (4)$$

где $\nu(\tau)$ — функция того же типа, что и $\mu(\tau)$; пространства F и G , как и H , гильбертовы, а операторы A и L предполагаются замкнутыми.

Далее условия I, II, III предполагаются выполненными *всегда*, а условия I', II', IV' привлекаются по мере необходимости. Заметим, что выполнение условий I', II' влечет выполнение условий I, II.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 2. Множество g -минимальных решений $\hat{D}^*$ непусто.

Действительно, множество D^* непусто по предположению. Пусть $u_n \in D^*$ — минимизирующая последовательность для функционала $g(u) : g^* \leq g(u_n) \leq g^* + \rho_n$, $\rho_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$. Поскольку $\varphi(u_n) = \varphi^*$, то в силу (2) последовательность $\{u_n\}$ слабо компактна. Без ограничения общности будем считать, что $u_n \xrightarrow{с.л.} u_0 \in H$. В силу условия I получаем: $u_0 \in D^*$, $g(u_0) \leq g^*$. Отсюда следует утверждение:

Теорема 2'. Если выполнено также условие IV', то g -минимальное решение определяется однозначно: $\hat{D}^* = \{\hat{u}\}$.

Действительно, пусть $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ — два g -минимальных решения. Тогда в силу (4) имеем

$$\begin{aligned} \nu(\|\hat{u}_1 - \hat{u}_2\|_H) &\leq \frac{1}{\gamma^2} F_1(\hat{u}_1 - \hat{u}_2) \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma^2} k'_0 \left[\frac{1}{2} \varphi(\hat{u}_1) + \frac{1}{2} \varphi(\hat{u}_2) - \varphi\left(\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2}\right) \right] + \frac{1}{\gamma^2} k'_1 \left[\frac{1}{2} g(\hat{u}_1) + \frac{1}{2} g(\hat{u}_2) - g\left(\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2}\right) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma^2} k'_0 \left[\varphi^* - \varphi\left(\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2}\right) \right] + \frac{1}{\gamma^2} k'_1 \left[g^* - g\left(\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2}\right) \right] \leq 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$. Теорема доказана.

Укажем достаточные условия, при которых выполнены условия I (I'), II (II'), III, (IV'), если функционалы $\varphi(u)$ и $g(u)$ имеют вид

$$\varphi(u) \equiv \|Au - \bar{f}\|_F^2, \quad g(u) \equiv \|Lu - \bar{g}\|_G^2, \quad u \in D = D_A \cap D_L, \quad (5)$$

и $A : H \rightarrow F$, $L : H \rightarrow G$ суть линейные замкнутые операторы, действующие в пространствах Гильберта, а D_A и D_L — области определения операторов A и L . Элемент $\bar{g} \in G$ считается заданным, а вместо $\bar{f} \in F$

заданы $f_\delta \in F : \|\bar{f} - f_\delta\|_F \leq \delta \rightarrow 0$. Допускается, что $\varphi^* > 0$ и существует по крайней мере один элемент $\bar{u} \in D$, такой, что $\|A\bar{u} - \bar{f}\|_F^2 = \varphi^*$.

Если A — произвольный и $L = E$ — тождественный операторы, то задача отыскания g -минимальных решений совпадает с задачей отыскания псевдорешения [29] уравнения $Au = \bar{f}$. Случай $A = E$ и L — произвольный оператор соответствует задаче вычисления значений оператора L [9]; в эту же схему вкладывается задача восстановления [27] при специальном выборе оператора L . Общий случай соответствует задаче вычисления значений (неограниченного) оператора L на псевдорешениях операторного уравнения $Au = \bar{f}$ [10].

Далее считается, что операторы A и L таковы, что определяемая ими суммарная квадратичная форма $F_1(u) = k'_0 \|Au\|_F^2 + k'_1 \|Lu\|_G^2$, $u \in D$, положительно определена при некоторых $k'_0, k'_1 \geq 0, k'_0 + k'_1 > 0$:

$$F_1(u) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad u \in D. \quad (6)$$

Относительно операторов A_h и L_τ , являющихся линейными приближениями к A и L , предположим, что

$$\|A_h u - Au\|_F^2 \leq h F_1(u), \quad \|L_\tau u - Lu\|_G \leq \tau F_1(u), \quad h, \tau \rightarrow 0. \quad (7)$$

Условия (7) выполнены, в частности, если $\tau = 0$, а

$$\|A_h u - Au\|_F^2 \leq h \|Lu\|_G^2 \quad (7')$$

для $u \in D_L \subset D_A$, т.е. на “гладких” элементах.

Условие I выполняется в силу линейности и замкнутости операторов A и L . Далее проверим выполнение условия II. Пусть (2) выполнено, т.е. $u_n \in D, n = 1, 2, \dots$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Au_n - \bar{f}\|_F^2 = \varphi^*, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Lu_n - \bar{g}\|_G^2 \leq g^*.$$

Тогда последовательности $\{Au_n\}, \{Lu_n\}$ ограничены, а последовательность $\{u_n\}$ ограничена в силу (6).

