



doi 10.26089/NumMet.v23r101

УДК 517.968;
517.444;
519.642;
519.642.3

Деформация томограмм для задач криволинейной томографии

В. В. Пикалов

Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-9362-6966, e-mail: pickalov@itam.nsc.ru

Аннотация: Ранее в наших работах было предложено в задачах веерной томографии применять методы перевода пучка веерных лучей в набор параллельных лучей. Это достигалось специальной деформацией искомой томограммы на этапе обратного проецирования измеренных и отфильтрованных проекций с последующей операцией обратной деформации. Деформация томограммы для каждого направления наблюдения будет своя, но взаимно однозначный характер этих деформаций позволяет вернуться к исходной системе координат. В данной работе этот метод обобщен на семейство плоских криволинейных траекторий, позволяющих осуществлять взаимно однозначные переходы к параллельным лучам. Для каждой обратной проекции изображение оказывается промодулированным известной функцией, следующей из уравнения дифференциала пути заданной траектории. Результаты обобщения широко распространенного в методах двумерной томографии алгоритма FBP демонстрируются на примерах параболической, синусоидальной и веерной траекторий лучей.

Ключевые слова: обратные задачи, преобразование Радона, веерная томография, криволинейная томография, математическое моделирование.

Благодарности: Работа частично выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2021 годы (проект 121030500162–7), а также гранта Российского фонда фундаментальных исследований (№ 19–51–12008 ННИО_а).

Для цитирования: Пикалов В.В. Деформация томограмм для задач криволинейной томографии // Вычислительные методы и программирование. 2022. **23**, № 1. 1–12. doi 10.26089/NumMet.v23r101.

Deformation of tomograms for curvilinear tomography problems

Valery V. Pickalov

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

ORCID: 0000-0001-9362-6966, e-mail: pickalov@itam.nsc.ru

Abstract: Earlier in our works, it was proposed to apply the method of a fan-beam mapping into a set of parallel lines in the problems of fan-beam tomography. This was achieved by special deformation of the reconstructed tomogram at the stage of back projection of the measured and filtered projections, followed by the operation of reverse deformation. The deformation of the tomogram for each direction of observation will be different, but the one-to-one nature of these deformations allows you to return to



the original coordinate system. In this paper, the method is generalized to a family of plane curvilinear trajectories that allow one-to-one transitions to parallel rays. For each back projection, the image is modulated by a known function following from the path differential of the given trajectory. The results of generalization of the FBP algorithm widely used in two-dimensional tomography methods are demonstrated by examples of parabolic, sinusoidal and fan-beam ray trajectories.

Keywords: inverse problems, Radon transform, fan-beam tomography, curvilinear tomography, numerical simulation.

Acknowledgements: This work was partially supported by the Program of Basic Scientific Research of State Academies of Sciences for 2013–2021 (project 121030500162–7), as well as a grant from the Russian Foundation for Basic Research (N 19–51–12008 ННИО_а).

For citation: V. V. Pickalov, “Deformation of tomograms for curvilinear tomography problems,” *Numerical Methods and Programming*. 23 (1), 1–12 (2022). doi 10.26089/NumMet.v23r101.

1. Введение. Применение методов современной математической обработки экспериментов в физических исследованиях активно увеличивается как благодаря развитию новых областей математики, так и созданию более эффективных вычислительных методов и алгоритмов. Примером успешного развития приложений в прикладной математике является быстрое распространение методов решения задач вычислительной томографии [1, 2]. Наиболее развиты такие методы в тех задачах, где удается регистрировать проходящее сквозь объект излучение по прямолинейным траекториям, когда эффекты рефракции или дифракции пренебрежимо малы.

Двумерное интегральное преобразование Радона (RT — Radon transform) позволяет по набору интегралов от неизвестной функции по прямым линиям на плоскости определять неизвестную функцию, вписанную в единичный круг. В практических приложениях это преобразование нашло широкое применение в физической томографии, рентгеновской томографии в медицине, а также в широком круге задач обработки изображений [3]. Преобразование Радона по прямым линиям дает возможность автоматически выделять на фотографиях прямые линии (с помощью преобразования Хафа, основанного на RT [3]), а необходимость выделения структур, отличных от прямолинейных, ставит задачу обобщения RT на криволинейные траектории.

В последние годы все большее внимание уделяется конкретным криволинейным лучевым траекториям — параболам, гиперболам, дугам окружности [4–11]. В этих работах часто применяются различные методы параметризации кривых, а в некоторых случаях требуется какая-либо особая симметрия у искомого изображения, например вертикальная, как это используется для эллиптического и параболического преобразований Радона [8, 9]. Новая область томографии по комптоновскому рассеянию также приводит к задачам с использованием дуг окружностей [12].

В данной работе предлагается метод приближенной реконструкции изображения по криволинейным интегралам, когда выбран класс кривых, взаимно однозначно связанных с прямыми линиями. Геометрические преобразования таких кривых в прямые, сопровождаемые соответствующим преобразованием (“деформацией”) искомой функции, позволяют строить алгоритмы приближенных решений, аналогичных таковым в обычной прямолинейной томографии. Основное внимание уделяется классическому алгоритму фильтрации и обратной проекции FBP (Filtered Back-Projection).

2. Теория. Исследуется алгоритм перевода криволинейных траекторий в прямолинейные по методу, созданному ранее для алгоритма FBP в веерной томографии [13–15]. Этот алгоритм веерной томографии используется далее как тестовый, на котором можно проверять все этапы реализации предлагаемого алгоритма в постановке криволинейной томографии.

Как известно, формула инверсии Радона в наиболее распространенной в приложениях форме выглядит так [16]:

$$g(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\beta(s)}{(s - s_0)^2} ds. \quad (1)$$

Здесь $g(x, y)$ — искомая томограмма, обычно ограниченная единичным кругом, $f_\beta(s)$ — измеренные проекции (синограмма) от $g(x, y)$ для разных углов β . Эта же формула для веерной геометрии сбора данных

переходит в похожее выражение [16]:

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{Q^2(\beta)} \int_{-S_m}^{S_m} \frac{f_\beta^d(s)}{(s-s_0)^2} ds. \quad (2)$$

Здесь s_0 — проекция произвольной точки $B(x, y)$ на ось S (рис. 1) для веерной системы, S_m — координата пересечения касательного к единичной окружности луча с осью S , параметры Q и s_0 задаются формулами:

$$Q(\beta) = 1 + \frac{r}{D} \cos(\beta - \varphi), \quad s_0 = \frac{r}{Q} \sin(\beta - \varphi), \quad \varphi = \beta + \gamma, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (3)$$

В этих формулах (r, φ) — координаты точки $B(x, y)$ в полярной системе координат, D — расстояние до излучателя F от начала координат O (рис. 1). Используемые в формуле инверсии Радона проекции $f_\beta(s)$ модифицируются умножением на косинус угла падения луча на детектор $\gamma = \varphi - \beta$: $f_\beta^d(s) = f_\beta(s) \cdot \cos \gamma$.

