



doi 10.26089/NumMet.v23r103

УДК 550.341

Численная реализация метода обращения полного волнового поля с использованием асимптотического решения уравнения Гельмгольца

К. Г. Гадыльшин

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-7247-6911, e-mail: gadylshinkg@ipgg.sbras.ru

Д. А. Неклюдов

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-0495-0156, e-mail: neklyudovda@ipgg.sbras.ru

М. И. Протасов

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-0449-1639, e-mail: protasovmi@ipgg.sbras.ru

Аннотация: В работе рассматривается численная реализация метода обращения полного волнового поля на основе асимптотического решения уравнения Гельмгольца. Классическая постановка задачи заключается в поиске минимума штрафной функции, характеризующей среднеквадратичное отклонение модельных данных от зарегистрированных при проведении полевых работ. Для минимизации целевого функционала обычно применяются методы локальной оптимизации, такие как метод сопряженных градиентов. Именно вычисление градиента штрафной функции и является самой ресурсоемкой частью задачи. Асимптотический подход к решению обратной динамической задачи сейсмологии заключается в замене дорогостоящей конечно-разностной процедуры расчета функции Грина краевой задачи частотно-зависимым лучевым трассированием. Функции Грина рассчитываются на основании данных о времени пробега вдоль лучей, об амплитуде и о геометрическом расхождении. Серия численных экспериментов для широкоизвестной модели Marmousi демонстрирует эффективность применения такого подхода к реконструкции макроскоростного строения сложноустроенных сред для низких временных частот. При сопоставимом качестве решения обратной задачи применительно к стандартному конечно-разностному подходу скорость расчетов асимптотического метода на порядок выше.

Ключевые слова: метод обращения полного волнового поля, уравнение Гельмгольца, асимптотическое решение, макроскоростное строение среды.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ЧНФ в рамках научного проекта № 20–55–26003.

Для цитирования: Гадыльшин К.Г., Неклюдов Д.А., Протасов М.И. Численная реализация метода обращения полного волнового поля с использованием асимптотического решения уравнения Гельмгольца // Вычислительные методы и программирование. 2022. **23**, № 1. 29–45. doi 10.26089/NumMet.v23r103.



Numerical implementation of the Full Waveform Inversion method using the asymptotic solution of the Helmholtz equation

Kirill G. Gadylshin

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0001-7247-6911, e-mail: gadylshinkg@ipgg.sbras.ru

Dmitry A. Neklyudov

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0002-0495-0156, e-mail: neklyudovda@ipgg.sbras.ru

Maxim I. Protasov

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0003-0449-1639, e-mail: protasovmi@ipgg.sbras.ru

Abstract: In this paper, we consider the numerical implementation of the Full Waveform Inversion method based on the asymptotic solution of the Helmholtz equation. The standard method finds the minimum of the penalty function, which characterizes the mean-square deviation of the modeled data from the observed ones during conducting the field works. Local optimization methods, such as the conjugate gradient method, are usually used to minimize the objective functional. The calculation of the penalty function gradient is the most resource-intensive part of the task. An asymptotic approach to solving an inverse dynamic seismic problem is to replace the expensive finite-difference procedure for calculating the Green's function of a boundary value problem by the frequency-dependent ray tracing. The Green's functions are calculated from data on the travel time along the rays, the amplitude and the geometric divergence. A series of numerical experiments for the widespread Marmousi model demonstrates the efficiency of applying of this approach to the reconstruction of macrovelocity structure of complex media for low temporal frequencies. In comparison with the standard finite-difference approach, applied to solving the inverse problem, the speed of calculations of the asymptotic method is an order of magnitude higher upon comparable quality of the solution.

Keywords: full waveform inversion, Helmholtz equation, asymptotic solution, macrovelocity component.

Acknowledgements: The reported study was funded by RFBR and GACR, project number 20–55–26003.

For citation: K. G. Gadylshin, D. A. Neklyudov, and M. I. Protasov. “Numerical implementation of the Full Waveform Inversion method using the asymptotic solution of the Helmholtz equation,” Numerical Methods and Programming. 23 (1), 29–45 (2022). doi 10.26089/NumMet.v23r103.

1. Введение. Современная сейсморазведка — бурно развивающаяся отрасль, стоящая на стыке различных наук: геологии, геофизики, вычислительной математики, механики сплошных сред. В ней самым тесным образом переплетаются потребности в прикладных, инженерных исследованиях с необходимостью развития теории для более глубокого понимания тех процессов, с которыми приходится иметь дело на практике. В последние годы геологические задачи, которые приходится решать сейсмическими методами, становятся все сложнее. Значительно возросли требования к детальности и достоверности прогнозов, полученных при интерпретации сейсмических данных, так как поиск новых месторождений приходится вести в районах со сложными геологическими или инженерными условиями. Для успешного решения возникающих на практике задач необходимо привлекать новые методы наблюдений и обработки сейсмических данных, т.е. регистрировать и извлекать как можно более полную и достоверную информацию о



строении среды. В качестве одного из подтверждений указанной тенденции можно упомянуть о том, что стандартные для прошлых лет упрощенные методики построения сейсмических изображений (сейсмической миграции), основанные на предположении о почти горизонтальном залегании осадочных пород (временная миграция), уже совершенно не удовлетворяют современным требованиям при работе в новых районах. Стандартом становится применение процедур, не использующих упрощенных представлений о среде. Одной из таких процедур, привлекающих повышенное внимание специалистов в последнее время, является метод обращения полного волнового поля (FWI — аббревиатура от англ. Full Waveform Inversion). Основным теоретическим базисом определения скоростной модели на основе полного волнового поля является решение обратной динамической задачи сейсмологии в полной постановке.