Следовательно, последовательности $\{Au_n\}, \{Lu_n\}, \{u_n\}$ слабо компактны. Без ограничения общности будем считать, что они слабо сходятся: $Au_n \xrightarrow{с.л.} \hat{f} \in F, Lu_n \xrightarrow{с.л.} \hat{g} \in G, u_n \xrightarrow{с.л.} u_0 \in H$. В силу слабой замкнутости операторов A и L имеем: $u_0 \in D = D_A \cap D_L$ и $Au_0 = \hat{f}, \hat{g} = Lu_0$.

Поскольку $\|Au_0 - \bar{f}\|_F^2 = \varphi^*$, т.е. $u_0 \in D^*$, и $\|Lu_0 - \bar{g}\|_G^2 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Lu_n - \bar{g}\|_G^2 \leq g^*$, то $u_0 \in \hat{D}^*$ и, следовательно, $\|Lu_0 - \bar{g}\|_G^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Lu_n - \bar{g}\|_G^2$. Вспоминая, что $Lu_n \xrightarrow{с.л.} Lu_0$, отсюда получаем $Lu_n \rightarrow Lu_0, n \rightarrow \infty$. Так как, кроме того, $Au_n \rightarrow Au_0$, то в силу (5) приходим к неравенству

$$\|u_n - u_0\|_H^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} F_1(u_n - u_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

т.е. последовательность $\{u_n\}$ также сходится. Таким образом, выполнение условия II доказано. Выполнение условий II' и IV' следует из (6). Выполнение условия III проверяется путем прямых аналитических выкладок, которые занимают много места и поэтому не приводятся.

Условие I' выполняется, если операторы A_h и L_τ также замкнуты.

4. Сходимость метода регуляризации. Пусть выполнены условия I, II, III предыдущего пункта. Следуя [11], положим

$$\tilde{\Phi}^\alpha [u] \equiv \tilde{\varphi}(u) + \alpha \tilde{g}(u), \quad u \in D, \quad (9)$$

где $\alpha > 0$ — вспомогательный параметр, называемый *параметром регуляризации*.

Лемма I. Пусть параметр $\alpha = \alpha(\delta) > 0, \delta = (\delta_0, \delta_1)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{\delta_0}{\alpha} = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \alpha \delta_1 = 0. \quad (10)$$

Тогда при достаточно малых $\underline{\delta}^0, \underline{\delta}^1 > 0$ функционал $\tilde{\Phi}^\alpha [u]$ ограничен снизу для всех $\delta_0, \delta_1 : 0 < \delta_0 < \underline{\delta}^0, 0 < \delta_1 < \underline{\delta}^1$, т.е. $\tilde{\Phi}_*^\alpha = \inf_{u \in D} \tilde{\Phi}^\alpha [u] > -\infty$.

Доказательство леммы 1 легко следует из (10) и условия III.

Определим множества $\tilde{D}_n^\alpha = \{u \in D : \tilde{\Phi}_*^\alpha \leq \tilde{\Phi}^\alpha [u] \leq \tilde{\Phi}_*^\alpha + \rho_n\}$, где величины $\rho_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$, заданы и могут, например, характеризовать меру точности решения регуляризованной задачи каким-либо методом минимизации. Установим необходимые нам свойства этих множеств.

Лемма 2. Пусть параметр $\alpha = \alpha(\delta_0, \rho_n)$ выбран таким образом, что

$$\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \alpha = \lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \frac{\delta_0}{\alpha} = \lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \frac{\rho_n}{\alpha} = 0.$$

Тогда, если $\tilde{D}_n \equiv \tilde{D}_n^\alpha$, то $\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \sup_{u \in \tilde{D}_n} |\varphi(u) - \varphi^*| = 0$, $\overline{\lim}_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \sup_{u \in \tilde{D}_n} g(u) \leq g^*$.

Действительно, для любого $\hat{u} \in \hat{D}^*$ имеем $\tilde{\Phi}^\alpha \leq \tilde{\Phi}^\alpha[\hat{u}]$. Тогда для любого $u \in \tilde{D}_n$, используя условие III, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(u) &\leq \tilde{\varphi}(\hat{u}) + \alpha \tilde{g}(\hat{u}) + \rho_n \leq \varphi(\hat{u}) + \delta_0 F(\hat{u}) + \alpha [g(\hat{u}) + \delta_1 F(\hat{u})] + \rho_n = \\ &= \varphi^* + \alpha g^* + (\delta_0 + \alpha \delta_1) F(\hat{u}) + \rho_n; \end{aligned} \tag{11}$$

следовательно,

$$-\delta_0 F(u) \leq \tilde{\varphi}(u) - \varphi(u) \leq \tilde{\varphi}(u) - \varphi^* \leq \alpha g^* + \rho_n + (\delta_0 + \alpha \delta_1) F(\hat{u}), \quad u \in \tilde{D}_n. \tag{12}$$