Данные с реального детектора **Det** для удобства рассмотрения можно перенести в начало координат на параллельную детектору ось S . Эта ось и перпендикулярная к ней ось P представляют собой новую систему декартовых координат, в которой далее будет удобнее рассматривать модифицированный алгоритм фильтрации и обратной проекции. Для параллельной геометрии в формуле (3) все углы $\gamma = 0^\circ$ и параметр $Q = 1$, поскольку в этом случае расстояние D стремится к бесконечности, а расстояние t луча FB до начала координат совпадает с ординатой пересечения этого луча с осью S , а именно — с s_0 . Точка A лежит на детекторе и определяет центральный луч пучка веерных лучей. Преобразование веерного пучка в набор параллельных прямых можно геометрически представить как такую деформацию функции $g(x, y)$, при которой каждый луч веера (например, FB) вращается вокруг точки s_0 на оси S так, что становится параллельным лучу FOA , а соответствующая этому лучу точка s_0 на оси S остается неподвижной.

Криволинейные траектории лучей, рассмотренные в данной работе, представляют собой три вида семейств: синусоиды, параболы и, в качестве контрольного примера с известным аналитическим решением (2), — пучок веерных лучей. На рис. 2 все лучи описываются уравнением $y = s + \psi(x)$, в котором для волн (рис. 2 а) функция $\psi(x) = a \cdot \cos(2\pi T^{-1}x)$; для параболы (рис. 2 б) семейство кривых описано функцией $\psi(x) = a \cdot (x - x_0)^2$, где x_0 задает положение вершины параболы; для веера функция $\psi(x) = kx$, $k = s/D = \text{tg } \gamma$ (рис. 2 с). На рис. 2 с радиус круга R , вне которого выполнено условие $g(x, y) = 0$, равен $R = 0.5$.

Далее система регистрации проекций считается неподвижной, а вращается искомая функция $g_\beta(x, y)$, где β — угол поворота по часовой стрелке, что соответствует повороту привязанной к объекту системы координат (p, s) против часовой стрелки на этот же угол β . Для каждого фиксированного угла β преобразование Радона в горизонтальном направлении $s = \text{const}$ представляется в виде криволинейного интеграла:

$$f_\beta(s) = \int g_\beta(x, y = s + \psi(x)) dL = \int q_\beta(x, y) dx, \quad (4)$$

$$dL = w(x) dx, \quad w(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2}.$$

В формуле (4) через функцию $q_\beta(x, y)$ обозначается произведение деформированной томограммы $g_\beta(x, y)$ на часть дифференциала пути w , разную для каждого направления β . Отметим, что для каждой повернутой версии томограммы $g_\beta(x, y)$ координата x совпадает с координатой p в системе (p, s) , привязанной к детектору.

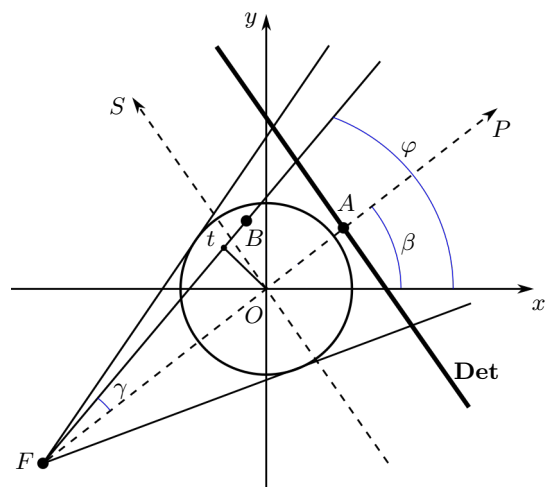


Рис. 1. Геометрическая схема для задачи веерной томографии, в которой источник F излучает лучи, регистрируемые детектором **Det**

Fig. 1. Fan-beam imaging geometry. A radiation source F generates fan-beams recorded by the detector **Det**

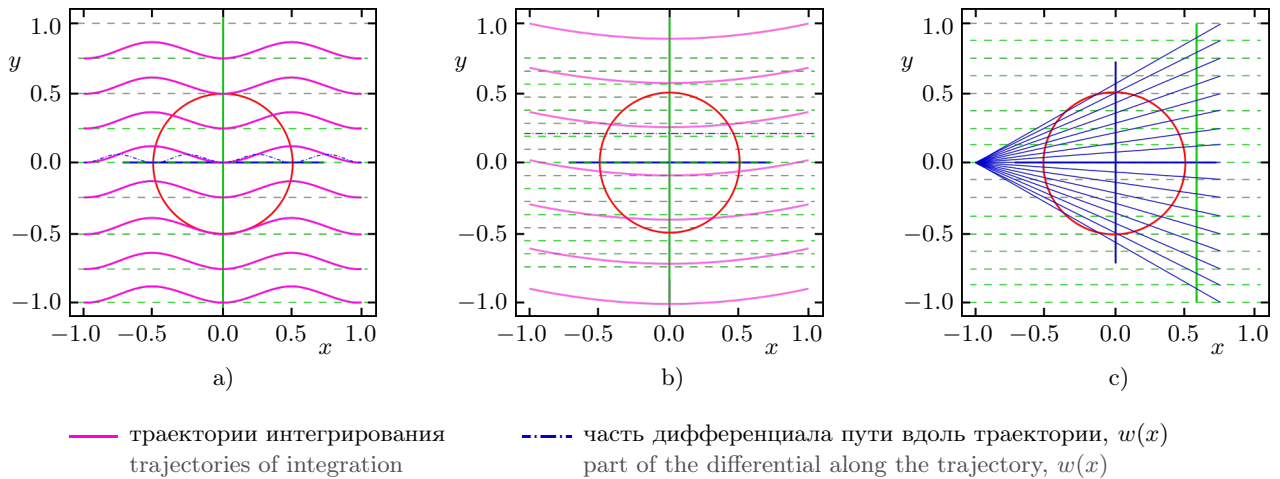


Рис. 2. Примеры семейств кривых, для которых существует взаимно однозначный переход к параллельным горизонтальным прямым. Виды семейств: а) волны (амплитуда $a = 0.1$, период $T = 1$); б) параболы ($a = 0.2, x_0 = 0$); в) веер ($D = 2R$)

Fig. 2. Examples of curves families for which there is a one-to-one mapping to parallel horizontal lines. Types of families: a) waves (amplitude $a = 0.1$, period $T = 1$); б) parabolas ($a = 0.2, x_0 = 0$); в) fan-beam ($D = 2R$)

Приведем для каждого из рассматриваемых семейств соответствующие формулы для переменной части дифференциала пути $w(x)$:

$$\begin{aligned}
 \text{для волны} \quad w(x) &= \sqrt{1 + [2\pi a T^{-1} \sin(2\pi T^{-1} x)]^2}; \\
 \text{для параболы} \quad w(x) &= \sqrt{1 + 4a^2(x - x_0)^2}; \\
 \text{для веера} \quad w(x) &= \sqrt{1 + k^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} = \frac{1}{\cos \gamma}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{D + x} = \frac{s}{D}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

По аналогии с переходом от “параллельной” инверсии Радона (1) к ее веерной форме (2), предложенной в работах [13–15], далее предлагается единый способ решения задачи для упомянутых выше семейств криволинейных траекторий луча.