Остановимся на нашем понимании места, которое занимают методы обращения полного волнового поля в современном подходе к изучению внутреннего строения геологической среды. С момента возникновения современной сейсмологии в конце XIX века вплоть до середины XX века основное внимание уделялось использованию данных о времени пробега сейсмических волн [1–3]. Привлечению амплитуд серьезное внимание стали уделять лишь с 70-х годов прошлого века, когда современные сейсмические системы наблюдений смогли предоставить сейсмограммы, которые можно было сравнивать с синтетическими. Именно тогда разведочная сейсмика взяла на себя задачу построения изображений недр с высоким разрешением путем использования плотных, многоуровневых систем сбора данных. Использование ограниченных выносов в системах возбуждения и регистрации сейсмических волн, а также ограниченный частотный диапазон данных, приводят к слабой чувствительности получаемых изображений к возмущениям, соответствующим промежуточным длинам волн [4]. Именно это обстоятельство повлекло развитие двухэтапного подхода к обработке сейсмических данных:

- построение макромоделей на основе использования кинематических данных;
- построение сейсмических волновых изображений с привлечением различных типов миграционных процедур [5–10].

Этот подход весьма эффективен для сравнительно простых геологических объектов, хотя с его привлечением иногда удается добиться неплохих результатов и при отображении таких сложных структур, как соляные купола, перекрытые базальтами целевые объекты, предгорья и др. Для сложных геологических сред построение точной макроскоростной модели, обеспечивающей качественное выполнение миграционного преобразования, вплоть до настоящего времени остается чрезвычайно сложной задачей. Для ее решения на основе итерационного уточнения было предложено множество подходов [11, 12], но ни один из них не обеспечил полного решения проблемы ввиду низкой чувствительности отраженных сейсмических полей к изменчивости изучаемой среды на масштабе, сравнимом с доминирующей длиной волны. В начале 80-х годов прошлого века Р. Lailly [13] и А. Tarantola [14] переформулировали принцип построения миграционных изображений [15, 16] в виде локальной проблемы минимизации разности между наблюдаемыми и синтетическими данными при помощи метода наименьших квадратов. Они показали, что градиент штрафной функции, вдоль которого ищется возмущение модели, может быть построен путем кросс-корреляции между падающей волной, излученной источником, и продолженной в среду в обратном времени разницы между наблюдаемым и смоделированным волновыми полями. Скорректированная после первой итерации модель выглядит как результат применения миграции в обратном времени (RTM — аббревиатура от англ. Reverse Time Migration). Единственная разница состоит в том, что при реализации RTM в обратном времени в среду распространяется зарегистрированное волновое поле, в то время как при выполнении FWI в обратном времени распространяется невязка между зарегистрированным и рассчитанным для текущей модели волновыми полями. Полученная обновленная модель используется как стартовая для следующей итерации метода FWI. Таким образом, вычисление градиента обеспечивает весьма впечатляющий прирост объема информации и возможность перехода к определению физических параметров изучаемого геологического объекта. Процесс построения изображений путем сопоставления зарегистрированного и рассчитанного волновых полей требует весьма значительных вычислительных ресурсов даже для двумерных постановок [17]. Тем не менее этот подход успешно применялся в ряде исследований с привлечением различных методов моделирования волновых полей, таких как конечно-разностные методы [18–22], методы конечных элементов [23] и лучевые методы [24–26]. Подход, не требующий таких значимых вычислительных затрат, был предложен в работах [27] и [28]. Эта модификация основана на теоретической связи между обобщенным преобразованием Радона [29–31] и минимизацией методом наименьших квадратов, предложенной в работе [32]. Решение обратной задачи на основе асимптотического представления преобразования Радона

может быть рассмотрено как задача нелинейной оптимизации квазиньютоновского типа путем введения специального целевого функционала в пространстве данных. Этот подход апробирован и на синтетических, и на полевых данных. В ряде работ продемонстрирована возможность его переноса на трехмерные постановки [33, 34]. Так как функции Грина при реализации этого подхода вычисляются лучевым методом в слаженной среде, прямая задача может быть линеаризована с использованием борновской аппроксимации, и итерации для минимизации также выполняются в линейном приближении, макроскоростная модель при этом не изменяется. Семейство этих методов называют “миграция/обращение” или миграция до суммирования в истинных амплитудах (от англ. true amplitude Prestack Depth Migration — PSDM). Основное отличие этого подхода от FWI заключается в том, что в процессе минимизации гладкая макроскоростная модель не изменяется от итерации к итерации, а изменения претерпевают только локальные возмущения гладкой макроскоростной модели, порождающие рассеянные волновые поля. Напротив, при реализации FWI производится численное моделирование полного волнового поля на каждой итерации процесса минимизации для модели, полученной на предыдущем шаге. Тем самым в рассмотрение включаются все типы волн: рефрагированные волны, закритические отражения, кратные отражения и др. Методы для численного моделирования волновых полей, используемые в FWI, чрезвычайно разнообразны и включают метод конечных элементов [35, 36], метод конечных разностей [37], метод конечных объемов [38], псевдоспектральные методы [39], методы граничных интегральных представлений [40], обобщенный экраный метод, метод дискретных волновых чисел, обобщенный лучевой метод WKBJ и метод Маслова [41], полное интегральное представление и дифракционную теорию [42]. Современные реализации FWI пытаются восстановить достаточно широкий пространственный спектр в каждой точке среды, объединяя построение макроскоростной модели и миграционного изображения в одной процедуре. Примеры широкоазимутальных данных иллюстрируют возможность восстановления всего пространственного спектра среды [43, 44]. Здесь необходимо подчеркнуть, что обеспечение устойчивости обращения данных на больших выносах является еще не до конца исследованной проблемой из-за увеличивающейся нелинейности задачи, вносимой волновыми полями, распространяющимися на десятки длин волн, и из-за необходимости учета различных углов распространения [45].

