УДК 517.958

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С ДАННЫМИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н. Л. Гольдман[1]

Исследуется проблема единственности в классах Гельдера для обратных задач с граничным переопределением, связанных с нахождением неизвестной правой части в квазилинейном параболическом уравнении общего вида. Дано обоснование метода квазирешений для построения устойчивых приближенных решений этого класса некорректных задач.

Ключевые слова: некорректные задачи, обратные задачи, параболические уравнения, устойчивость, разностные схемы, численные методы, метод квазирешений.

Введение. Исследование обратных задач для квазилинейных параболических уравнений общего вида с неизвестной правой частью, начатое в [1, 2] и продолженное в данной работе, связано с теоретическим и практическим интересом, который представляют эти задачи. В частности, рассматриваемый ниже класс обратных задач возникает при моделировании и управлении нелинейными теплофизическими процессами, в которых требуется найти распределение по времени мощности тепловых источников, используя информацию о заданных на границе области температуре и тепловом потоке. Теория таких задач, называемых обратными задачами с граничным переопределением, еще недостаточно развита, особенно в случае квазилинейных параболических уравнений. Их существенное отличие от обычных нехарактеристических задач Коши состоит в необходимости найти кроме решения еще и неизвестную правую часть уравнения.

Основное внимание в данной работе уделено постановкам обратных задач с граничным переопределением в классах Гельдера и единственности их решения. Исследование проблемы единственности основано на изучении свойств соответствующих сопряженных задач для линейных параболических уравнений и использует известные результаты [3] о единственности решения нехарактеристических задач Коши для этих уравнений. Полученные на основе такого подхода достаточные условия единственности расширяют класс обратных задач с граничным переопределением, обладающих таким свойством, не только для квазилинейных, но даже для линейных уравнений (см., например, [4 – 6]).

В работе рассмотрен также вопрос устойчивости приближенного решения в пространствах Гельдера для этого класса некорректных задач на основе регуляризирующего метода квазирешений.

1. Постановка обратной задачи с граничными условиями третьего рода. Пусть квазилинейная краевая задача состоит в определении функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ из условий

$$c(x,t,u)u_t - Lu = p_0(x,t)f(t) + p_1(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$a(x,t,u)u_x - e_0(t,u)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$a(x,t,u)u_x + e_1(t,u)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $Lu \equiv (a(x,t,u)u_x)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)$ — равномерно эллиптический оператор, $a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, d, f, p_i, e_i, q_i $(i = 0,1)$, φ — известные функции своих аргументов, $a_{\min}$, $c_{\min} = \text{const} > 0$.

Допустим, что функция $f(t)$ в правой части уравнения (1) неизвестна, но на границе $x = l$ задана дополнительная информация о решении прямой задачи (1) – (4):

$$u|_{x=l} = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $g(t)$ — известная при $0 \leqslant t \leqslant T$ функция. Тогда возникает так называемая

Обратная задача с граничным переопределением: найти функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие условиям (1) – (4) и (5), в которых входные данные $a > 0$, b, $c > 0$, d, p_i, e_i, q_i $(i = 0,1)$, φ и g предполагаются заданными.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Условия (3), (5) являются данными Коши на границе $x = l$, но в отличие от обычной нехарактеристической задачи Коши для параболического уравнения, здесь неизвестна правая часть уравнения, что существенно усложняет задачу.

Сформулируем требования к входным данным обратной задачи (1) – (5), используя стандартные обозначения классов функций из [7].

1. При $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $e_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1)$.

2. При $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ $(M_0 \geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|)$ производные a_{xx}, a_{xu}, a_{uu} и a_t равномерно ограничены, b, c, d, a_x, a_u принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$, $0 < \lambda < 1$, функции e_i имеют равномерно ограниченные производные e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} $(i = 0, 1)$.

3. Функции $p_0(x,t)$ и $p_1(x,t)$ принадлежат $H^{1,\lambda/2}(\overline{Q})$, $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$, функции $\varphi(x)$ и $g(t)$ принадлежат, соответственно, $H^{2+\lambda}[0,l]$ и $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, производные q_{it} $(i = 0, 1)$ равномерно ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T$. Выполнены условия согласования при $t = 0$:

$$a(x,0,\varphi)\varphi_x - e_0(0,\varphi)\varphi|_{x=0} = q_0(0),$$
$$a(x,0,\varphi)\varphi_x + e_1(0,\varphi)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

Эти требования обеспечивают существование и единственность решения квазилинейной краевой задачи (1) – (4) в классе Гельдера $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ в правой части уравнения (1) [7].

В соответствии с этим дадим следующее

Определение 1. Решением обратной задачи (1) – (5) в классах Гельдера назовем пару функций $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0,T], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1) – (5) в обычном смысле.

2. Единственность решения обратной задачи (1) – (5) в классах Гельдера. Рассматриваемая задача не может иметь двух различных решений в смысле определения 1.

2.1. Сформулируем соответствующую теорему единственности.

Теорема 1. *Пусть входные данные обратной задачи* (1) – (5) *удовлетворяют требованиям* 1 – 3 *и, кроме того, функция* $c(x,t,u)$ *имеет непрерывную производную по* t *при* $(x,t,u) \in \overline{D}$.

Тогда в случае существования решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ *обратной задачи* (1) – (5) *в классах Гельдера* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$ *оно определяется однозначно.*

Доказательство. Допустим, что $\{u_1^0, f_1^0\}$ и $\{u_2^0, f_2^0\}$ — два решения обратной задачи (1) – (5). Функции u_1^0 и u_2^0 можно рассматривать как решения краевой задачи (1) – (4), соответствующие функциям f_1^0 и f_2^0 в правой части уравнения (1). Следовательно, для них справедливы оценки в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [7]:

$$|u_1^0, u_2^0|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant M, \quad M = \text{const} > 0. \tag{6}$$

Для разностей $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$ и $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$ в силу (1) – (5) имеют место соотношения

$$c(x,t,u_1^0)\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u = p_0(x,t)\Delta f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x - \mathcal{E}_0\Delta u|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{8}$$

$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x|_{x=l} = 0, \quad \Delta u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{9}$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{10}$$

в которых

$$\mathcal{L}\Delta u \equiv (a(x,t,u_1^0)\Delta u_x)_x - \mathcal{A}_1\Delta u_x - \mathcal{A}_2\Delta u, \quad \mathcal{A}_1 = b(x,t,u_1^0) - a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0.$$

Вид коэффициентов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{E}_0$, зависящих соответствующим образом от производных u_{2x}^0, u_{2xx}^0, u_{2t}^0 и от значений функций a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u, d_u и e_{0u}, приведен в [1]. Свойства 1 – 3 входных данных и оценки (6) для $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ позволяют заключить, что все коэффициенты линейного оператора $\mathcal{L}$ и граничных условий (8), (9) непрерывны как функции (x,t) и t.