Общий геометрический подход заключается в предварительном переходе от искомого изображения $g(x, y)$ к его деформированной версии $g^d(p, s)$, в которой криволинейные лучи (сплошные линии на рис. 2 а) переходят вертикальным переносом в параллельные лучи $s = \operatorname{const}$ (пунктирные линии). Горизонтальная прямая линия, к которой привязывается кривая траектория, проводится через точку пересечения данной кривой с осью $p = 0$. В этом случае, в прямой задаче, для вычисления интегралов по кривым достаточно вычислить их по параллельным горизонтальным прямым от деформированного изображения и учесть вклад в интеграл дифференциала пути dL весовой функцией $w(x)$.

3. Вычислительный эксперимент. Таким образом, модифицированный алгоритм фильтрации и обратной проекции FBP (curvilinear-FBP или c-FBP) состоит из следующих шагов.

1. Фильтрация деформированных проекций $f_\beta(s)$ обычным в томографии фильтром (например, Шепшала-Логана [16]).
2. На этапе обратного проецирования выполняется деление значений фильтрованной проекции вдоль горизонтальной линии на вес $w(p)$ в точках этой прямой (p_i, s) .
3. К обновленным двумерным обратным проекциям далее применяется обратная деформация.
4. Полученное для данного угла изображение поворачивается назад на тот же угол β и переводится интерполяцией с сетки (p, s) на сетку реконструируемой томограммы (x, y) .
5. После перебора шагов 1–4 для всех проекций выполняется суммирование по углам для вычисления внешнего интеграла в формуле (1), что дает искомую томограмму $g(x, y)$.

Отметим, что весовая функция $Q^2(\beta)$ в формуле инверсии для веера (2) как раз осуществляет обратную деформацию фильтрованной двумерной полосы, которая в данном алгоритме осуществляется билинейной интерполяцией с сетки (p, s) . Тем самым геометрическая интерпретация алгоритма реконструкции в веерной томографии вполне подтверждается аналитической формулой обратного преобразования Радона для веерных лучей. Также подчеркнем, что предлагаемый алгоритм с-FBP на этапе фильтрации опирается на известную теорему о центральном сечении фурье-образа искомой томограммы [16], верной в данном случае для функции $q_\beta(x, y)$. Это приводит к возможности фильтровать проекции $f_\beta(s)$ приближениями к инверсии модуля частоты $|\nu|$ (также фильтром Шеппа-Логана). Однако произведение $g_\beta(x, y) \cdot w(x)$ приводит к свертке в частотной, а не в пространственной области. Видимо, кроме главной центральной частоты томограммы ($|\nu_x| = 0$) в проекцию проникают и дополнительные частоты от такой свертки. Поэтому предлагаемый алгоритм следует считать приближенным для криволинейных траекторий лучей за исключением веерной схемы наблюдений, в которой вес $w(x)$ не зависит от x , а зависимость от s учитывается в инверсии Радона (2) путем умножения проекции на множитель $\cos \gamma$. Этот множитель постоянен вдоль каждого луча из веерного пучка.

Далее приводятся некоторые результаты численного моделирования, иллюстрирующие качество реконструкции алгоритмом с-FBP томограмм по их криволинейным проекциям с траекториями лучей из формул (5). В Приложении А даны формулы для использованных элементарных математических моделей (фантомов) и их параллельных проекций, а в Приложении Б приведены параметры для трех составных фантомов, являющихся суммой компонент из этих элементарных фантомов.

На модели ТМ-247 (рис. 3) показан вид деформаций, возникающих для криволинейной томографии на гладких моделях (набор эллиптических параболоидов), обычно присущих задачам томографической диагностики газовых или плазменных потоков. Здесь представлена деформированная синограмма по синусоидам, по оси абсцисс отложены значения углов наблюдения от 0° до 360° (рис. 3 а). По оси ординат — значения проекций по сетке на детекторе S . На рис. 3 b–d — точная модельная томограмма (b), ее деформация по вертикали (c), реконструкция алгоритмом с-FBP (d), центральные сечения по осям для

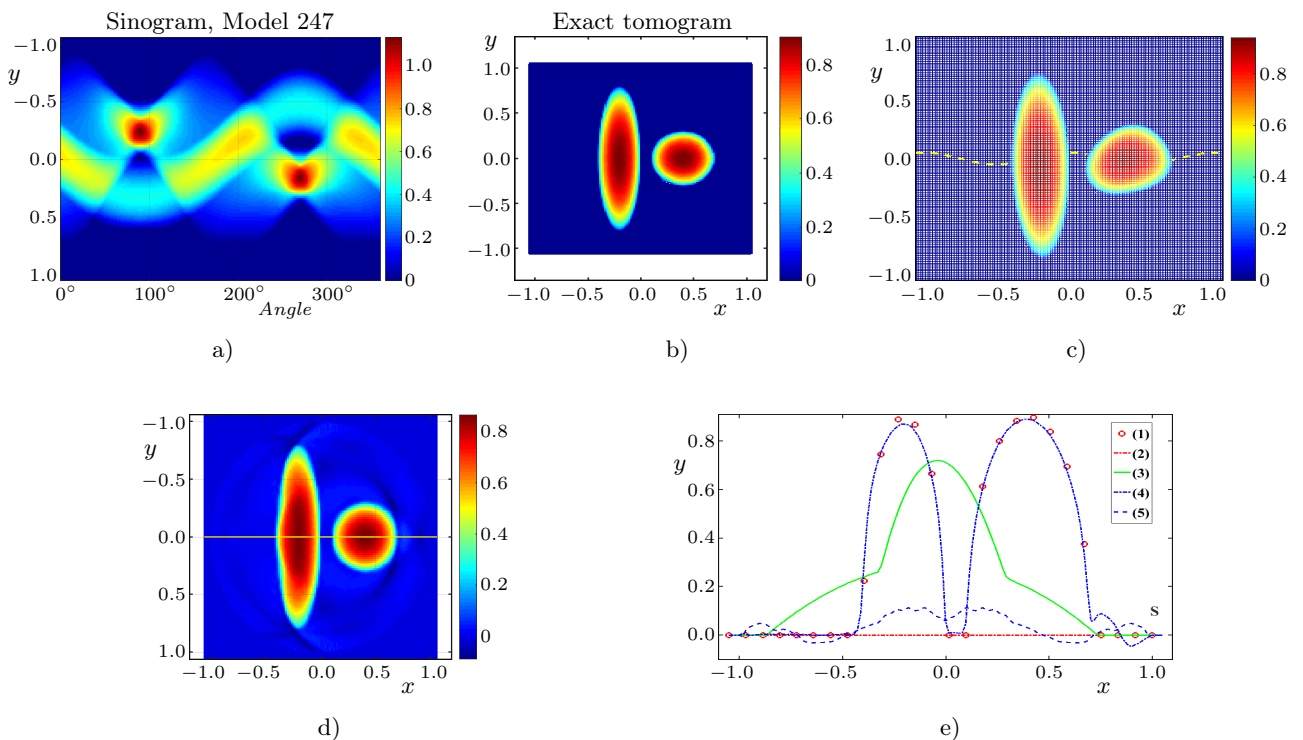


Рис. 3. Реконструкция модели ТМ-247 новым методом криволинейной томографии с-FBP по траекториям в виде синусоид. Параметры кривой: $a = 0.05$, $T = 1.0$; ошибка реконструкции $RMS = 5.4\%$