Стандартная система наблюдения, используемая при проведении 3D сейсморазведочных работ, включает в себя от десятков до сотен тысяч источников, что соответствует разным правым частям в задаче сейсмического моделирования; то есть при расчете полного набора сейсмических данных необходимо решать серию из сотен тысяч задач. При этом пространственная дискретизация каждой такой задачи требует более чем 10^{11} степеней свободы и, как следствие, несколько терабайт оперативной памяти. Таким образом, каждая отдельная задача, каждый расчет поля одного источника требует использования суперкомпьютерных вычислений. Следовательно, требуемые вычислительные ресурсы для моделирования сейсмических данных для типичной системы наблюдения можно оценить примерно в 10^8 ядро-часов (при расчете на CPU). Эти оценки верны для самого простого случая — изотропной идеально упругой среды. При усложнении модели будет происходить кратное увеличение потребности в вычислительных ресурсах. В результате, в настоящее время, подобные полномасштабные расчеты практически не проводятся (один расчет занимает два-три года). Поэтому разработка новых методов численного моделирования волновых сейсмических полей и ускорения алгоритмов такого моделирования является чрезвычайно актуальной задачей.

Асимптотические методы работают значительно быстрее, чем методы, основанные на конечных разностях или конечных элементах, которые используются в большинстве разработанных алгоритмов обращения. Асимптотические решения существуют как в акустических, так и в изотропных, анизотропных и вязкоупругих средах, что позволяет учитывать эти сложные особенности геологической среды, не увеличивая при этом вычислительные затраты в отличие от использования “тяжелого” стандартного обращения. Конечно, здесь стоит отметить, что решение, полученное асимптотическим методом, отличается от результатов классических подходов к решению волнового уравнения. В данной работе мы ставим перед собой задачу проверить возможность практического применения асимптотического решения уравнения Гельмгольца в методе обращения полного волнового поля в двумерной постановке в области временных частот.



2. Теория и метод.

2.1. Классический метод обращения полного волнового поля. Обратная динамическая задача сейсмологии понимается как решение нелинейного операторного уравнения [46–49]:

$$F(m) = d, \quad (1)$$

где $F : M \rightarrow D$ есть нелинейный оператор, отображающий элемент m пространства моделей M в элемент d пространства данных D (оператор прямого моделирования). В данной работе в качестве управляющих уравнений рассматривается уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(x, z) + \frac{\omega^2}{c^2(x, z)} u = f(\omega) \delta(x - x_s) \delta(z - z_s), \quad (2)$$

здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, ω — угловая частота, $c(x, z)$ — скорость распространения волн в среде, (x_s, z_s) определяют позицию точечного источника, излучающего сигнал со спектром $f(\omega)$. Численная реализация основана на конечно-разностной аппроксимации дифференциального оператора с использованием схемы четвертого порядка по пространству [52]. В качестве граничных условий используются поглощающие граничные условия [53] (от англ. PML — perfectly matched layers). Взятие следа от решения этого уравнения в позициях приемников определяет правило, по которому строится оператор F .

Классическая постановка FWI заключается в поиске минимума штрафной функции, характеризующей среднеквадратичное отклонение синтетических данных, вычисленных для текущей модели среды, от зарегистрированных при проведении полевых работ:

$$m^* = \arg \min_{m \in M} (\|F(m) - d\|_D^2), \quad (3)$$

где $m(x, z) = c^{-2}(x, z)$ — квадрат медленности (медленность — величина, обратная к скорости распространения сейсмических волн).

Обычно методы локальной оптимизации, такие как метод сопряженных градиентов, применяются для минимизации целевого функционала (3):

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= m_k + \mu_k S_k, \quad S_0 = \nabla_0, \\ S_k &= -\nabla_k - \frac{\langle \nabla_k, \nabla_k - \nabla_{k-1} \rangle_M}{\langle \nabla_k, \nabla_{k-1} \rangle_M} S_{k-1}, \end{aligned}$$

где m_k — модель на k -ой итерации. Градиент ∇_k вычисляется следующим образом:

$$\nabla_k = \Re\{DF^* \delta d_k\}, \quad (4)$$

здесь $\delta d_k = F(m_k) - d$ — невязка в данных на текущей итерации, DF^* — оператор, сопряженный к первой производной Фреше оператора прямого моделирования (1), вычисленный в точке m_k , \Re — оператор взятия вещественной части.

Для эффективного вычисления градиента мы используем программный интерфейс MPI (от англ. Message Passing Interface) в рамках модели взаимодействия “ведущий/ведомый” (от англ. master/slave). Если в процессе решения обратной задачи используется Nf временных частот, то для численной реализации алгоритма потребуется один ведущий MPI-процесс и Nf ведомых MPI-процессов. Ведомый MPI-процесс с индексом i вычисляет частичный градиент для фиксированной временной частоты f_i и ассоциирован с соответствующим решением уравнения Гельмгольца (2). В рамках одного ведомого MPI-процесса решение уравнения Гельмгольца (2) строится параллельно с использованием стандарта OpenMP (от англ. Open Multi-Processing). Распараллеливание по OpenMP ведется по источникам: каждый источник считается на одном ядре. На следующем шаге ведущий MPI-процесс суммирует все частичные градиенты, полученные от ведомых MPI-процессов, выполняет обновление скоростной модели по методу сопряженных градиентов и возвращает уточненную скоростную модель обратно ведомым MPI-процессам. Этот процесс выполняется итеративно, пока не будут удовлетворены условия сходимости. На практике этот процесс останавливается или по истечении лимита времени на суперкомпьютере, или когда целевой функционал перестает убывать.