Утверждение, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, опирается на следующие свойства краевой задачи, сопряженной к задаче (7) – (10).

Лемма 1. *Пусть $\psi(x,t)$ — решение сопряженной краевой задачи*

$$(c(x,t,u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{11}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{12}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x + \mathcal{A}_1\psi|_{x=l} = \eta(t), \quad 0 \leqslant t < T, \tag{13}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{14}$$

где $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x,t,u_1^0)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(t)$ — произвольная функция из $C^1[0,T]$. Тогда

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(t)\,dx\,dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in C^1[0,T]. \tag{15}$$

Доказательство леммы 1. Прежде всего заметим, что все коэффициенты в уравнении (11), рассматриваемые как функции (x,t), непрерывны в $\overline{Q}$ в силу свойств функций a, b, c, d и оценок (6) для $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$. Аналогичные рассуждения с учетом свойств граничной функции e_0 позволяют установить, что все коэффициенты в граничных условиях (12), (13) непрерывны как функции t при $0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, задача (11)–(14), являясь линейной краевой задачей относительно функции $\psi(x,t)$, разрешима в классе $\psi(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$. Ее производная $\psi_x(x,t)$ принадлежит классу $C(\overline{Q}) \cap H^{1,1/2}(Q)$. Более того, $\psi(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$, $\psi_x(x,t) \in H^{1,1/2}(\overline{Q})$ кроме точки $x = l$, $t = T$; если же $\eta|_{t=T} = 0$, то принадлежность $\psi(x,t)$ и $\psi_x(x,t)$ этим классам имеет место во всей замкнутой области $\overline{Q}$ [7].

Рассмотрим выражение

$$I = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi\{c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u\}\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\}\,dx\,dt. \tag{16}$$

С одной стороны, в силу (7) и (11) имеем

$$I = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(t)\,dx\,dt. \tag{17}$$

С другой стороны, проводя в (16) интегрирование по частям с учетом соотношений (7)–(10) и (11)–(14), получим

$$I = \int\limits_0^l [c\psi\Delta u]_{t=0}^{t=T}\,dx \mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u(c\psi)_t\,dx\,dt - \int\limits_0^T [\psi a\Delta u_x]_{x=0}^{x=l}\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^l a\psi_x\Delta u_x\,dx\,dt + \int\limits_0^T [\psi\mathcal{A}_1\Delta u]_{x=0}^{x=l}\,dt \mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u(\mathcal{A}_1\psi)_x\,dx\,dt \mp$$

$$\mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u\mathcal{A}_2\psi\,dx\,dt + \int\limits_0^T [\Delta u a\psi_x]_{x=0}^{x=l}\,dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^l a\psi_x\Delta u_x\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \Delta u\big|_{x=l}\,\{a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi\}\big|_{x=l}\,dt - \int\limits_0^T \Delta u\big|_{x=0}\,\{a\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi\}\big|_{x=0}\,dt = 0.$$

Отсюда и из (17) следует утверждение (15). Лемма 1 доказана.

Для дальнейшего доказательства теоремы 1 установим еще несколько свойств решения сопряженной задачи (11)–(14).

Лемма 2. *Пусть при любой функции $\eta(t) \in C^1[0,T]$ соответствующее решение сопряженной задачи (11) – (14) удовлетворяет на границе области $\overline{Q}$ соотношениям*

$$\int\limits_0^T \psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\, w(t)\, dt = 0, \quad \overline{x}=0, \quad \overline{x}=l, \tag{18}$$

для некоторой непрерывной функции $w(t)$.

Тогда $w(t)=0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, т.е. множества следов $\{\psi(0,t)\}$ и $\{\psi(l,t)\}$, получаемых при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0,T]$, являются всюду плотными.

Доказательство леммы 2. При $\overline{x}=l$ плотность множества $\{\psi(l,t)\}$ очевидным образом следует из (13) и произвольности функции $\eta(t)$. Для доказательства плотности множества следов на другой границе области $\overline{Q}$ при $\overline{x}=0$ рассмотрим краевую задачу, сопряженную к (11) – (14) (ср. с (7) – (10)):

$$c(x,t,u_1^0) z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{19}$$

$$a(x,t,u_1^0) z_x - \mathcal{E}_0 z|_{x=0} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{20}$$

$$a(x,t,u_1^0) z_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{21}$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{22}$$

где $\mathcal{L}z \equiv (a(x,t,u_1^0)z_x)_x - \mathcal{A}_1 z_x - \mathcal{A}_2 z$, коэффициенты $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{E}_0$ имеют тот же вид, что и в задаче (7) – (10).

Рассматривая коэффициенты уравнения (19) и граничных условий (20), (21) как функции переменных (x,t) и, соответственно, t, нетрудно установить их непрерывность при $(x,t) \in \overline{Q}$ и $t \in [0,T]$ как следствие гладкости входных данных (требования 1 – 3) и принадлежности u_1^0 и u_2^0 $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$. Это позволяет заключить, что краевая задача (19) – (22), линейная относительно $z(x,t)$, имеет решение $z(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$. Более того, $z(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$ кроме точки $x=0$, $t=0$ и $z(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$, если $w|_{t=0}=0$ [7].