Далее, аналогично предыдущему, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \alpha g(u) &\leq \alpha (\tilde{g}(u) + \delta_1 F(u)) = \tilde{\Phi}^\alpha[u] - \tilde{\varphi}(u) + \alpha \delta_1 F(u) \leq \tilde{\varphi}(\hat{u}) - \tilde{\varphi}(u) + \alpha \tilde{g}(\hat{u}) + \rho_n = \\ &= \tilde{\varphi}(\hat{u}) - \varphi(\hat{u}) + \varphi(\hat{u}) - \tilde{\varphi}(u) + \alpha \delta_1 F(u) + \alpha \tilde{g}(\hat{u}) + \rho_n \leq \delta_0 F(\hat{u}) + \delta_0 F(u) + \alpha \delta_1 F(u) + \alpha \tilde{g}(\hat{u}) + \rho_n \leq \\ &\leq (\delta_0 + \alpha \delta_1) F(\hat{u}) + (\delta_0 + \alpha \delta_1) F(u) + \alpha g^* + \rho_n, \end{aligned}$$

т.е. для любого $u \in \tilde{D}_n$ функционал

$$g(u) \leq g^* + \left(\frac{\delta_0}{\alpha} + \delta_1\right) F(\hat{u}) + \left(\frac{\delta_0}{\alpha} + \delta_1\right) F(u) + \frac{\rho_n}{\alpha}. \tag{13}$$

Кроме того,

$$\varphi(u) \leq \tilde{\varphi}(u) + \delta_0 F(u) \leq \varphi^* + \alpha g^* + (\delta_0 + \alpha \delta_1) F(\hat{u}) + \delta_0 F(u) + \rho_n. \tag{14}$$

Из (13), (14) следует, что в условиях леммы

$$F(u) \leq C = \text{const}, \tag{15}$$

где C не зависит от δ , ρ_n и $u \in \tilde{D}_n$. Используя оценку (15) и соотношения (12), (13), убеждаемся в справедливости леммы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда $\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \beta_H(\tilde{D}_n, \hat{D}^*) = 0$, т.е. множество $\tilde{D}_n$ β_H -аппроксимирует множество g -минимальных решений.

Доказательство. Предположим противное: $\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \rho_H(\tilde{D}_n, \hat{D}^*) \neq 0$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ и последовательность элементов $v_k = \tilde{u}_{n_k}^{\alpha_k}$, $\alpha_k = \alpha(\delta_0^k, \rho_{n_k})$, $v_k \in \tilde{D}_{n_k}$, такие, что $v_k \notin O_\varepsilon^H[\hat{D}^*]$, $k = 1, 2, \dots$, где $O_\varepsilon^H[\hat{D}^*] = \{u \in H : \rho_H(u, \hat{D}^*) < \varepsilon\}$. Используя лемму 2, имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(v_k) - \varphi^*| = 0$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g(v_k) \leq g^*$, $v_k \in D$. В силу условия II последовательность $\{v_k\}$ слабо компактна. Без ограничения общности считаем ее слабо сходящейся: $v_k \xrightarrow{с.л.} \hat{u} \in H$. Тогда, т.к. функционал $\varphi(u)$, $u \in D$ по условию I слабо замкнут, заключаем, что $\hat{u} \in D^*$, $\varphi(\hat{u}) = \varphi^*$. С другой стороны, используя слабую полузамкнутость снизу функционала $g(u)$, получим оценку $g(\hat{u}) \leq g^*$. Поскольку $\hat{u} \in D^*$, то отсюда следует, что $\hat{u} \in \hat{D}^*$.

Итак, $v_k \xrightarrow{с.л.} \hat{u} \in \hat{D}^*$. Легко показать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} g(v_k) = g^*$, используя слабую полузамкнутость снизу функционала $g(u)$, $u \in D$. Следовательно, по условию II последовательность $\{v_k\}$ компактна в H . Для простоты считаем, что последовательность $\{v_k\}$ уже сходится. Тогда $v_k \rightarrow \hat{u} \in \hat{D}^*$ и $v_k \in O_\varepsilon^H[\hat{D}^*]$, $k \geq \underline{k}$, что противоречит выбору последовательности $\{v_k\}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. Если множество g -минимальных решений одноэлементно: $\hat{D}^* = \{\hat{u}\}$, то в условиях леммы 2 $\lim_{|\delta_0|, \rho_n \rightarrow 0} \|\tilde{u} - \hat{u}\|_H = 0$, где $\tilde{u}_n \in \tilde{D}_n$ — любой элемент множества $\tilde{D}_n$.