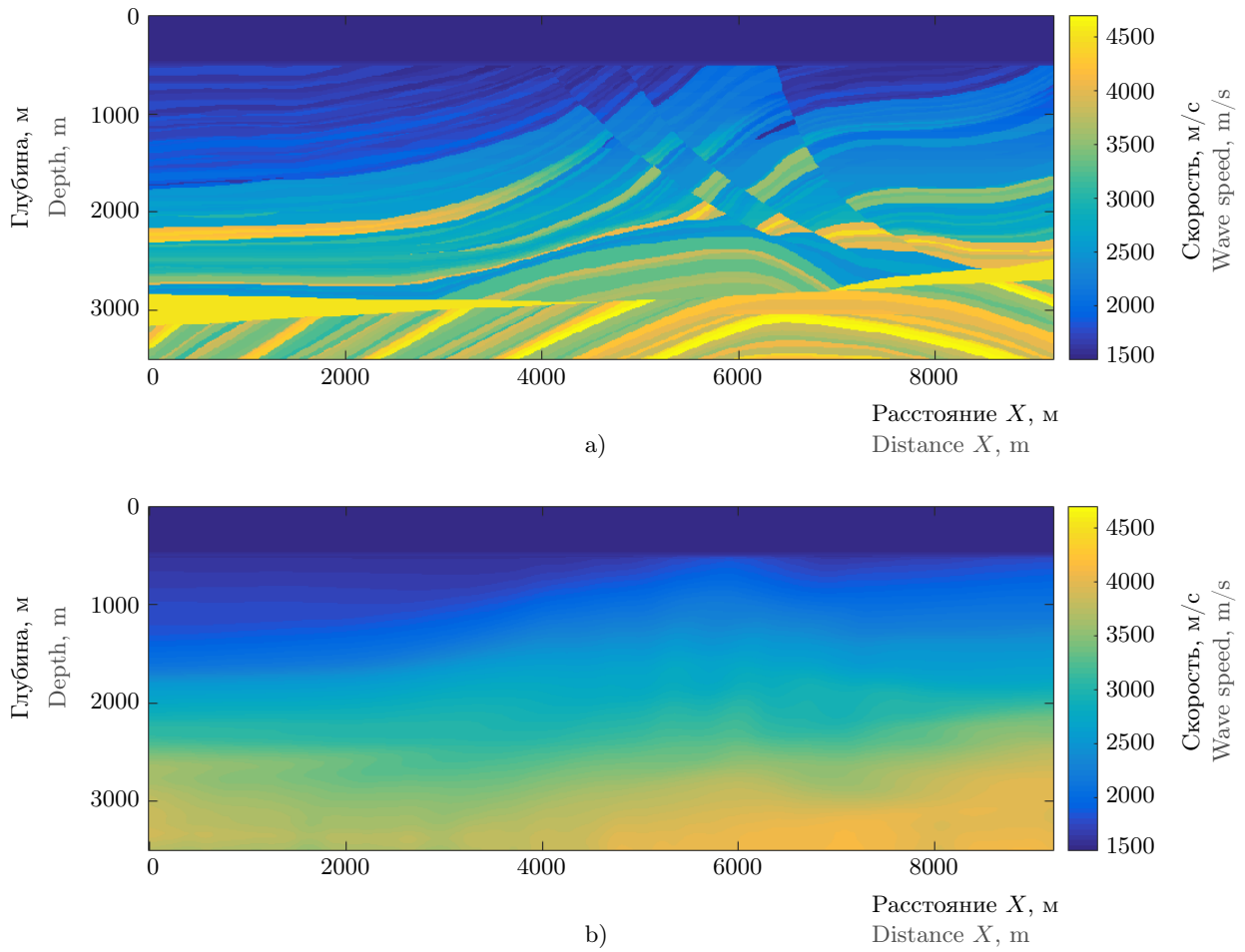


Рис. 1. Распределение скоростей в среде: а) модель Marmousi (истинное распределение);
б) начальное приближение для метода FWI

Fig. 1. Velocity distribution in the medium: a) the Marmousi model (true distribution);
b) the initial approximation for the FWI method

2.2. Асимптотический метод обращения полного волнового поля. Асимптотический подход к решению обратной задачи заключается в замене ресурсоемкой конечно-разностной процедуры решения волнового уравнения использованием его асимптотического решения [50, 51]. Формула (4) для расчета градиента, записанная в терминах функции Грина краевой задачи для уравнения Гельмгольца, выглядит следующим образом:

$$\nabla_k = \Re \left\{ \sum_{s,r,\omega} \omega^2 G(x_s, z_s, x, z; \omega; m) G(x, z, x_r, z_r; \omega; m) \overline{\delta d_{s,r}} \right\}, \quad (5)$$

где \Re — вещественная часть, $G(x_s, z_s, x, z; \omega; m)$ — функция Грина для точечного источника, расположенного в точке (x_s, z_s) , вычисленная в модели m для частоты ω ; $G(x, z, x_r, z_r; \omega; m)$ — функция Грина для источника, помещенного в точку приемника с координатой (x_r, z_r) , а $\delta d_{s,r}$ — невязка в данных в приемнике с индексом r , зарегистрированная при срабатывании источника с индексом s .