Покажем, что решение задачи (19) – (22) удовлетворяет дополнительному условию $z|_{x=l}=0$. Для этого рассмотрим выражение

$$II = \int\limits_0^T \int\limits_0^l z\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\}\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi\{cz_t - \mathcal{L}z\}\, dx\, dt. \tag{23}$$

С одной стороны, в силу однородности уравнений (11) и (19) имеем $II=0$. С другой стороны, интегрирование в (23) по частям с учетом соотношений (12) – (14) и (20) – (22) дает

$$II = \int\limits_0^l [c\psi z]_{t=0}^{t=T}\, dx \mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi c z_t\, dx\, dt + \int\limits_0^T [za\psi_x]_{x=0}^{x=l}\, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_0^l a\psi_x z_x\, dx\, dt + \int\limits_0^T [\psi \mathcal{A}_1 z]_{x=0}^{x=l}\, dt \mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \mathcal{A}_1 \psi z_x\, dx\, dt \mp$$

$$\mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \mathcal{A}_2 \psi z\, dx\, dt - \int\limits_0^T [\psi a z_x]_{x=0}^{x=l}\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l a\psi_x z_x\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T z\big|_{x=l} \{a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi\}\big|_{x=l}\, dt + \int\limits_0^T \psi\big|_{x=0} \{az_x - \mathcal{E}_0 z\}\big|_{x=0}\, dt.$$

Таким образом

$$II = \int\limits_0^T z\big|_{x=l}\, \eta(t)\, dt + \int\limits_0^T \psi\big|_{x=0}\, w(t)\, dt = 0.$$

Но отсюда в силу произвольности функции $\eta(t)$ и вытекает, что $z|_{x=l}=0$, так как по предположению функция $w(t)$ удовлетворяет соотношению (18).

Это означает, что функция $z(x,t)$ является решением нехарактеристической задачи Коши для уравнения (19) с условиями $z|_{x=l}=0$, $z_x|_{x=l}=0$ (см. (21)). Как уже отмечалось, все коэффициенты уравнения (19) непрерывны как функции (x,t). Более того, в силу требований гладкости входных данных 1–3 и оценок (6) функции c, a и $\mathcal{A}_1$ имеют равномерно ограниченные в $\overline{Q}$ производные по x; кроме того, c и a обладают равномерно ограниченными в $\overline{Q}$ производными по t.

Введем вспомогательную функцию

$$\vartheta(x,t)=z(x,t)\exp(-\mathcal{K}t),\quad \mathcal{K}=\mathrm{const}>0,\quad \mathcal{K}\geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}}|\mathcal{A}_2|c_{\min}^{-1}.$$

Для нее из (19)–(22) вытекают соотношения

$$c\vartheta_t-(a\vartheta_x)_x+\mathcal{A}_1\vartheta_x+(\mathcal{A}_2+\mathcal{K}c)\vartheta=0,\quad (x,t)\in Q,$$

$$\vartheta|_{x=l}=0,\quad \vartheta_x|_{x=l}=0,\quad 0<t\leqslant T,\quad \mathcal{A}_2+\mathcal{K}c\geqslant 0,$$

для которых выполнены все условия применимости результатов [3] о единственности решения нехарактеристической задачи Коши для линейных параболических уравнений. Следовательно, $\vartheta(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q}$. Но тогда и $z(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q}$, т.е. в силу (20) $w(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Лемма 2 доказана.

Исследуем теперь вопрос о плотности множества следов решений сопряженной задачи (11)–(14) $\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\}$ во внутренних точках $\overline{x}$, $0<\overline{x}<l$. Имеет место

Лемма 3. *Предположим, что при любой функции $\eta(t)\in C^1[0,T]$ соответствующее решение $\psi(x,t)$ сопряженной задачи* (11)–(14) *удовлетворяет при любом $\overline{x}$, $0<\overline{x}<l$ соотношениям*

$$\int\limits_0^T \psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\,w(t)\,dt=0,\quad \int\limits_0^T \psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}\,\theta(t)\,dt=0 \tag{24}$$

для некоторых непрерывных функций $w(t)$ и $\theta(t)$.

Тогда $w(t)=0$, $\theta(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$, т.е. множества следов $\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\}$ и $\{\psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}\}$, получаемых при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0,T]$, являются всюду плотными.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим снова краевую задачу для уравнения (19), но уже в области $\overline{Q}_{\overline{x}}=\{\overline{x}\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant T\}$:

$$c(x,t,u_1^0)z_t-\mathcal{L}z=0,\quad (x,t)\in Q_{\overline{x}}, \tag{25}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x-\mathcal{A}_1 z|_{x=\overline{x}}=w(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{26}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x|_{x=l}=0,\quad 0<t\leqslant T, \tag{27}$$

$$z|_{t=0}=0,\quad \overline{x}\leqslant x\leqslant l. \tag{28}$$

Как и при доказательстве леммы 2, требования гладкости входных данных и оценки (6) позволяют заключить, что эта краевая задача, линейная относительно $z(x,t)$, имеет решение $z(x,t)\in C(\overline{Q}_{\overline{x}})\cap C^{2,1}(Q_{\overline{x}})$. Более того, $z(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q}_{\overline{x}})$ кроме точки $x=\overline{x}$, $t=0$, и $z(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q}_{\overline{x}})$, если $w|_{t=0}=0$ [7]. Возьмем в качестве функции $\theta(t)$ функцию $\theta(t;w)=a(x,t,u_1^0)|_{x=\overline{x}}\,z(x,t)|_{x=\overline{x}}$. Ее непрерывность очевидным образом следует из свойств коэффициента a и принадлежности $z(x,t)\in C(\overline{Q}_{\overline{x}})$.

Покажем, что на границе $x=l$ решение задачи (25)–(28) удовлетворяет дополнительному условию $z|_{x=l}=0$. Для этого рассмотрим выражение

$$III=\int\limits_0^T\int\limits_{\overline{x}}^l z\{(c\psi)_t+\mathcal{L}^*\psi\}\,dx\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_{\overline{x}}^l \psi\{cz_t-\mathcal{L}z\}\,dx\,dt. \tag{29}$$

С одной стороны, в силу однородности уравнений (11) и (25) имеем $III=0$.