Замечание 2. Согласно условию леммы 2 параметр $\alpha = \alpha(\delta_0, \rho_n)$ согласуется только с величиной δ_0 , характеризующей близость функционалов $\varphi(u)$ и $\tilde{\varphi}(u)$ и величиной ρ_n , характеризующей точность минимизации регуляризованного функционала $\tilde{\Phi}^\alpha[u]$, $u \in D$. В частности, если $\delta_0 = 0$, $\rho_n \equiv 0$ (при этом предполагается, что множества $\tilde{D}_n^\alpha \neq \emptyset$), то параметр α и величину δ_1 можно устремлять к нулю независимо. Отсюда следует, что точности аппроксимации функционала $\varphi(u)$ и точности решения соответствующей вариационной задачи должно быть уделено особое внимание. Применительно к частному случаю

(5) можно сделать вывод о большей целесообразности постановки исходной задачи как задачи *вычисления* значений неограниченного оператора, нежели как задачи *решения* операторного уравнения.

Замечание 3. Может оказаться более удобным характеризовать сходимость приближенных решений $\tilde{D}_n$ при соответствующем выборе параметра $\alpha = \alpha(\delta_0, \rho_n)$ не в терминах β_H -сходимости, а в следующем смысле.

Положим $\beta(\delta, \rho_n; v) = \sup_{u \in \tilde{D}_n} \left\{ \inf_{\hat{u} \in \tilde{D}^*} |(u - \hat{u}, v)_H| + |\varphi(u) - \varphi^*| + |g(u) - g^*| \right\}$, где v — произвольный элемент из H . Тогда при выполнении условий леммы 2 имеем $\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \beta(\delta, \rho_n; v) = 0$ для любого $v \in H$.

Это предложение доказывается так же, как и теорема 3.

Теорема 4. Пусть выполнены условия I' и II' . Тогда при достаточно малых δ_0 и δ_1 существует по крайней мере один элемент, минимизирующий функционал $\tilde{\Phi}^\alpha[u]$ на множестве D .

Доказательство. В силу леммы 1 можно считать, что $\tilde{\Phi}_*^\alpha > -\infty$. Пусть $\{u_n\}$ — произвольная минимизирующая последовательность: $\tilde{\Phi}_*^\alpha \leq \tilde{\Phi}^\alpha[u_n] \leq \tilde{\Phi}_*^\alpha + \rho_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$, $\rho_n > 0$, $u_n \in D$. Следуя схеме доказательства леммы 2, устанавливаем (параметр регуляризации α считается фиксированным, а величины δ_0 и δ_1 при необходимости достаточно малыми), что

$$|\varphi(u_n)| \leq C = \text{const}, \quad 0 \leq g(u_n) \leq C = \text{const}, \quad (16)$$

где C не зависит от n .

В силу условия II' отсюда следует слабая компактность последовательности $\{u_n\}$. Поскольку

$$|\tilde{\varphi}(u_n) - \varphi(u_n)| \leq \delta_0(k_0c + k_1c + k_2), \quad |\tilde{g}(u_n) - g(u_n)| \leq \delta_1(k_0c + k_1c + k_2),$$

то справедливы неравенства

$$|\tilde{\varphi}(u_n)| \leq \hat{C} = \text{const}, \quad 0 \leq \tilde{g}(u_n) \leq \hat{C} = \text{const}. \quad (16')$$

Используя (16') и слабую компактность последовательности $\{u_n\}$, выделим подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \leq \{u_n\}$ так, чтобы $u_{n_k} \xrightarrow{c.l.} \tilde{u}^\alpha \in H$, $\tilde{\varphi}(u_{n_k}) \rightarrow \tilde{\varphi}$, $\tilde{g}(u_{n_k}) \rightarrow \tilde{g}$ при $k \rightarrow \infty$. Заметим, что $\tilde{\varphi} + \alpha\tilde{g} = \tilde{\Phi}_*^\alpha$. Используя слабую полужамкнутость снизу функционалов $\tilde{\varphi}(u)$, $\tilde{g}(u)$ (условие I'), получаем $\tilde{u}^\alpha \in D$, $\tilde{\varphi}(\tilde{u}^\alpha) \leq \tilde{\varphi}$, $\tilde{g}(\tilde{u}^\alpha) \leq \tilde{g}$, т.е. $\tilde{\Phi}^\alpha[\tilde{u}^\alpha] \leq \tilde{\Phi}_*^\alpha$.

Следовательно, элемент $\tilde{u}^\alpha$ минимизирует функционал $\tilde{\Phi}^\alpha[u]$, $u \in D$. Теорема доказана.

Замечание. Если выполнены условия I' и II' , то в определении множества $\tilde{D}_n^\alpha$ можно полагать $\rho_n \equiv 0$. При этом $\tilde{D}^\alpha \equiv \tilde{D}_n^\alpha = \{u \in D : \tilde{\Phi}^\alpha[u] = \tilde{\Phi}_*^\alpha\} \neq \emptyset$.