Таким образом, расчет градиента (5) сводится к многократному вычислению функций Грина для всех положений источников и приемников, а значит, ускорение расчетов именно этой части и представляет большой интерес. В данном подходе мы использовали асимптотический метод, который основан на трассировании лучей Ломакса [54]. Функции Грина рассчитываются на основании данных о времени пробега вдоль лучей, об амплитуде и о геометрическом расхождении [55]. Для апробации предлагаемого подхода к выполнению обращения полного волнового поля была взята модель Marmousi (рис. 1), которая является эталоном в тестировании алгоритмов инверсии. Размеры целевой области составляют 9200 м по латерали



Таблица 1. Время расчета функции Грина для точечного источника в различных подходах

Table 1. Calculation time of the Green's function for a point source in different approaches

Метод расчета Calculation method	Время расчета функции Грина для точечного источника, с Calculation time of the Green's function for a point source, s
Конечно-разностный подход Finite difference method	~ 80
Асимптотический подход Asymptotic method	~ 5

и 3000 м по глубине (первые 500 м скоростной модели – это слой воды, который считается известным). Расчетная сетка состоит из 921 точки по горизонтали и 351 точки по вертикали, с шагом по пространству в 10 м. Система возбуждения-регистрации состоит из 91 источника типа точка расширения и 459 геофонов, расположенных на поверхности воды с шагами 100 м и 20 м соответственно.

Сравнительный анализ времени расчета функции Грина в модели Marmousi для одного источника на одном OpenMP потоке представлен в табл. 1. Для расчетов использовался вычислительный сервер Supermicro с двумя процессорами Intel XEON GOLD-6230R (суммарно 52 ядра на узле) и 256 ГБ оперативной памяти. Мы использовали пространственную дискретизацию 10 м по латерали и 10 м по глубине. Таким образом, для частоты 10 Гц и минимальной скорости распространения волны 1500 м/с (слой воды) на длину волны приходится 15 точек, что является достаточным для схемы 4-го порядка. Основные параметры, которые влияют на скорость и точность расчетов в асимптотическом подходе, — это количество лучей, контролируемое шагом по углу, задающему начальное направление лучей, и шаг интегрирования при расчете траектории лучей. В приведенном примере параметры выбраны так, чтобы точность расчетов была наилучшей, т.е. при дальнейшем измельчении шага интегрирования и шага по углу точность расчетов не улучшается. При проведении серии предварительных численных экспериментов шаг интегрирования был выбран равным 0.001 с, шаг по углу — 0.0025 градуса. Как мы можем видеть, расчет одной функции Грина для одного источника асимптотическим методом выполняется на порядок быстрее, чем аналогичный расчет конечно-разностным методом.

3. Численные эксперименты. Целью наших численных экспериментов является определение границы применимости асимптотического метода обращения полного волнового поля. В качестве начального приближения при выполнении обращения полного волнового поля мы использовали сглаженное по Гауссу истинное распределение скоростей (рис. 1). Для этого мы сначала выполним численное сравнение градиентов в стартовой модели. Затем проведем эксперименты по сравнению результатов обращения для фиксированной временной частоты 3 Гц, а в конце проверим работоспособность метода для одновременного обращения нескольких временных частот.

3.1. Сравнение градиентов. Прежде чем приступить к полноценным численным экспериментам, проведем сравнение градиентов. Для этого мы вычисляем градиенты в стартовой модели (рис. 1) в классической постановке с использованием асимптотического решения уравнения Гельмгольца. Рассчитанные градиенты для частоты 3 Гц приведены на рис. 2. Как можно видеть, градиенты визуально совпадают. Это объясняется тем, что стартовая модель гладкая, волновая картина в ней достаточно простая и, как следствие, асимптотическое решение на основе лучевого приближения работает хорошо. Для количественной оценки сравнения градиентов введем в рассмотрение величину *MAPE* (от англ. Mean Absolute Percentage Error — средняя относительная ошибка в процентах):

$$MAPE(a, b) = \frac{1}{nz \times nx} \sum_{ix=1}^{nx} \sum_{iz=1}^{nz} \left| \frac{a(iz, ix) - b(iz, ix)}{a(iz, ix)} \right| \times 100\%, \quad (6)$$

где *a* — референтная сеточная функция (эталон), *b* — сеточная функция, для которой проводится сравнение, *nx* и *nz* — количество точек в расчетной сетке по горизонтали и глубине соответственно. Величина *MAPE* между классическим градиентом и асимптотическим составляет 2.7%.

3.2. Обращение для частоты 3 Гц. Так как в процессе обращения уточненная скоростная модель стремится к истинной скоростной модели, то и волновая картина будет существенно усложняться. В этом эксперименте мы продемонстрируем возможность применения асимптотического подхода к обращению