С другой стороны, интегрируя (29) по частям с учетом соотношений (13), (14) и (25)–(28), устанавливаем, что

$$III=\int\limits_0^T z\big|_{x=l}\,\{a\psi_x+\mathcal{A}_1\psi\}\,\big|_{x=l}\,dt+\int\limits_0^T \psi\big|_{x=\overline{x}}\,\{az_x-\mathcal{A}_1 z\}\,\big|_{x=\overline{x}}\,dt-\int\limits_0^T \psi_x\big|_{x=\overline{x}}\,\{az\}\,\big|_{x=\overline{x}}\,dt.$$

Таким образом,

$$III = \int_0^T z\big|_{x=l}\,\eta(t)\,dt + \int_0^T \psi\big|_{x=\overline{x}}\,w(t)\,dt - \int_0^T \psi_x\big|_{x=\overline{x}}\theta(t)\,dt = 0.$$

Но по предположению функции $w(t)$ и $\theta(t)$ удовлетворяют соотношениям (24). Следовательно, в силу произвольности функции $\eta(t)$ заключаем, что $z|_{x=l} = 0$.

Дальнейшее доказательство опирается, как и в лемме 2, на возможность применить результаты [3] о единственности решения нехарактеристической задачи Коши для линейных параболических уравнений. Это позволяет установить, что $z(x,t) \equiv 0$ в области $\overline{Q}_{\overline{x}}$. Тогда из (26) и вида функции $\theta(t)$ вытекает, что $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда и следует плотность множеств $\big\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\big\}$ и $\big\{\psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}\big\}$ во внутренних точках $\overline{x}$, $0 < \overline{x} < l$. Лемма 3 доказана.

Леммы 1–3 уже позволяют завершить доказательство единственности решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ в смысле определения 1. Действительно, применяя в интегральном соотношении (15) леммы 1 теорему о среднем по переменной x, получим равенство

$$\int_0^T l\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\, p_0(x,t)|_{x=\overline{x}}\,\Delta f(t)\,dx = 0, \quad 0 \leqslant \overline{x} \leqslant l, \tag{30}$$

справедливое при любой граничной функции $\eta(t) \in C^1[0,T]$ в сопряженной задаче (11)–(14). Но так как множество следов $\big\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\big\}$, получаемое при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0,T]$, обладает свойством плотности при любом $\overline{x} \in [0,l]$ (леммы 2, 3), то равенство (30) означает, что

$$p_0(x,t)|_{x=\overline{x}}\,\Delta f(t) = 0, \quad 0 \leqslant \overline{x} \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

По предположению (см. требование 3 к входным данным) $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. Следовательно, $\Delta f(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда из соотношений (7)–(10), которые представляют собой линейную краевую задачу с гладкими коэффициентами относительно Δu, вытекает в силу единственности решения такой краевой задачи [7], что $\Delta u \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой и в том случае, когда неравенство $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ имеет место в некоторой области $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset \overline{Q}$, вне которой $p_0(x,t) = 0$.

2.2. Если функция f в правой части уравнения (1) ищется в виде $f(x,t)$, а не $f(t)$, то такая обратная задача с граничным переопределением не обладает, вообще говоря, свойством единственности. Это подтверждает следующий пример.

Пример 1. Функции

$$\begin{cases} u_1(x,t) = x^2 t\exp(-x), \\ f_1(x,t) = \big(x^2 - t(x^2 - 4x + 2)\big)\exp(-x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(x,t) = x^3 t\exp(-x^2), \\ f_2(x,t) = \big(x^3 - t(4x^5 - 14x^3 + 6x)\big)\exp(-x^2) \end{cases}$$

удовлетворяют в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ следующей обратной задаче:

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u_x - u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = t\exp(-1), \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

с граничным переопределением при $x = 1$:

$$u|_{x=1} = t\exp(-1), \quad 0 < t \leqslant T,$$

т.е. для этой задачи единственность решения не имеет места.

2.3. Остановимся кратко на достаточных условиях единственности, которые вытекают из проведенного исследования в том случае, когда обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих линейному параболическому уравнению

$$c(x,t)u_t - Lu = p_0(x,t)f(t) + p_1(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{31}$$

$$Lu \equiv (a(x,t)u_x)_x - b(x,t)u_x - d(x,t)u,$$

граничным условиям

$$a(x,t)u_x - e_0(t)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{32}$$

$$a(x,t)u_x + e_1(t)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{33}$$

начальному условию (4) и граничному наблюдению (5).

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ в классах Гельдера принимает следующий вид.

Теорема 2. *Предположим, что входные данные линейной краевой задачи* (31) – (33), (4) *удовлетворяют требованиям гладкости и согласования, обеспечивающим существование и единственность* $u(x,t)$ *в* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ *при любой функции* $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ *в правой части уравнения* (31)*:*

$$a, a_x, b, c, d \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$e_i, q_i \in H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0,T], \quad e_i \geqslant 0, \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0,l], \quad i = 0,1,$$

$$a(x,0)\varphi_x - e_0(0)\varphi|_{x=0} = q_0(0),$$

$$a(x,0)\varphi_x + e_1(0)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

Пусть, кроме того, производные b_x *и* c_t *непрерывны в* $\overline{Q}$*, функция* $g(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]$*,* $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ *при* $(x,t) \in \overline{Q}$*.*

Тогда решение $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ *такой обратной задачи в случае его существования единственно в классе функций* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$*.*

Доказательство повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 1, опираясь на соотношение (15) для решения $\psi(x,t)$ сопряженной задачи, имеющей в данном случае вид

$$(c(x,t)\psi)_t + (a(x,t)\psi_x)_x + (b(x,t)\psi)_x - d(x,t)\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T,$$

$$a(x,t)\psi_x - (e_0(t) - b(x,t))\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T,$$

$$a(x,t)\psi_x + b(x,t)\psi|_{x=l} = \eta(t), \quad 0 \leqslant t < T,$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

и на плотность множества следов $\left\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\right\}$ $(0 \leqslant \overline{x} \leqslant l)$ при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0,T]$. Вывод последнего утверждения основан (как в леммах 2, 3) на теореме единственности для линейных параболических уравнений с данными Коши на границе области [3].

Теорема 2 остается в силе и в том случае, когда неравенство $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ выполняется в некоторой области $Q' \subset \overline{Q}$, вне которой $p_0(x,t) = 0$ (см. замечание 1).