5. Усиленная сходимость регуляризованных решений. Как было доказано, регуляризованные решения β_H -сходятся к множеству g -минимальных решений. Далее наряду с условиями I , II , III будем предполагать выполненным и условие IV' . Оказывается, в этом случае о сходимости регуляризованных решений можно утверждать существенно большее.

Определим на множестве $D = D_A \cap D_L$ скалярное произведение

$$(u, v)_{A,L} = (Au, Av)_F + (Lu, Lv)_G, \quad u, v, \in D. \quad (17)$$

Легко убедиться, используя замкнутость операторов A и L , что множество D со скалярным произведением (17) образует (полное) гильбертово пространство, которое мы обозначим через $H_{A,L}$. Справедлива

Теорема 5. При выполнении условий леммы 2 и условия IV' имеет место соотношение

$$\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \beta_{H_{A,L}}(\tilde{D}_n, \hat{D}^*) = 0. \quad (18)$$

Доказательство. Предполагая противное, найдем последовательность $v_k \in \tilde{D}_{n_k}^{\alpha_k}$, $\alpha_k = \alpha(\delta_0^k, \rho_{n_k})$, и число $\varepsilon > 0$, такие, что $v_k \notin O_{H_{A,L}}^\varepsilon(\hat{D}^*)$. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3, устанавливаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(v_k) = \varphi^*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(v_k) = g^* \quad (19)$$

(при необходимости нужно перейти к подпоследовательности). Поскольку в рассматриваемом случае множество $\hat{D}^* = \{\hat{u}\}$, то используя условие A -выпуклости для функционала $\varphi(u)$, получаем

$$\mu_0(\|Av_k - A\hat{u}\|_F) \leq \frac{1}{2} \varphi(v_k) + \frac{1}{2} \varphi(\hat{u}) - \varphi\left(\frac{\hat{u} + v_k}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [\varphi(v_k) - \varphi^*] \rightarrow 0,$$

когда $k \rightarrow \infty$; следовательно, $Av_k \rightarrow A\hat{u}$, $k \rightarrow \infty$.

Поступая аналогично с функционалом $g(u)$ и считая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g\left(\frac{v_k + \hat{u}}{2}\right) = g^*, \tag{20}$$

устанавливаем предельное соотношение $Lv_k \rightarrow L\hat{u}$, $k \rightarrow \infty$, что завершает доказательство теоремы.

Покажем, что (20) выполняется. Действительно,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g\left(\frac{v_k + \hat{u}}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g(v_k) + \frac{1}{2} g^* = g^*. \tag{21}$$

Полагая $z_k = \frac{v_k + \hat{u}}{2}$, заметим, что $z_k \xrightarrow{с.л.} \hat{u} \in \hat{D}^*$. Выберем любую последовательность $\{z_{k_l}\} \leq \{z_k\}$ так, чтобы $\lim_{l \rightarrow \infty} g(z_{k_l}) = g_0$. Используя слабую полужамкнутость снизу функционала $g(u)$ и соотношения (21), получим $g^* = g(\hat{u}) \leq g_0 \leq g^*$. Отсюда следует (20). Утверждение доказано.

Замечание. В частном случае, когда функционалы $\varphi(u)$, $g(u)$, $u \in D$, определены согласно (5), вместо (18) имеем $\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \|\tilde{u}_n - \hat{u}\|_{A,L} = 0$, где $\tilde{u}_n \in \tilde{D}_n$ — любой элемент, а параметр $\alpha = \alpha(\delta_0, \rho_n)$ удовлетворяет необходимым условиям согласования.

Если операторы A_h и L_τ также замкнуты, то можно допустить $\rho_n \equiv 0$.

Аналогичный результат справедлив и тогда, когда в (5) операторы A и L нелинейны. При этом предполагается выполненным условие их слабой замкнутости. Используя замечание 3 к теореме 3, можно доказать, что в условиях леммы 2

$$\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \sup_{u \in \tilde{D}_n} (\|Au - A\hat{u}\|_F^2 + \|Lu - L\hat{u}\|_G^2) = 0.$$

Случай $L = L_\tau = E$, т.е. случай задачи решения нелинейного операторного уравнения $Au = \overline{f}$, был рассмотрен в [7], а случай $A = A_h = E$, соответствующий задаче вычисления значений неограниченного нелинейного оператора, — в работе [12]. Другой способ устойчивого вычисления значений неограниченного оператора, использующий понятие *сглаживающего* оператора, рассматривался в [13].

6. Обобщенный метод невязки. Метод регуляризации является одним из эффективных способов построения β_H - или $\beta_{H,A,L}$ -устойчивых алгоритмов решения задачи отыскания g -минимальных решений экстремальных задач. Далее *метод невязки*, идея применения которого к некорректным задачам восходит к работам [16, 17], а обоснование дано в ряде работ (см. [18–20]), обобщается на случай достаточно общих экстремальных задач.