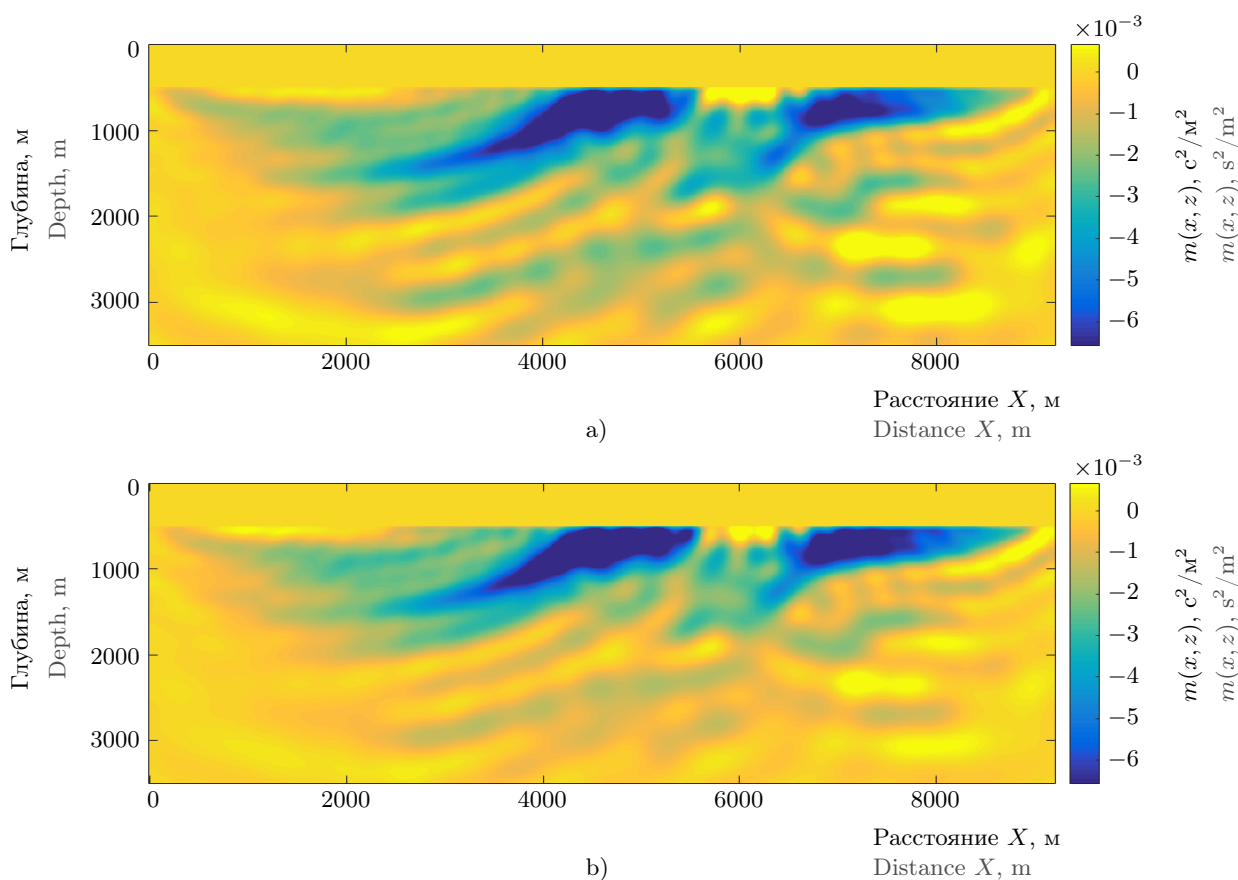


Рис. 2. Градиент целевого функционала в терминах квадрата медленности $m(x, z)$ сейсмических волн частотой 3 Гц: а) рассчитанный для модели Marmousi классическим FWI методом; б) рассчитанный для модели Marmousi асимптотическим методом

Fig. 2. The gradient of the objective functional in terms of square of slowness $m(x, z)$ of seismic waves with a frequency of 3 Hz: a) calculated for the Marmousi model by the classical FWI method; b) calculated for the Marmousi model by the asymptotic method

Таблица 2. Значения $MAPE$ для различных комбинаций сценариев обращения

Table 2. $MAPE$ values for various combinations of the inversion scenarios

Частоты для обращения Frequencies for inversion	$MAPE$ (vp_CLS , vp_ASYM)	$MAPE$ (vp_CLS , vp_true)	$MAPE$ (vp_ASYM , vp_true)
3 Гц 3 Hz	1.5%	7.5%	7.7%
5, 7, 10 Гц 5, 7, 10 Hz	4%	5.7%	7.1%

полного волнового поля для уточнения макроскоростной модели на частоте 3 Гц. В табл. 2 приведены значения $MAPE$ (6) между скоростными моделями, полученными в результате различных сценариев обращения: vp_true — истинная скоростная модель, vp_CLS — результат классического метода обращения полного волнового поля и vp_ASYM — результат асимптотического обращения. Результаты обращения приведены на рис. 3. Как можно увидеть, восстановленная модель, полученная с использованием асимптотического решения уравнения Гельмгольца, в целом похожа на результат классического обращения