3. Единственность решения обратной задачи со смешанными краевыми условиями. Рассматриваемый класс обратных задач для квазилинейного параболического уравнения (1) включает в себя также случай задания граничных условий первого рода на границе $x = 0$.

3.1. Соответствующая обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих уравнению (1), граничному условию при $x = 0$

$$u|_{x=0} = v(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{34}$$

и условиям (3) – (5), в которых входные данные $a > 0$, b, $c > 0$, d, p_i $(i = 0,1)$, v, e_1, q_1 , φ и g предполагаются заданными.

При выполнении требований 1 – 3 к соответствующим входным данным и при выполнении требований к граничной функции $v(t)$:

$$v(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T], \quad v|_{t=0} = \varphi|_{x=0},$$

квазилинейная краевая задача (1), (34), (3), (4) имеет единственное решение $u(x,t)$ в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ в правой части уравнения (1), удовлетворяющей условиям согласования [7, 8]:

$$c(x,0,\varphi)v_t - L\varphi|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)|_{x=0}. \tag{35}$$

В соответствии с этим дадим следующее

Определение 2. Решением обратной задачи со смешанными краевыми условиями назовем пару функций $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0,T], \quad 0<\lambda<1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1), (34), (3), (4), (35) и граничному наблюдению (5) в обычном смысле.

3.2. Единственность решения этой обратной задачи в смысле определения 2 устанавливает следующая

Теорема 3. *Пусть входные данные удовлетворяют требуемым условиям гладкости и согласования и пусть, кроме того, функция $c(x,t,u)$ имеет непрерывную производную по t при $(x,t,u)\in\overline{D}$.*

Тогда в случае существования решения рассматриваемой обратной задачи $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ в классах Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})\times H^{\lambda/2}[0,T]$ оно определяется однозначно.

Доказательство. Ограничимся изложением основных моментов доказательства, так как оно повторяет с соответствующими модификациями доказательство теоремы 1.

Предположим, что $\{u_1^0, f_1^0\}$ и $\{u_2^0, f_2^0\}$ — два решения обратной задачи. Для u_1^0 и u_2^0 как для решений смешанной краевой задачи (1), (34), (3), (4), соответствующих функциям f_1^0 и f_2^0 правой части уравнения (1), справедливы оценки вида (6) в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [7, 8]. Пусть $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$, $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$. В силу (35) $\Delta f|_{t=0}=0$, кроме того, из (1), (34), (3) – (5) следует, что Δu и Δf удовлетворяют соотношениям (7), (9), (10) и условию

$$\Delta u|_{x=0} = 0, \quad <t\leqslant T. \tag{36}$$

Утверждение, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0\leqslant t\leqslant T$, основано на следующих свойствах краевой задачи, сопряженной к задаче (7), (36), (9), (10).

Лемма 4. *Пусть $\psi(x,t)$ — решение сопряженной краевой задачи*

$$(c(x,t,u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0<x<l, \quad 0\leqslant t<T, \tag{37}$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad 0\leqslant t<T, \tag{38}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x + \mathcal{A}_1\psi|_{x=l} = \eta(t), \quad 0\leqslant t<T, \tag{39}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{40}$$

где $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x,t,u_1^0)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(t)$ — произвольная функция из $C^1[0,T]$. Тогда

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(t)\,dx\,dt = 0 \quad \forall\eta(t)\in C^1[0,T].$$

Вывод леммы 4 аналогичен доказательству леммы 1. Сопряженная задача (37) – (40) является линейной краевой задачей с гладкими коэффициентами, решение которой $\psi(x,t)$ и ее производная $\psi_x(x,t)$ непрерывны в области $\overline{Q}$. Более того, $\psi(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q})$, $\psi_x(x,t)\in H^{1,1/2}(\overline{Q})$ кроме точки $x=l$, $t=T$. Как и при выводе леммы 1, используется вспомогательное выражение (16), в котором проводится интегрирование по частям с учетом начальных и граничных условий для Δu и ψ (см. (36) и (38)).

Лемма 5. *Пусть при любой функции $\eta(t)\in C^1[0,T]$ решение $\psi(x,t)$ сопряженной задачи* (37) – (40) *удовлетворяет соотношениям*

$$\int\limits_0^T \psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\,w(t)\,dt = 0, \quad 0<\overline{x}\leqslant l, \qquad \int\limits_0^T \psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}\,\theta(t)\,dt = 0, \quad 0\leqslant\overline{x}\leqslant l,$$

для некоторых непрерывных функций $w(t)$ и $\theta(t)$.

Тогда $w(t)=0$, $\theta(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$, т.е. соответствующие множества следов $\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\}$ и $\{\psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}\}$, получаемых при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0,T]$, являются всюду плотными.

Доказательство леммы 5. Во внутренних точках $\overline{x}$, $0<\overline{x}<l$, плотность множества следов решения $\psi(x,t)$ и его производной $\psi_x(x,t)$ следует из леммы 3. На границе $\overline{x}=l$ она вытекает из (39) в

силу произвольности функции $\eta(t)$. Покажем, что на границе $\overline{x}=0$ множество $\psi_x(0,t)$ также обладает свойством плотности. Именно, установим, что из равенства

$$\int\limits_0^T \psi_x(x,t)|_{x=0}\,\theta(t)\,dt=0 \quad \forall \eta(t)\in C^1[0,T], \tag{41}$$

для некоторой функции $\theta(t)\in C[0,T]$, $\theta|_{t=0}=0$, следует, что $\theta(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$.