Fig. 3. Reconstruction of the TM-247 model by a new algorithm c-FBP for curvilinear tomography along sine trajectories. Curve parameters: $a = 0.05$, $T = 1.0$; error norm $RMS = 5.4\%$

точной (1), (2) и восстановленной (4), (5) томограмм (е). На последнем рисунке линии (1) и (4) — это центральное горизонтальное сечение, а линии (2) и (5) — центральное вертикальное сечение; (3) — первая горизонтальная проекция от деформированной томограммы. Размерность томограммы 129×129 , число проекций $K = 181$, число детекторов на каждой проекции $N = 129$, ошибка реконструкции $RMS = 5.4\%$.

На рис. 4 дана иллюстрация реконструкции сложной модели с разрывами (ТМ-257). Показаны: синограмма модели (а), точная томограмма (б), ее волновая деформация (с) и результат работы алгоритма с-FBP (д) с фильтром Шеппа-Логана и обратным проецированием по криволинейным траекториям с использованием обратной деформации. Параметры волны и системы детектирования такие же, как и на рис. 3.

Видно, что для криволинейной волновой томографии появляются характерные волновые структуры в полярной системе координат — по радиусу и по углу (рис. 4д). Данные артефакты возникают на стадии обратного проецирования, при переходе от прямолинейных проекций к деформированным проекциям. Здесь интересен и результат фурье-преобразования первой (горизонтальной, $\beta = 0$) проекции на рис. 4е (сплошная линия). Он совпадает с центральным сечением двумерного фурье-образа деформированной томограммы, т.е. функции $q_\beta(x, y)$ из формулы (4), что показано кружочками на рисунке. Этот факт подтверждает теорему о центральном сечении для деформированной томограммы.

На рис. 5 представлены результаты ошибок реконструкции в постановке малого числа ракурсов на примере модели ТМ-270 — многокомпонентной гладкой модели из 7 гауссиан. Здесь показана сама модель (рис. 5 а), ее реконструкция (рис. 5 б) для 25 проекций в полном диапазоне угла обзора $0^\circ\text{--}360^\circ$ с ошибкой $RMS = 10.7\%$. Также показаны две кривые зависимости погрешности реконструкции томограмм ($RMS, \%$) от числа использованных проекций (рис. 5 с). Это задача малоракурсной параболической томографии; данные кривые позволяют сравнить уровень погрешностей для двух томографических постановок задач малоракурсной томографии — для классической задачи с параллельными прямыми траекториями (кривая 1, алгоритм FBP и фильтр SL), и для новой задачи — малоракурсной томографии на параболических

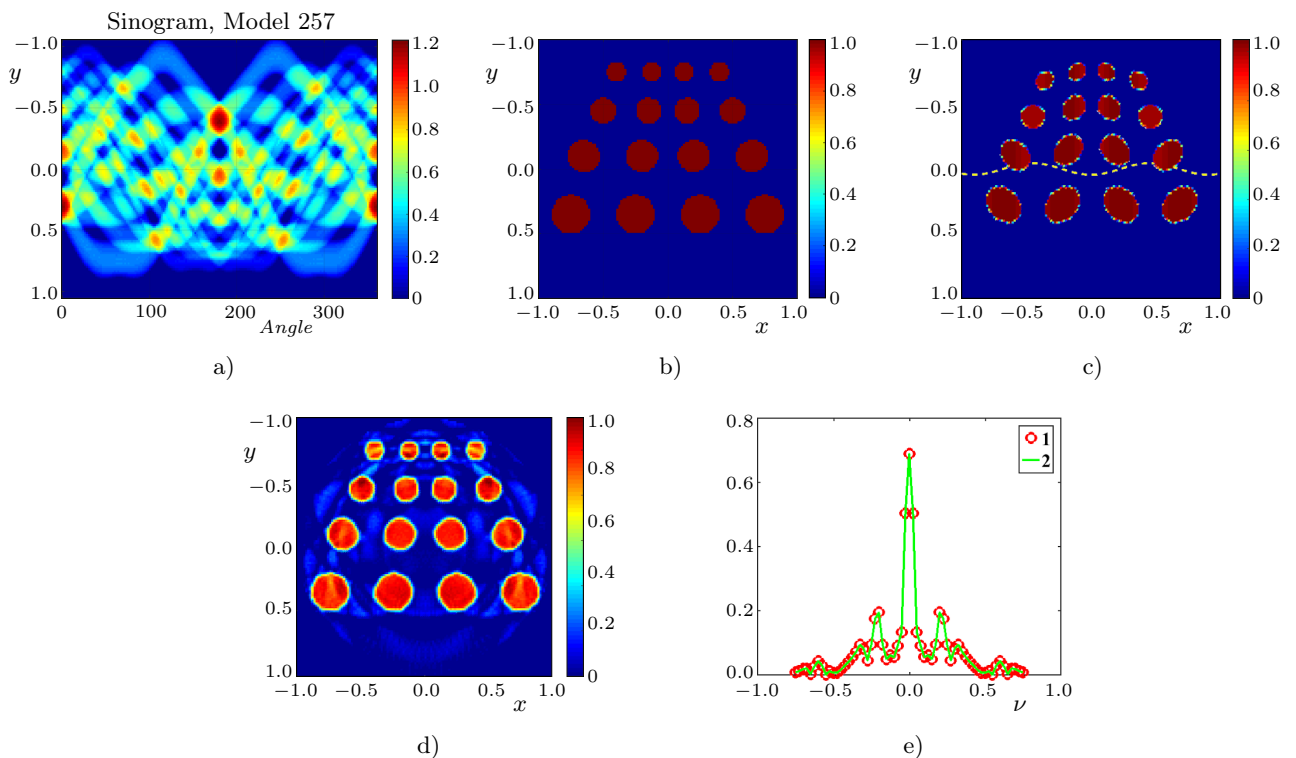


Рис. 4. Реконструкция разрывной модели ТМ-257 по траекториям в виде синусоид, алгоритмом с-FBP, $K = 25$.
 Параметры кривой: $a = 0.05$, $T = 1.0$; $RMS = 12.5\%$