Отметим, что для нелинейных операторных уравнений этот метод рассматривался в работах [7, 19], для общей задачи вычисления значений неограниченного оператора на решениях операторного уравнения (линейный случай) — в [21], а для задачи вычисления значений линейного многозначного оператора — в [22].

Переходим к формулировке метода. Используя первую часть условия II, получаем $\tilde{\varphi}(\hat{u}) \leq \varphi^* + \delta_0 F(\hat{u})$, $\hat{u} \in \hat{D}^*$. Далее предполагаем, что известна величина $\tilde{\varphi}^*$, такая, что $\varphi^* \leq \tilde{\varphi}^*$ и $\tilde{\varphi}^* \rightarrow \varphi^*$. Пусть $\tilde{N} = \{u \in D : \tilde{\varphi}(u) \leq \tilde{\varphi}^* + \delta_0 F(u)\}$. Очевидно, что $\tilde{N} \supseteq \hat{D}^*$. Множество $\tilde{N}$ можно считать множеством *формальных* решений исходной задачи. Для выделения *содержательных* решений рассмотрим задачу: найти $\tilde{u} \in \tilde{N}$, такие, что

$$\tilde{g}(\tilde{u}) = \tilde{g}^* = \inf_{u \in \tilde{N}} \tilde{g}(u). \tag{22}$$

Множество решений задачи (22) обозначим через $\tilde{D}$. Способ построения приближений к g -минимальным решениям исходной задачи на минимум функционала $\varphi(u)$, $u \in D$, в соответствии с (22) и определяет *обобщенный метод невязки*.

Как и ранее, предполагаем выполненными без оговорок условия I, II, III. Справедлива

Теорема 6. Пусть множества $\tilde{D}_n = \{u \in \tilde{N} : \tilde{g}^* \leq \tilde{g}(u) \leq \tilde{g}^* + \rho_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $\rho_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$. Тогда при $|\delta| \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ выполнено $\beta_H(\tilde{D}_n, \hat{D}^*) \rightarrow 0$, а также $\beta(\delta, \rho_n; v) \rightarrow 0$ для любого $v \in H$.

Доказательство. Очевидно, для любого $\hat{u} \in \hat{D}^*$: $\tilde{g}^* \leq \tilde{g}(\hat{u}) \leq g^* + \delta_1 F(\hat{u})$ и, следовательно, для любого $u \in \tilde{D}_n$ имеем

$$0 \leq g(u) \leq \tilde{g}(u) + \delta_1 F(u) \leq g^* + \delta_1 F(\hat{u}) + \delta_1 F(u) + \rho_n. \tag{23}$$

Далее заметим, что

$$-\delta_0 F(u) \leq \tilde{\varphi}(u) - \varphi(u) \leq \tilde{\varphi}(u) - \varphi^* \leq \hat{\varphi}^* - \varphi^* + \delta_0 F(u) \quad (24)$$

и

$$\varphi(u) \leq \tilde{\varphi}(u) + \delta_0 F(u) \leq \hat{\varphi}^* + 2\delta_0 F(u), \quad (25)$$

причем оценки (24), (25) справедливы для любого $u \in \tilde{D}_n$.

Из (23), (25) следует, что при достаточно малых δ_0, δ_1 значения $F(u) \leq C = \text{const}$, $u \in \tilde{D}_n$, где C не зависит от δ_0, δ_1 и ρ_n , когда они достаточно малы. Тогда из (23), (24) следует, что

$$\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \sup_{u \in \tilde{D}_n} |\varphi(u) - \varphi^*| = 0, \quad \overline{\lim}_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \sup_{u \in \tilde{D}_n} g(u) \leq g^*, \quad (26)$$

т.е. справедливы соотношения, выведенные в лемме 2. Далее следует использовать технику доказательства теоремы 3. Теорема доказана.

Аналогично теореме 4 доказывается следующая

Теорема 7. *Если выполнены условия I', II' и III, то множество решений $\tilde{D}$ задачи (22) не пусто и в теореме 6 можно полагать $\rho_n \equiv 0$.*

Доказательство этой теоремы следует схеме доказательства теоремы 4.

Как и в п. 5, можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *При выполнении условия IV' имеет место усиленная сходимость, а именно:*

$$\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \beta_{H, L}(\tilde{D}_n, \hat{D}^*) = 0.$$

Заметим, что здесь множество $\hat{D}^* = \{\hat{u}\}$, т.е. это множество состоит из единственного элемента. В случае, когда $\tilde{g}(u) \equiv g(u) = \|u\|_H^2$ и $\delta_0 = 0$, обобщенный метод невязки рассматривался также в работе [26].

7. Обобщенный метод квазирешений. Легко видеть, что для всякого $\hat{u} \in \hat{D}^*$ имеем

$$\tilde{g}(\hat{u}) \leq g^* + \delta_1 F(\hat{u}).$$

Далее будем предполагать, что известна величина $\hat{g}^*$, такая, что $\hat{g}^* \geq g^*$ и $\lim_{|\delta| \rightarrow 0} \hat{g}^* = g^*$. Определим множества $\tilde{K} = \{u \in D : \tilde{g}(u) \leq \hat{g}^* + \delta_1 F(u)\}$. Очевидно, что $\tilde{K} \supseteq \hat{D}^*$ по условию.