Действительно, рассмотрим в области $\overline{Q}$ краевую задачу, сопряженную к (37) – (40):

$$c(x,t,u_1^0)z_t-\mathcal{L}z=0, \quad (x,t)\in Q, \tag{42}$$

$$z|_{x=0}=w(t), \quad 0<t\leqslant T, \tag{43}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x|_{x=l}=0, \quad 0<t\leqslant T, \tag{44}$$

$$z|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{45}$$

где $\mathcal{L}z\equiv(a(x,t,u_1^0)z_x)_x-\mathcal{A}_1z_x-\mathcal{A}_2z$, коэффициенты $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ имеют тот же вид, что и в задаче (7) – (10), $w(t)=\big(a(x,t,u_1^0)|_{x=0}\big)^{-1}\theta(t)$ — непрерывная функция в силу гладкости входных данных и непрерывности $\theta(t)$, $w(t)|_{t=0}=0$. Соотношения (42) – (45) представляют собой линейную краевую задачу со смешанными граничными условиями, которая вследствие непрерывности коэффициентов уравнения (42) имеет решение $z(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q})$ кроме точки $x=0$, $t=0$ (см. соответствующие рассуждения в лемме 2). Покажем, что при $x=l$ в дополнение к (44) имеет место условие $z|_{x=l}=0$.

Рассматривая, как и в лемме 2, вспомогательное выражение II (см. (23)), нетрудно установить из (37) – (40) и (42) – (45), что

$$II=\int\limits_0^T z\big|_{x=l}\{a\psi_x+\mathcal{A}_1\psi\}\big|_{x=l}\,dt-\int\limits_0^T \psi_x\big|_{x=0}\{az\}\big|_{x=0}\,dt=0,$$

т.е. в силу (39) и (43) и вида функции $w(t)$ имеем

$$\int\limits_0^T z\big|_{x=l}\,\eta(t)\,dt-\int\limits_0^T \psi_x\big|_{x=0}\,\theta(t)\,dt=0.$$

Отсюда вследствие предположения (41) и произвольности функции $\eta(t)$ вытекает, что $z|_{x=l}=0$.

Условие $z|_{x=l}=0$ вместе с (44) означает, что функция $z(x,t)$ является решением нехарактеристической задачи Коши для линейного параболического уравнения (42). Давая, как и в лемме 2, обоснование применимости результатов [3] о единственности решения такой задачи, заключаем, что $z(x,t)\equiv 0$ в области $\overline{Q}$. Но тогда из (43) вытекает, что $w(t)=0$, т.е. исходя из вида функции $\theta(t)$ $\theta(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$, что и требовалось доказать. Лемма 5 установлена.

Леммы 4, 5 уже дают возможность показать, что $\Delta u\equiv 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$ с помощью рассуждений, подобных проведенным при завершении доказательства теоремы 1.

Замечание 2. Теорема 3 остается справедливой и в том случае, когда неравенство $|p_0(x,t)|\geqslant p_0>0$ имеет место в некоторой области $Q'=\{0\leqslant x<x_1, 0\leqslant t\leqslant T\}\subset\overline{Q}$, вне которой $p_0(x,t)=0$.

3.3. В случае смешанных краевых условий обратная задача с граничным переопределением также не обладает, вообще говоря, свойством единственности, если функция f в правой части уравнения (1) ищется в виде $f(x,t)$, а не $f(t)$. Это показывает следующий пример, аналогичный примеру 1.

Пример 2. Для функций

$$\begin{cases} u_1(x,t)=x^2t\exp(-x),\\ f_1(x,t)=\big(x^2-t(x^2-4x+2)\big)\exp(-x),\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(x,t)=x^3t\exp(-x^2),\\ f_2(x,t)=\big(x^3-t(4x^5-14x^3+6x)\big)\exp(-x^2)\end{cases}$$

в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ выполнены соотношения

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x + u|_{x=1} = 2t\exp(-1), \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

с граничным переопределением при $x = 1$: $u|_{x=1} = t\exp(-1)$, $0 < t \leqslant T$. Таким образом, для этой обратной задачи нарушена единственность решения.

3.4. Рассмотрим теперь обратную задачу со смешанными краевыми условиями для линейного параболического уравнения (31), включающую в себя условия (34) и (33) при $x = 0$ и $x = l$, начальное условие (4) и граничное наблюдение (5). Сформулируем теорему единственности для такой задачи.

Теорема 4. *Предположим, что входные данные линейной краевой задачи* (31), (34), (33), (4) *удовлетворяют требованиям гладкости и согласования:*

$$a, a_x, b, c, d \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad 0 < \lambda < 1, \quad i = 0, 1,$$

$$v(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T], \quad e_1, q_1 \in H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0,T], \quad e_1 \geqslant 0, \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0,l],$$
$$v|_{t=0} = \varphi|_{x=0}, \quad a(x,0)\varphi_x + e_1(0)\varphi|_{x=l} = q_1(0),$$

обеспечивающим существование и единственность $u(x,t)$ в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ в правой части уравнения (31), *такой, что*

$$c(x,0)v_t - L\varphi|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)|_{x=0}. \tag{46}$$

Пусть, кроме того, производные b_x и c_t непрерывны в $\overline{Q}$, функция $g(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]$, $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$.

Тогда в случае существования решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ обратной задачи, удовлетворяющего соотношениям (31), (34), (33), (4), (46) *и граничному наблюдению* (5), *оно определяется однозначно в классе функций $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$.*

Вывод теоремы 4 повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 3, при этом остается в силе замечание 2.

4. Построение устойчивых приближенных решений в классах Гельдера.

4.1. Рассматриваемый класс обратных задач с данными Коши для параболических уравнений с неизвестной правой частью относится к некорректно поставленным задачам. Их решение в случае существования не обладает устойчивостью относительно погрешностей входных данных. Это подтверждает следующий

Пример 3. Функции
$$u^0(x,t) = t(4 - x^2), \quad f^0(t) = t$$
являются точным решением обратной задачи в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$u_t - u_{xx} = f(t) + t - x^2 + 4, \quad (x,t) \in Q,$$
$$u_x - u|_{x=0} = -4t, \quad u_x|_{x=1} = -2t, \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

с граничным переопределением при $x = 1$:

$$u|_{x=1} = 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Пусть данные Коши на границе $x = 1$, т.е. функции $g(t) = 3t$ и $q(t) = -2t$, заданы приближенно

$$g_n(t) = g(t) + \delta_n(t), \quad q_n(t) = q(t) + \sigma_n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

с погрешностями $\delta_n(t) = n^{-2}t$, $\sigma_n(t) = n^{-1}t(2n^{-1} - 1)$, где $n > 0$ — любое целое. При $n \to \infty$ $\delta_n(t) \to 0$, $\sigma_n(t) \to 0$ в равномерной метрике. Решением обратной задачи с приближенными данными Коши $g_n(t)$ и $q_n(t)$ на границе $x = 1$ является пара функций

$$u_n = u^0 + \Delta_n u, \quad \Delta_n u = n^{-2}tx^2\exp n(1-x),$$
$$f_n = f^0 + \Delta_n f, \quad \Delta_n f = \{n^{-2}(x^2 - 2t) + tx(4n^{-1} - x)\}\exp n(1-x).$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ $\Delta_n u \to \infty$, $\Delta_n f \to \infty$ в метрике $C(\overline{Q})$.