Fig. 4. Reconstruction of the discontinuous model TM-257 along wave trajectories, using the c-FBP algorithm, $K = 25$.
 Curve parameters: $a = 0.05$, $T = 1.0$; error $RMS = 12.5\%$

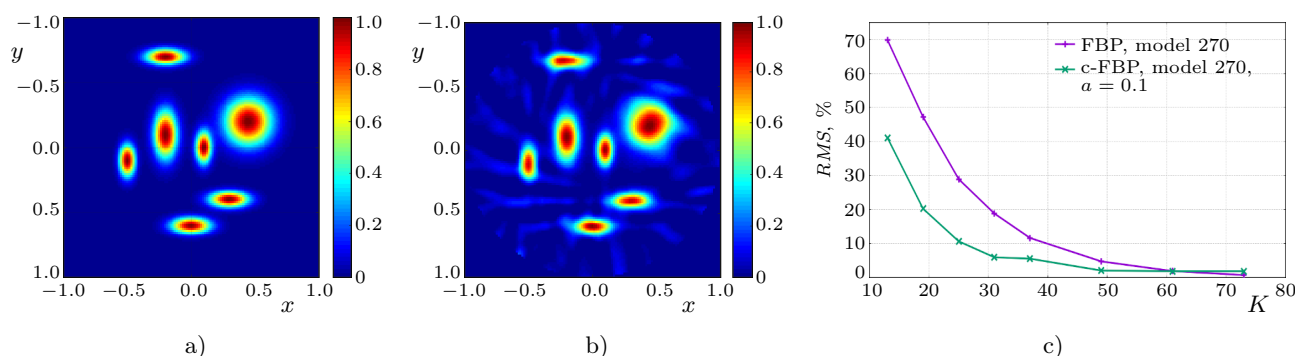


Рис. 5. Модель ТМ-270: а) семь гауссиан, образующих модель; б) реконструкция этой модели в варианте малоракурсной параболической томографии, число проекций в диапазоне 0° – 360° $K = 25$, $RMS = 10.7\%$; в) зависимость погрешности реконструкции томограмм RMS алгоритмами FBP и с-FBP от числа использованных проекций K при равномерном шаге по углу

Fig. 5. Model TM-270: a) seven Gaussians forming the model; б) reconstruction of this model in the version of a few-view parabolic tomography, the number of projections in the range 0° – 360° is $K = 25$, $RMS = 10.7\%$; в) the dependence of the tomograms reconstruction errors RMS by the FBP and c-FBP algorithms on the number K of projections used with a uniform angle step

траекториях (кривая 2, алгоритм с-FBP). Видно, что весь набор билинейных интерполяций на этапах обратного проецирования и обратной деформации в алгоритме с-FBP не ухудшает погрешностей в методе FBP, а даже существенно улучшает их по сравнению с работой этих алгоритмов в среде без рефракции вообще. И только для числа проекций $K > 61$ прямолинейная томография становится для этой модели точнее, чем криволинейная.

Отметим, что для малого числа проекций, характерных для задач физической и промышленной томографии, следует продолжить развитие данного метода деформации томограмм с применением итерационного подхода для уменьшения влияния шумов в измеренных проекциях, а также сопутствующих артефактов.

В задачах обработки изображений, выделения разрывов, получения изображений не всего объекта, а лишь выбранной интересной его части (ROI-томографии) нашла применение так называемая “локальная томография” или “лямбда томография” [17–22]. В методах локальной томографии, в отличие от глобальной, описываемой обратным преобразованием Радона, для восстановления изображения в каждой отдельной точке необходимо знание интегралов только по прямым, которые проходят через данную точку. Такое изображение можно получить, например, если в операторе обратного проецирования отменить процедуру фильтрации (внутренний интеграл в (1)), а вместо фильтрации использовать непосредственно обратное проецирование проекций. Полученное изображение иногда называют суммарным [17], и оно отличается от истинной томограммы сверткой томограммы с функцией $1/r$, что приводит к выделению лишь низкочастотных компонент томограммы.

В работе [18] предложено также обойтись без свертки, а для обратного проецирования использовать вторую производную от проекции (эквивалентную умножению спектра проекции на квадрат ее частоты), что усиливает высокие частоты и выполняет контрастирование границ и разрывов на изображении. Здесь в численном применении данного подхода понятие локальности немного расширяется на малую окрестность точки регистрации луча на детекторе для вычисления второй производной проекции. В работе [19] обе упомянутые версии локальной томографии суммируются с весами, приводящими их примерно к одному масштабу по амплитуде, а две компоненты этого выражения записываются в виде прямого и обратного Λ -операторов. В работе [21] выполнено обобщение метода локальной томографии с выделением разрывов на задачи двумерной векторной томографии.

На рис. 6 демонстрируются результаты применения методов двойного дифференцирования (рис. 6 а) и суммарного изображения (рис. 6 б) для волновой схемы регистрации проекций. Математическая модель использовалась та же, что и на рис. 3. Данная модель — гладкая парабола, не испытывающая разрывов, заданная внутри эллиптического носителя. Однако на границе ее производные терпят разрыв (переходят в ноль вне эллипса), что может давать вклад в развитие артефактов.

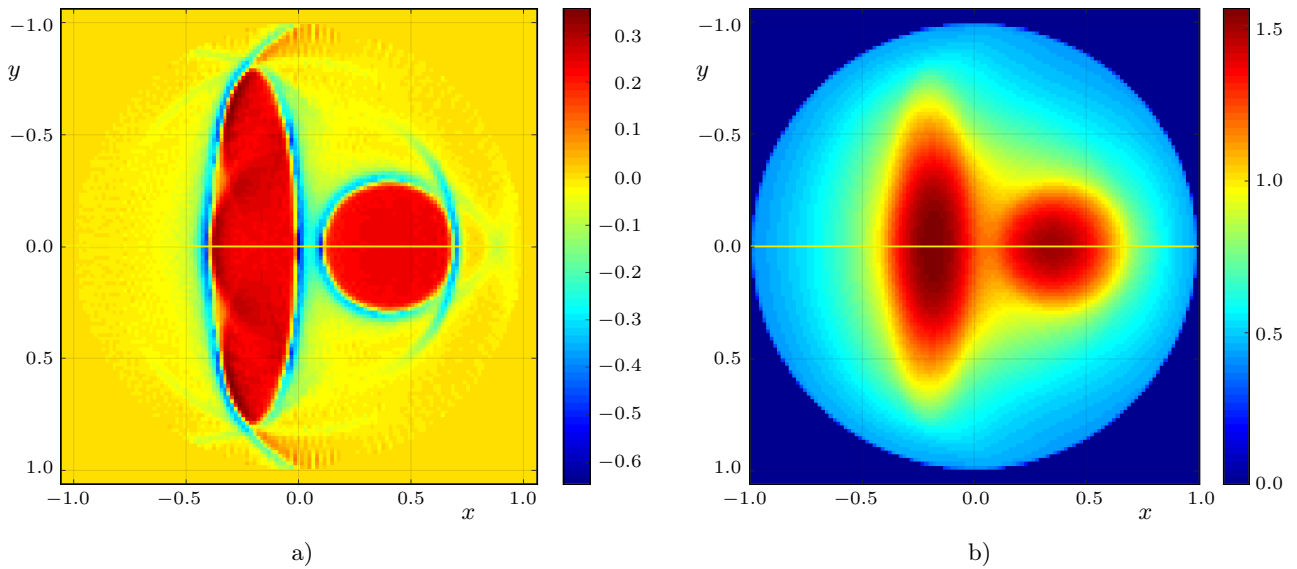


Рис. 6. Восстановление модели TM-247 для волновых траекторий ($a = 0.05, T = 1$). Показаны артефакты реконструкции томограммы в виде регулярных волновых структур в полярной системе координат, по радиусу и по углу: а) изображение Вайнберга; б) суммарное изображение