Следуя методу, разработанному В. К. Ивановым в ряде работ, из которых отметим только [23], рассмотрим задачу: найти $\tilde{u} \in \tilde{K}$, такие, что

$$\inf_{u \in \tilde{K}} \tilde{\varphi}(u) = \tilde{\varphi}(\tilde{u}). \quad (27)$$

Множество решений этой задачи, если оно не пусто, снова обозначим через $\tilde{D}$. Тогда действие приближенного фильтрационного оператора $\tilde{F}$ можно записать так: $\tilde{F}(\tilde{K}) = \tilde{D}$, т.е. как выбор из некоторого априорно заданного множества элементов, являющихся формальными решениями исходной задачи.

Мы будем предполагать, как обычно, что выполняются условия I, II, III и, кроме того, что

$$\tilde{\varphi}^* = \inf_{u \in \tilde{K}} \tilde{\varphi}(u) > -\infty.$$

Справедлива

Теорема 9. *Пусть $\tilde{D}_n = \{u \in \tilde{K} : \tilde{\varphi}^* \leq \tilde{\varphi}(u) \leq \tilde{\varphi}^* + \rho_n\}$, где $\rho_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$. Тогда при $|\delta| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ имеем $\beta_H(\tilde{D}_n, \hat{D}^*) \rightarrow 0$. Кроме того, $\beta(\delta, \rho_n; v) \rightarrow 0$ для любого элемента $v \in H$.*

Доказательство. Очевидно, для любого $\hat{u} \in \hat{D}^*$

$$\tilde{\varphi}^* \leq \tilde{\varphi}(\hat{u}) \leq \varphi^* + \delta_0 F(\hat{u});$$

следовательно, для любого $u \in \tilde{D}_n$ получим

$$-\delta_0 F(u) \leq \tilde{\varphi}(u) - \varphi(u) \leq \tilde{\varphi}^* - \varphi^* \leq \delta_0 F(\hat{u}) + \rho_n,$$

$$\varphi(u) \leq \tilde{\varphi}(u) + \delta_0 F(u) \leq \tilde{\varphi}^* + \rho_n + \delta_0 F(u) \leq \varphi^* + \delta_0 (F(\hat{u}) + F(u)) + \rho_n$$

и

$$0 \leq g(u) \leq \tilde{g}(u) + \delta_1 F(u) \leq \hat{g}^* + 2\delta_1 F(u) = g^* + (\hat{g}^* - g^*) + 2\delta_1 F(u).$$

Из этих неравенств снова приходим к соотношениям, выведенным в лемме 2. Далее необходимо повторить основные моменты доказательства теоремы 3. Теорема доказана.

Если предположить выполненным условие IV' , то аналогично предыдущему можно доказать усиленную сходимость обобщенного метода квазирешений.

8. Заключительные замечания. Когда функционалы $\varphi(u)$, $g(u)$, $u \in D$, задаются в виде (5), а операторы A и L линейны и $h = \tau = 0$, методы регуляризации, невязки и квазирешений были изучены в [21]. Там же указаны условия единственности приближенных решений и даны оценки погрешностей методов в случае, когда операторы A и L заданы точно. Полученные здесь результаты в случае (5) можно усилить, отказавшись от гильбертовости пространств H , F и G . В самом деле, при доказательстве теорем сходимости существенную роль играло условие II. Его выполнение зависит как от свойств операторов A и L , так и от топологических свойств пространств H , F и G . Если считать, как и раньше, операторы A и L линейными и замкнутыми и удовлетворяющими условию (6), то условие II выполняется, например, тогда, когда H рефлексивно, F банахово, а G — типа Ефимова–Стечкина [24, 25].

Учитывая это замечание, можно получить некоторые результаты, вытекающие из работ [12, 22].

Если пространства H , F и G лишь рефлексивны, то можно показать, что имеет место *слабая β -сходимость* приближенных решений в следующем смысле: для любых $v^* \in H^*$, $f^* \in F^*$, $g^* \in G^*$ имеем

$$\lim_{|\delta|, \rho_n \rightarrow 0} \sup_{u \in \tilde{D}_n} \inf_{\hat{u} \in \tilde{D}^*} \left\{ |v^*(u - \hat{u})| + |f^*(Au - A\hat{u})| + |g^*(Lu - L\hat{u})| \right\} = 0.$$

Заметим, что в (5) значения $A\hat{u}$ и $L\hat{u}$ определены *однозначно* даже в нелинейном случае, если пространства F и G удовлетворяют так называемому E -свойству [22].