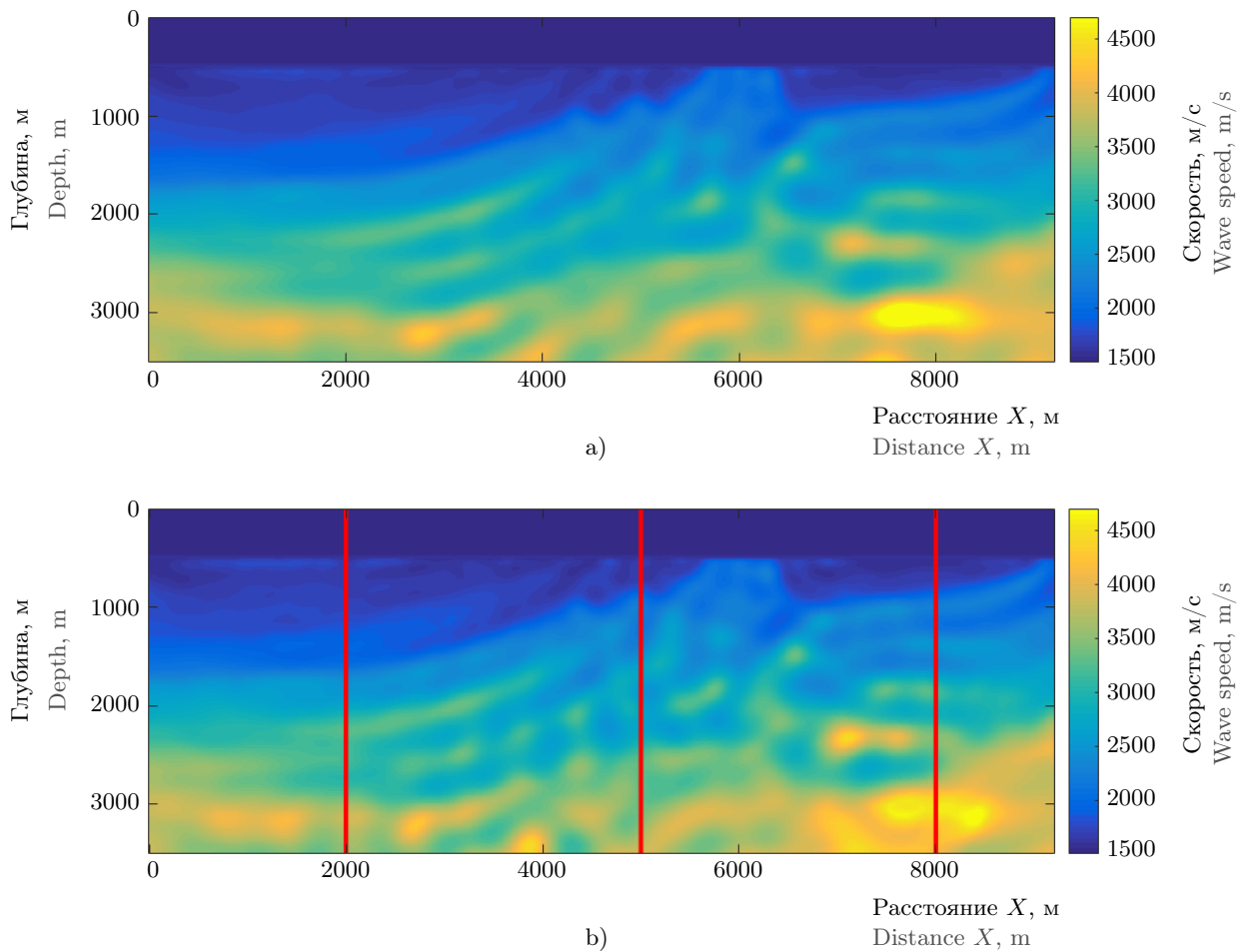


Рис. 3. Распределение скоростей сейсмических волн частотой 3 Гц в среде: а) классический метод FWI; б) асимптотический метод (красными линиями показаны положения вертикальных профилей скоростей (рис. 4) для оценки качества обращения)

Fig. 3. The distribution of seismic wave velocities with a frequency of 3 Hz in the medium: a) the classical FWI method; b) the asymptotic method (the positions of the vertical velocity profiles (Fig. 4) are shown by red lines for estimation of the inversion quality)

(*MAPE* составляет 1.5%, см. табл. 2). Для более детального анализа результатов приведем сравнение вертикальных профилей для трех различных латеральных координат (рис. 4). Исходя из этого сравнения, можно сделать вывод, что даже для такой сложной модели, как Marmousi, уточнение макроскоростной модели на низких частотах можно проводить с использованием асимптотического приближения. Косвенно это также подтверждается поведением штрафной функции в процессе минимизации (рис. 5) — вплоть до 35-й итерации отмечается схожее поведение целевых функционалов. Это означает, что для низких временных частот восстановленные скоростные модели для обоих сценариев способны объяснять большую часть наблюдаемых данных (невязка падает почти на 3 порядка).

3.3. Обращение для набора частот 5, 7, 10 Гц. На заключительном этапе мы проведем эксперимент одновременного обращения для набора из трех временных частот: 5, 7, 10 Гц. Здесь в качестве начальной скоростной модели для минимизации по методу сопряженных градиентов использовались модели, полученные после обращения для частоты 3 Гц (рис. 3) соответственно для каждого сценария обращения. Соответствующие результаты обращения представлены на рис. 6. Величина *MAPE* между классическим обращением и асимптотическим составляет 4%. Более детальный анализ *MAPE* для различных сценариев обращения представлен в табл. 2. По уменьшению ошибки результата обращения относительно истинной модели видно, что в обоих случаях модель улучшается. Однако результат классического обращения лучше, поскольку ошибка относительно истинной модели меньше.