Для построения приближенных решений, устойчивых к погрешностям входных данных этого класса обратных задач, необходимо применять регуляризирующие методы. Однако в случае квазилинейных параболических уравнений возникает проблема обоснования применимости известных принципов регуляризации, так как область применения некоторых из них (например, метода квазиобращения и методов сведения исходной задачи к интегральному уравнению) включает в себя только линейные параболические уравнения.

4.2. Дадим обоснование применимости вариационного метода квазирешений [9] для устойчивого приближенного решения обратной задачи (1) – (5) в классах Гельдера. Ее операторное представление имеет вид

$$Af = g, \quad f \in F \subset L_2[0,T], \quad g \in G \subset L_2[0,T], \tag{47}$$

где $A : F \to G$ — нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $f \in F$ след решения $u|_{x=l}$ краевой задачи (1) – (4) на границе $x = l$. Точным решением уравнения (47) является такой элемент $f^0 \in F$, для которого $u|_{x=l}$ совпадает с заданным элементом $g \in G$.

Предположим, что входные данные обратной задачи (1) – (5) удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда возможность определения оператора A для любого $f \in F$ и принадлежность $Af \in G$ обеспечиваются выбором F и G в виде

$$F = \{f(t) \in W_2^1[0,T]\}, \quad F \subset H^{\lambda/2}[0,T],$$
$$G = \{\omega(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]\}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Вариационный подход к постановке обратной задачи (1) – (5) основан на том, что решение операторного уравнения (47) эквивалентно минимизации в F функционала

$$\inf_{f \in F} J_g(f), \quad J_g(f) = \|Af - g\|_{L_2[0,T]}.$$

Для регуляризации этой некорректной вариационной задачи воспользуемся методом квазирешений на системе расширяющихся компактных в $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ множеств F_R, где

$$F_R = \{f \in F, \ \|f\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant R\}, \quad R = \mathrm{const} > 0.$$

Определение 3. Квазирешением уравнения (47) на множестве F_R назовем множество

$$F_R^* = \{f_R \in F_R, \ J_g(f_R) = \inf_{f \in F_R} J_g(f)\}.$$

Корректность задачи минимизации функционала $J_g(f)$ на F_R при любом фиксированном $R > 0$ и возможность построения квазирешения F_R^* (непустота F_R^*) следуют из теоремы Вейерштрасса в силу компактности в $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ множества F_R и следующего свойства функционала $J_g(f)$.

Теорема 5. *При выполнении входными данными требований* 1 – 3 *функционал* $J_g(f)$ *является непрерывным в* $H^{\lambda/2}[0,T]$ *на множестве* F_R *и слабо непрерывным в* $W_2^1[0,T]$ *на множествах* F_R *и* F.

Доказательство теоремы 5 проводится по той же схеме, что и вывод соответствующих утверждений в [8], и основано на оценках принципа максимума для краевой задачи вида (7) – (10), в которой $\Delta f = f^n - f$, $\{f^n\} \subset F_R$ — произвольная последовательность, сходящаяся в $H^{\lambda/2}[0,T]$ к некоторой функции $f \in F_R$, и где $\Delta u = u^n - u$, $u^n(x,t)$ и $u(x,t)$ — решения квазилинейной краевой задачи (1) – (4), соответствующие функциям $f^n(x)$ и $f(x)$ в правой части уравнения (1).

4.3. Допустим, что операторное уравнение (47) при данном g имеет точное решение $f^0 \in F$, т.е. $g \in AF$, где $AF \subseteq G$ — образ множества F в G. Тогда в случае принадлежности f^0 некоторому компакту $F_{\overline{R}}$ (т.е. если $\inf_{f \in F_{\overline{R}}} J_g(f) = 0$) квазирешение $F_{\overline{R}}^*$ на этом компакте состоит из единственного элемента f^0 в силу единственности точного решения обратной задачи (1) – (5) (теорема 1). Таким образом исходная задача сведена к вариационной задаче $\inf_{f \in F_{\overline{R}}} J_g(f)$, для которой выполнены все условия корректности в смысле А. Н. Тихонова.

Если же $f^0 \notin F_{\overline{R}}$, то любой элемент из множества квазирешений F_R^* $(\overline{R} < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^1[0,T]})$ сходится в $W_2^1[0,T]$ к f^0 при $R \to R^0$. А именно справедлива следующая теорема

Теорема 6. *Пусть входные данные обратной задачи* (1) – (5) *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и, кроме того, при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *производные* a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u, d_u *непрерывны в смысле Гельдера по* x, t, *и с показателями* λ, $\lambda/2$, λ *соответственно, производные* e_{iu} *удовлетворяют условию Гельдера по* t *с показателем* $(1+\lambda)/2$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|u| \leqslant M_0$, $0 < \lambda < 1$, $i = 0, 1$.

Тогда квазирешение F_R^*, определенное для любого R, $0 < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^1[0,T]}$, α-сходится к точному решению f^0 операторного уравнения (47) *при $R \to R^0$:*

$$F_R^* \xrightarrow{\alpha} f^0 \ (W_2^1[0,T]). \tag{48}$$

При этом для $R \to R^0$

$$U_R^* \xrightarrow{\alpha} u^0 \ (H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})), \tag{49}$$

где $U_R^* = \{u_R(x,t)\}$ — множество решений квазилинейной краевой задачи (1) – (4), *соответствующее множеству F_R^* функций $f_R(x)$ в правой части уравнения* (1), *$\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ — точное решение обратной задачи* (1) – (5) *в смысле определения* 1.