Fig. 6. Reconstruction of the TM-247 model for wave trajectories ($a = 0.05, T = 1$). Here tomogram artifacts have the form of regular wave structures in a polar coordinate system, along the radius and angle: а) Vainberg's image; б) summarized image

Изображения локальной томографии по второй производной демонстрируют волновые артефакты, появившиеся также на результатах глобальной реконструкции (рис. 3 и 4). На суммарных изображениях артефактов практически нет.

4. Заключение. В работе развит метод приведения задач криволинейной томографии к томографии на параллельных прямых для ряда семейств кривых. Последующая обработка связана с деформацией неизвестной томограммы, различной на каждом направлении, и применении модифицированного метода фильтрации и обратного проецирования (с-FBP).

Проведенный вычислительный эксперимент на математических моделях показывает, что точность реконструкции томограмм зависит теперь не только от количества проекций и количества детекторов на каждом направлении, но еще и от структуры траекторий – их периода, диапазона изменений градиента в области задания томограммы. Иллюстрация теоремы о центральном сечении фурье-образа деформированной проекции показывает возможность также использовать фурье-анализ в новых алгоритмах решения задач обобщенного преобразования Радона.

Отметим, что метод геометрической деформации, описанный в данной работе, можно использовать и для обобщения инверсии экспоненциального преобразования Радона, для трехмерной лучевой томографии, а также для развития методов локальной криволинейной ROI-томографии.

Результаты данной работы кратко докладывались на международных конференциях [23–24]. В данной работе для параболической томографии впервые выполнено исследование по зависимости уровня погрешности реконструкции томограмм от числа регистрируемых проекций в диапазоне числа проекций от 13 до 73. На гладких моделях найдено существенное уменьшение ошибок реконструкции новым алгоритмом с-FBP по сравнению с алгоритмом FBP для параллельной геометрии и малого числа ракурсов. Для числа ракурсов < 30 уменьшение погрешности RMS достигает трех раз. Здесь новый метод криволинейной томографии получил подробное описание алгоритма с-FBP. Также шире представлено сравнение типов артефактов для моделей разной степени гладкости. В дальнейшем предполагается развитие приближенных алгоритмов с-FBP с итерационным уменьшением влияния артефактов на результат реконструкции. Также планируется исследовать алгоритм деконволюции суммарного изображения с целью устранения размытия томограммы сверткой вида $1/r$ (рис. 6 б).



5. Приложение А. Элементарные компоненты математических фантомов.

5.1. Эллиптическая гауссиана. Математическая модель томограммы (первая компонента) задается формулой:

$$g(x, y) = C \exp[-4 \ln 2 t^2],$$

$$t^2 = \frac{((x - x_0) \cos \eta + (y - y_0) \sin \eta)^2}{a^2} + \frac{(-(x - x_0) \sin \eta + (y - y_0) \cos \eta)^2}{b^2}. \quad (6)$$

Здесь a и b — величины полных осей эллипса по осям X и Y соответственно, η — угол поворота оси эллипса a относительно координатной оси OX , (x_0, y_0) — центр эллипса. Если ввести систему координат $X'Y'$, в которой эллипс не повернут и не смещен, то оси a, b будут лежать на координатных осях $O'X'$ и $O'Y'$. Преобразование Радона от этой функции под углом ξ к оси OX задается формулой:

$$f(\xi, p) = \frac{abC\sqrt{\pi}}{|\zeta|\sqrt{4 \ln 2}} \exp\left[-4 \ln 2 \frac{(p - p_0)^2}{\zeta^2}\right],$$

$$p_0 = -x_0 \sin \xi + y_0 \cos \xi, \quad (7)$$

$$\zeta^2 = a^2 \sin^2(\xi - \eta) + b^2 \cos^2(\xi - \eta).$$

Множитель $4 \ln 2$ введен в эти формулы для того, чтобы функция $g(x, y)$ спадала в 2 раза в точках (x, y) , лежащих на изолинии, задаваемой уравнением $t^2 = 1$. Параметр p_0 дает координату проекции центра эллипса в точке (x_0, y_0) на ось P . Формулу (7) можно использовать как для системы параллельных лучей (классическое преобразование Радона), так и для каждого отдельного луча в веерном пучке, задавая нужные углы ξ по формуле $\xi = \beta + \gamma$.

5.2. Парабола степени 1/2 с эллиптическим носителем. Вторая компонента модельной томограммы задается так:

$$g(x, y) = \begin{cases} C(1 - t^2)^{1/2}, & t < 1, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь преобразование Радона такое:

$$f(\xi, p) = \frac{\pi abC}{2|\zeta|} \left(1 - \frac{(p - p_0)^2}{\zeta^2}\right). \quad (9)$$

Параметры t, p_0, ζ в этих формулах определены в (6) и (7).

5.3. Константа с эллиптическим носителем. Третья компонента модельной томограммы описывается формулой:

$$g(x, y) = \begin{cases} C, & t < 1, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Преобразование Радона:

$$f(\xi, p) = \frac{2abC}{|\zeta|} \left(1 - \frac{(p - p_0)^2}{\zeta^2}\right)^{1/2}. \quad (11)$$

Параметры t, p_0, ζ в этих формулах определены в (6) и (7).

6. Приложение Б. Параметры математических моделей.