Теоремы сходимости 3, 6, 9 остаются справедливыми и тогда, когда $\varphi(u)$ и $g(u)$ не имеют вида (5), а пространство H считается полным метрическим пространством. Под “слабой” сходимостью тогда можно понимать сходимость в любой топологии, которая не сильнее топологии, определяемой метрикой пространства.

Заметим, что условия I, II, III выполняются и при основных предположениях работ [30–32]. При этом слабая топология и топология исходного пространства отождествляются. Отметим также работы [33–37].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашиш Е.А. К теории обобщенных динамических систем // Ученые записки МГУ. Математика. 1949. 2, вып. 135. 110–134.
2. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. АН СССР. 1965. 163, № 3. 591–594.
3. Морозов В.А. О псевдорешениях // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1969. 9, № 6. 1387–1391.
4. Морозов В.А. О регуляризации некоторых классов экстремальных задач // Вычислит. методы и программирование. Вып. XII. М.: Изд-во МГУ, 1969. 24–37.
5. Бакушинский А.Б. Регулярирующие алгоритмы для решения некорректных экстремальных задач // Методы управления большими системами. 1. Иркутск, 1970. 223–235.
6. Морозов В.А. Методы решения неустойчивых задач. М.: ВЦ МГУ, 1967.
7. Морозов В.А. О решении методом регуляризации некорректно поставленных задач с нелинейными неограниченными операторами // Дифф. уравнения. 1970. YI, № 8. 1453–1458.
8. Поляк Б.Т. Теоремы существования и сходимости минимизирующих последовательностей для задачи на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1966. 166, № 2. 287–290.
9. Морозов В.А. Об одном устойчивом методе вычисления значений неограниченных операторов // Докл. АН СССР. 1969. 185, № 2. 267–270.
10. Морозов В.А., Кирсанова Н.Н. Об одном обобщении метода регуляризации // Вычислит. методы и программирование. Вып. XIV. М.: Изд-во МГУ, 1970. 17–23.
11. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. 160, № 6. 1089–1094.
12. Васин В.В. Некорректные задачи в B -пространствах и их приближенное решение вариационными методами // Автореферат кандидатской диссертации. Свердловск, 1970.
13. Морозов В.А. Об устойчивости задачи определения параметров // Вычислительные методы и программирование. Вып. XIV. М.: Изд-во МГУ, 1970. 63–66.
14. Турчин В.Ф. Решение уравнения Фредгольма I-го рода в статистическом ансамбле гладких функций // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1967. 7, № 6. 931–937.

15. Турчин В.Ф., Нозик В.З. Статистическая регуляризация решения некорректных задач // Физика атмосферы и океана. 1969. **У**, № 1. 29–37.
16. Канторович Л.В. О новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. матем. журнал. 1962. **III**, № 5. 701–709.
17. Phillips D. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind // J. Assoc. Comput. Machinery. 1962. **9**, N 1. 84–97.
18. Морозов В.А. О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации // Докл. АН СССР. 1967. **175**, № 6. 1225–1228.
19. Иванов В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1966. **6**, № 6. 1089–1093.
20. Морозов В.А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1968. **8**, № 2. 295–309.
21. Морозов В.А. Об оценках погрешности решения некорректно поставленных задач с линейными неограниченными операторами // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1970. **10**, № 5. 1081–1091.
22. Иванов В.К. Линейные неустойчивые задачи с многозначными операторами // Сиб. матем. журнал. 1970. **XI**, № 5. 1009–1016.
23. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Матем. сб. 1963. **61**, вып. 2. 211–223.
24. Ефимов Н.В., Стечкин С.Б. Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1961. **140**, № 3. 522–524.
25. Singer J. Some remarks on approximative compactness // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1964. **9**, N 2. 167–177.
26. Шолохович В.Ф. Неустойчивые экстремальные задачи и геометрические свойства единичной сферы в пространстве Банаха // Изв. ВУЗов. Математика. 1970 (аннотация статьи).
27. Морозов В.А. О восстановлении функций методом регуляризации // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1967. **7**, № 4. 874–881.
28. Тихонов А.Н. О методах регуляризации задач оптимального управления // Докл. АН СССР. 1965. **162**, № 4. 763–765.
29. Морозов В.А. О псевдорешениях // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1969. **9**, № 6. 1387–1391.
30. Тихонов А.Н. О нелинейных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1965. **161**, № 5. 1023–1026.
31. Лисковец О.А. Регуляризация некорректных задач и связь с методом квазирешений // Дифф. уравнения. 1969. **У**, № 10. 1836–1844.
32. Лисковец О.А. Регуляризация уравнений с замкнутым оператором // Дифф. уравнения. 1970. **УI**, № 7. 1273–1278.
33. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
34. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
35. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
36. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
37. Морозов В.А., Гребенников А.И. Методы решения некорректно поставленных задач. Алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1993.
38. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
39. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: Изд-во МГУ, 1987.

Поступила в редакцию
19.11.2003