Доказательство утверждений (48), (49) аналогично доказательству соответствующих утверждений в [8]. Оно основано, в частности, на оценках устойчивости в классах Гельдера краевой задачи (1) – (4)

$$|\Delta u|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K|\Delta f|_{[0,T]}^{\lambda/2}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad K = \text{const} > 0,$$

вытекающих из [7] и соотношений вида (7) – (10), в которых $\Delta u = u_R - u^0$, $\Delta f = f_R - f^0$. Как следствие теоремы 6, любой элемент из множества квазирешений $f_R \in F_R^*$ и соответствующее ему решение краевой задачи (1) – (4) являются приближениями в соответствующих классах Гельдера к решению $\{u^0, f^0\}$ обратной задачи с граничным переопределением.

4.4. Рассмотрим вопрос устойчивости метода квазирешений при приближенном задании оператора A и правой части g в операторном представлении (47) обратной задачи.

Пусть функции a_h, b_h, c_h, d_h, φ_h, p_{ih}, e_{ih}, q_{ih} ($i = 0,\ 1$) и g_δ — достаточно гладкие приближения входных данных, определяющие, в частности, оператор L_h (ср. с (1)):

$$L_h u \equiv (a_h(x,t,u)u_x)_x - b_h(x,t,u)u_x - d_h(x,t,u).$$

Тогда вариационная постановка обратной задачи принимает вид

$$\inf_{f_h \in F_R} J_{g_\delta}^h(f_h), \quad J_{g_\delta}^h(f_h) = \|A_h f_h - g_\delta\|_{L_2[0,T]},$$

где A_h — нелинейный оператор, сопоставляющий каждому элементу множества F_R след решения $u_h|_{x=l}$ краевой задачи (1) – (4) с приближенно заданными входными данными. Имеет место

Теорема 7. *Пусть гладкие приближения входных данных обратной задачи* (1) – (5) *удовлетворяют условиям теоремы* 6 *и сходятся при $h \to 0$ равномерно в области своего определения к соответствующим точным входным данным:*

$$a_h \to a \ (H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})), \quad a_{hx}, a_{hu}, b_h, c_h, d_h \to a_x, a_u, b, c, d \ (H^{\lambda,\lambda/2,\lambda}(\overline{D})),$$

$$p_{ih} \to p_i \ (H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})), \quad e_{ih}, q_{ih} \to e_i, q_i \ (H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0,T]), \quad i = 0, 1,$$

$$\varphi_h \to \varphi \ (H^{2+\lambda}[0,l]), \quad 0 < \lambda < 1,$$

и пусть $g_\delta \to g$ $(L_2[0,T])$ при $\delta \to 0$.

Тогда квазирешение $F_{\delta hR}^*$ на компакте F_R, определяемое как

$$F_{\delta hR}^* = \{f_{\delta hR} \in F_R,\ \ J_{g_\delta}^h(f_{\delta hR}) = \inf_{f \in F_R} J_{g_\delta}^h(f)\},$$

при любом $R \geqslant R^0 = \|f^0\|_{W_2^1[0,T]}$ α-сходится к точному решению f^0 операторного уравнения (47) *при $(h,\delta) \to 0$:*

$$F_{\delta hR}^* \xrightarrow{\alpha} f^0 \ (H^{\lambda/2}[0,T]).$$

При этом для $(h,\delta) \to 0$

$$U_{\delta hR}^* \xrightarrow{\alpha} u^0 \ (H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})),$$

где $\{U_{\delta hR}^*\}$ — множество решений краевой задачи (1) – (4) *с приближенными входными данными, получаемое при пробегании функцией $f(t)$ в правой части уравнения* (1) *множества $F_{\delta hR}^*$, $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ — точное решение обратной задачи* (1) – (5) *в смысле определения* 1.

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующих утверждений в [8] (см. также [1]).

Замечание 3. Если не предполагать существования решения операторного уравнения (47) (что естественно в обратных задачах проектирования и управления), то, как и в [1, 8], можно ввести понятие обобщенного квазирешения уравнения (47) на компакте F_R, которое также обладает устойчивостью относительно погрешностей в задании A и g.

Замечание 4. Обоснование применимости метода квазирешений для устойчивого приближенного решения обратной задачи со смешанными краевыми условиями (1), (34), (3) – (5) проводится по аналогичной схеме. При этом выбор множества F должен учитывать требование согласования (35):

$$F = \{f(t) \in W_2^1[0,T],\ c(x,0,\varphi)v_t - L\varphi|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)|_{x=0}\},$$

что приводит при приближенном задании входных данных к множеству F_h:

$$F_h = \{f_h(t) \in W_2^1[0,T],\ c_h(x,0,\varphi_h)v_{ht} - L_h\varphi_h|_{x=0,t=0} = p_{0h}(x,0)f_h(0) + p_{1h}(x,0)|_{x=0}\}.$$

Устойчивость квазирешений относительно погрешностей в задании A_h, F_h и правой части g_δ в операторном представлении (47) устанавливается при соответствующих требованиях теоремы 7 и дополнительном условии

$$v_h \to v\ (H^{1+\lambda/2}[0,T]), \quad v_h|_{t=0} = \varphi_h|_{x=0}.$$

Подробное обоснование аналогичных утверждений приведено в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдман Н.Л.* Обратная задача с финальным переопределением для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной правой частью // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 1. 155–170.
2. *Гольдман Н.Л.* Единственность определения правой части в квазилинейных параболических уравнениях с финальным и граничным наблюдением // Доклады РАН. 2004. **395**, № 2. 1–6.
3. *Ландис Е.М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1959. **14**, № 1. 21–85.
4. *Клибанов М.В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Доклады АН СССР. 1985. **280**, № 3. 533–536.
5. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York, Basel: Marcel Dekker, 1999.
6. *Engl H.W., Scherzer O., Yamamoto M.* Uniqueness and stable determination of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data // Inverse Problems. 1994. **10**, N 6. 1253–1276.
7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во МГУ, 1999.
9. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Труды МИ АН СССР. 1971. **112**. 232–240.

Поступила в редакцию
01.03.2004