Таблица 1. Модель TM-247, 2 компоненты

Table 1. TM-247 model, 2 components

TM-247 TM-247	Номер компоненты Component number	Амплитуда компоненты C Component amplitude C	x_0	y_0	a	b	η
1	2	0.9	-0.2	0	0.2	0.8	0
2	2	0.9	0.4	0	0.3	0.3	0

Таблица 2. Модель TM-257, 16 компонент

Table 2. TM-257 model, 16 components

TM-257 TM-257	Номер компоненты Component number	Амплитуда компоненты C Component amplitude C	x_0	y_0	a	b	η
1	3	1.0	-0.75	0.35	0.15	0.15	0
2	3	1.0	-0.25	0.35	0.15	0.15	0
3	3	1.0	0.25	0.35	0.15	0.15	0
4	3	1.0	0.75	0.35	0.15	0.15	0
5	3	1.0	-0.65	-0.10	0.125	0.125	0
6	3	1.0	-0.20	-0.10	0.125	0.125	0
7	3	1.0	0.20	-0.10	0.125	0.125	0
8	3	1.0	0.65	-0.10	0.125	0.125	0
9	3	1.0	-0.50	-0.45	0.100	0.100	0
10	3	1.0	-0.15	-0.45	0.100	0.100	0
11	3	1.0	0.15	-0.45	0.100	0.100	0
12	3	1.0	0.50	-0.45	0.100	0.100	0
13	3	1.0	-0.40	-0.75	0.075	0.075	0
14	3	1.0	-0.125	-0.75	0.075	0.075	0
15	3	1.0	0.125	-0.75	0.075	0.075	0
16	3	1.0	0.40	-0.75	0.075	0.075	0

Таблица 3. Модель TM-257, 7 компонент

Table 3. TM-257 model, 7 components

TM-257 TM-257	Номер компоненты Component number	Амплитуда компоненты C Component amplitude C	x_0	y_0	a	b	η
1	1	1.0	0.1	0.0	0.1	0.2	0
2	1	1.0	0.3	0.4	0.25	0.1	0
3	1	1.0	-0.5	0.1	0.1	0.2	0
4	1	1.0	-0.2	-0.7	0.25	0.1	0
5	1	1.0	-0.0	0.6	0.25	0.1	0
6	1	1.0	-0.2	-0.1	0.15	0.3	0
7	1	1.0	0.45	-0.2	0.3	0.3	0

Список литературы

1. *Hammerer Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
2. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
3. *Deans S.R.* The Radon transform and some of its applications. New York: Wiley, 1983.
4. *Ambartsoumian G., Kuchment P.* A range description for the planar circular Radon transform // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2006. **38**, N 2. 681–692. doi 10.1137/050637492.
5. *Eller M., Hoskins P., Kunyansky L.* Microlocally accurate solution of the inverse source problem of thermoacoustic tomography // *Inverse Problems*. 2020. **36**, N 8. doi 10.1088/1361-6420/ab9c46.
6. *Nikitin V.V., Andersson F., Carlsson M., Duchkov A.A.* Fast hyperbolic Radon transform represented as convolutions in log-polar coordinates // *Computers and Geosciences*. 2017. **105**. 21–33. doi 10.1016/j.cageo.2017.04.013.



7. *Tasinkevych J., Trots I.* Circular Radon transform inversion technique in synthetic aperture ultrasound imaging: an ultrasound phantom evaluation // Archives of Acoustics. 2014. **39**, N 4. 569–582. doi [10.2478/aoa-2014-0061](https://doi.org/10.2478/aoa-2014-0061).
8. *Moon S., Heo J.* Inversion of the elliptical Radon transform arising in migration imaging using the regular Radon transform // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2016. **436**, N 1. 138–148. doi [10.1016/j.jmaa.2015.11.043](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.11.043).
9. *Moon S.* Inversion of the seismic parabolic Radon transform and the seismic hyperbolic Radon transform // Inverse Problems in Science and Engineering. 2016. **24**, N 2. 317–327. doi [10.1080/17415977.2015.1025071](https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1025071).
10. *Monard F.* Functional relations, sharp mapping properties, and regularization of the x-ray transform on disks of constant curvature // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2020. **52**, N 6. 5675–5702. doi [10.1137/20M1311508](https://doi.org/10.1137/20M1311508).
11. *Grathwohl C., Kunstmann P., Quinto E.T., Rieder A.* Microlocal analysis of imaging operators for effective common offset seismic reconstruction // Inverse Problems. 2018. **34**, N 11. doi [10.1088/1361-6420/aadc2a](https://doi.org/10.1088/1361-6420/aadc2a).
12. *Tarpau C., Cebeiro J., Nguyen M.K., Rollet G., Morvidone M.A.* Analytic inversion of a Radon transform on double circular arcs with applications in Compton scattering Tomography // IEEE Transactions on Computational Imaging. 2020. **6**. 958–967. doi [10.1109/TCI.2020.2999672](https://doi.org/10.1109/TCI.2020.2999672).
13. *Пикалов В.В., Казанцев Д.И., Голубятников В.П.* Обобщение теоремы о центральном сечении на задачу веерной томографии // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 2. 180–184.
14. *Пикалов В.В., Казанцев Д.И.* Итерационное восстановление возмущения синопграммы в пространстве Радона для задачи стеганографии // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 1–9.
15. *Kazantsev D., Pickalov V.* New iterative reconstruction methods for fan-beam tomography // Inverse Problems in Science and Engineering. 2017. **26**, N 6. 773–791. doi [10.1080/17415977.2017.1340946](https://doi.org/10.1080/17415977.2017.1340946).
16. *Kak A.C., Slaney M.* Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988.
17. *Вайнштейн Б.К.* Трехмерная электронная микроскопия биологических макромолекул // Успехи физических наук. 1973. **109**, № 3. 455–497. doi [10.3367/UFNr.0109.197303b.0455](https://doi.org/10.3367/UFNr.0109.197303b.0455).
18. *Вайнберг Э.И., Казак И.А., Файнгойс М.Л.* Рентгеновская вычислительная томография по методу обратного проецирования с фильтрацией двойным дифференцированием. Процедурные и информационные особенности // Дефектоскопия. 1985. № 2. 31–39.
19. *Faridani A., Finch D.V., Ritman E.L., Smith K.T.* Local tomography II // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1997. **57**, N 4. 1095–1127. doi [10.1137/S0036139995286357](https://doi.org/10.1137/S0036139995286357).
20. *Кулаков И.Ю., Вологин Д.А., Пикалов В.В.* Многосеточный алгоритм в задаче веерной ROI-томографии контрастных объектов // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**, № 4. 543–548.
21. *Деревцов Е.Ю., Пикалов В.В.* Восстановление векторного поля и его сингулярностей по лучевым преобразованиям // Сибирский журнал вычислительной математики. 2011. **14**, № 1. 29–46.
22. *Webber J.W., Quinto E.T., Miller E.L.* A joint reconstruction and lambda tomography regularization technique for energy-resolved x-ray imaging // Inverse Problems. 2020. **36**, N 7. doi [10.1088/1361-6420/ab8f82](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab8f82).
23. *Pickalov V.V.* Tomography problems for media with low refraction // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2288, N 1. doi [10.1063/5.0028741](https://doi.org/10.1063/5.0028741).
24. *Pickalov V.V.* Approximate filtered back-projection algorithm for plane curves in tomography problems // Journal of Physics: Conference Series. 2021. **1715**, N 1. doi [10.1088/1742-6596/1715/1/012039](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1715/1/012039).

Поступила в редакцию
 12 октября 2021 г.

Принята к публикации
 17 декабря 2021 г.

Информация об авторе

Валерий Владимирович Пикалов — д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, д. 4/1, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography* (Teubner, Stuttgart, 1986; Mir, Moscow, 1990).
2. S. Helgason, *The Radon Transform* (Birkhäuser, Boston, 1980; Mir, Moscow, 1983).
3. S. R. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications* (Wiley, New York, 1983).

4. G. Ambartsoumian and P. Kuchment, “A Range Description for the Planar Circular Radon Transform,” *SIAM J. Math. Anal.* **38** (2), 681–692 (2006). doi [10.1137/050637492](https://doi.org/10.1137/050637492).
5. M. Eller, P. Hoskins, and L. Kunyansky, “Microlocally Accurate Solution of the Inverse Source Problem of Thermoacoustic Tomography,” *Inverse Probl.* **36** (8) (2020). doi [10.1088/1361-6420/ab9c46](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab9c46).
6. V. V. Nikitin, F. Andersson, M. Carlsson, and A. A. Duchkov, “Fast Hyperbolic Radon Transform Represented as Convolutions in Log-Polar Coordinates,” *Comput. Geosci.* **105**, 21–33 (2017). doi [10.1016/j.cageo.2017.04.013](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2017.04.013).
7. J. Tasinkevych and I. Trots, “Circular Radon Transform Inversion Technique in Synthetic Aperture Ultrasound Imaging: An Ultrasound Phantom Evaluation,” *Arch. Acoust.* **39** (4), 569–582 (2014). doi [10.2478/aoa-2014-0061](https://doi.org/10.2478/aoa-2014-0061).
8. S. Moon and J. Heo, “Inversion of the Elliptical Radon Transform Arising in Migration Imaging Using the Regular Radon Transform,” *J. Math. Anal. Appl.* **436** (1), 138–148 (2016). doi [10.1016/j.jmaa.2015.11.043](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.11.043).
9. S. Moon, “Inversion of the Seismic Parabolic Radon Transform and the Seismic Hyperbolic Radon Transform,” *Inverse Probl. Sci. Eng.* **24** (2), 317–327 (2016). doi [10.1080/17415977.2015.1025071](https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1025071).
10. F. Monard, “Functional Relations, Sharp Mapping Properties, and Regularization of the X-Ray Transform on Disks of Constant Curvature,” *SIAM J. Math. Anal.* **52** (6), 5675–5702 (2020). doi [10.1137/20M1311508](https://doi.org/10.1137/20M1311508).
11. C. Grathwohl, P. Kunstmann, E. T. Quinto, and A. Rieder, “Microlocal Analysis of Imaging Operators for Effective Common Offset Seismic Reconstruction,” *Inverse Probl.* **34** (11) (2018). doi [10.1088/1361-6420/aadc2a](https://doi.org/10.1088/1361-6420/aadc2a).
12. C. Tarpau, J. Cebeiro, M. K. Nguyen, et al., “Analytic Inversion of a Radon Transform on Double Circular Arcs with Applications in Compton Scattering Tomography,” *IEEE Trans. Comput. Imaging* **6**, 958–967 (2020). doi [10.1109/TCI.2020.2999672](https://doi.org/10.1109/TCI.2020.2999672).
13. V. V. Pickalov, D. I. Kazantsev, and V. P. Golubyatnikov, “The Central Slice Theorem Generalization for a Fan-Beam Tomography,” *Vychisl. Metody Programm.* **7**, № 2. 180–184 (2006). <https://en.num-meth.ru/index.php/journal/article/view/206>.
14. V. V. Pickalov and D. I. Kazantsev, “Iterative Restoration of Radon-Space Sinogram Disturbances for the Steganography Problem,” *Vychisl. Metody Programm.* **9**, № 1. 1–9 (2008). <https://en.num-meth.ru/index.php/journal/article/view/289>.
15. D. Kazantsev and V. Pickalov, “New Iterative Reconstruction Methods for Fan-Beam Tomography,” *Inverse Probl. Sci. Eng.* **26** (6), 773–791 (2017). doi [10.1080/17415977.2017.1340946](https://doi.org/10.1080/17415977.2017.1340946).
16. A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging* (IEEE Press, New York, 1988).
17. B. K. Vainshtein, “Three-Dimensional Electron Microscopy of Biological Macromolecules,” *Usp. Fiz. Nauk* **109** (3), 455–497 (1973) [*Sov. Phys. Usp.* **16** (2), 185–206 (1973)]. doi [10.1070/PU1973v016n02ABEH005164](https://doi.org/10.1070/PU1973v016n02ABEH005164).
18. E. I. Vainberg, I. A. Kazak, and M. L. Faingoiz, “X-Ray Computerized Back Projection Tomography with Filtration by Double Differentiation. Procedure and Information Features,” *Defektoskopiya*, No. 2, 31–39 (1985) [*Sov. J. Nondestruct. Test.* **21** (2), 106–113 (1985)].
19. A. Faridani, D. V. Finch, E. L. Ritman, and K. T. Smith, “Local Tomography II,” *SIAM J. Appl. Math.* **57** (4), 1095–1127 (1997). doi [10.1137/S0036139995286357](https://doi.org/10.1137/S0036139995286357).
20. I. Yu. Kulakov, D. A. Vologin, and V. V. Pickalov, “A Multigrid Algorithm for the Fan-Beam ROI-Tomography of Contrast Objects,” *Vychisl. Metody Programm.* **14** (4), 543–548 (2013). <https://en.num-meth.ru/index.php/journal/article/view/665>.
21. E. Yu. Derevtsov and V. V. Pickalov, “Reconstruction of Vector Fields and Their Singularities from Ray Transforms,” *Sib. Zh. Vych. Mat.* **14** (1), 29–46 (2011) [*Numer. Anal. Appl.* **4** (1), 21–35 (2011).] doi [10.1134/S1995423911010034](https://doi.org/10.1134/S1995423911010034).
22. J. W. Webber, E. T. Quinto, and E. L. Miller, “A Joint Reconstruction and Lambda Tomography Regularization Technique for Energy-Resolved X-Ray Imaging,” *Inverse Probl.* **36** (7) (2020). doi [10.1088/1361-6420/ab8f82](https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab8f82).
23. V. V. Pickalov, “Tomography Problems for Media with Low Refraction,” *AIP Conf. Proc.* **2288** (1) (2020). doi [10.1063/5.0028741](https://doi.org/10.1063/5.0028741).
24. V. V. Pickalov, “Approximate Filtered Back-Projection Algorithm for Plane Curves in Tomography Problems,” *J. Phys. Conf. Ser.* **1715** (1) (2021). doi [10.1088/1742-6596/1715/1/012039](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1715/1/012039).

Received
October 12, 2021

Accepted for publication
December 17, 2021

Information about the author

Valery V. Pickalov — Dr. Sci., Associate Professor, Principal Scientist, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Institutskaya ulitsa 4/1, 630090, Novosibirsk, Russia.