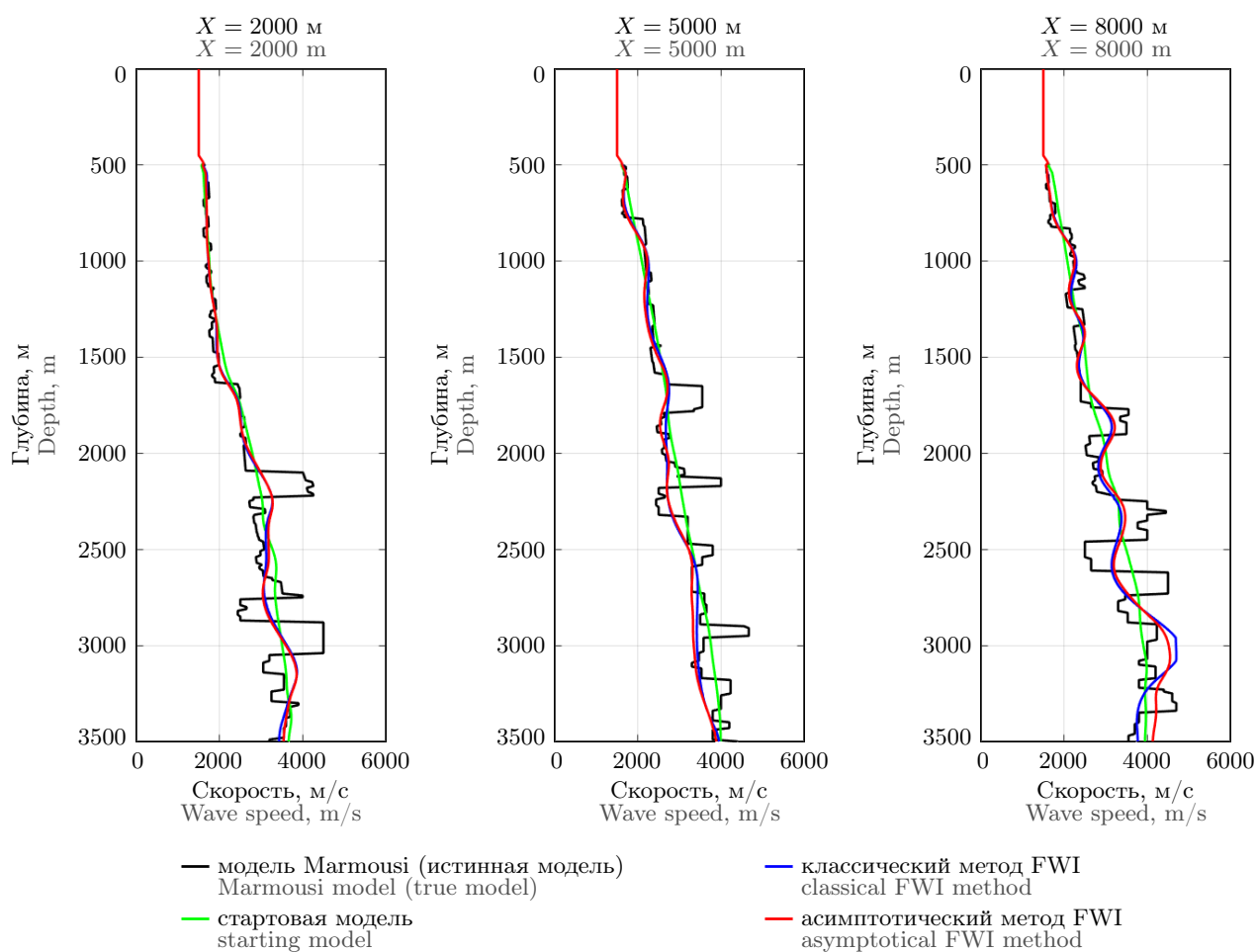


Рис. 4. Оценка качества восстановления скоростной модели по вертикальным профилям скоростей для различных латеральных координат и различных сценариев обращения сейсмических волн частотой 3 Гц

Fig. 4. Evaluation of the reconstruction quality of the velocity model from vertical velocity profiles for various lateral coordinates and different scenarios of inversion of seismic waves with a frequency of 3 Hz

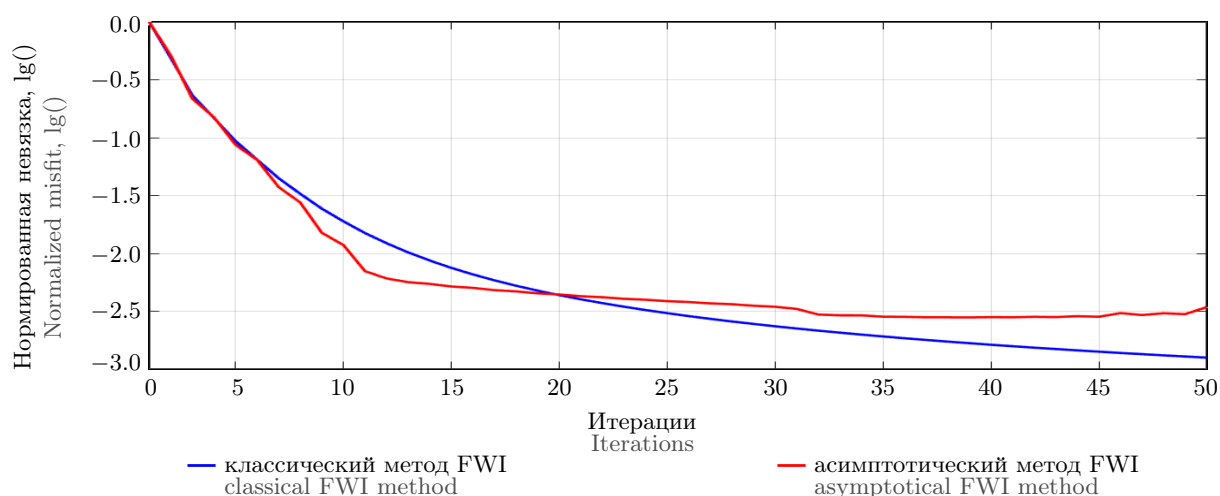


Рис. 5. Зависимость целевого функционала (невязки), нормированного к значению, полученному на первой итерации, от количества итераций для двух сценариев обращения на частоте 3 Гц

Fig. 5. The dependence of the objective functional (misfit), normalized to the value, obtained at the first iteration, on the number of iterations for two inversion scenarios at frequency of 3 Hz

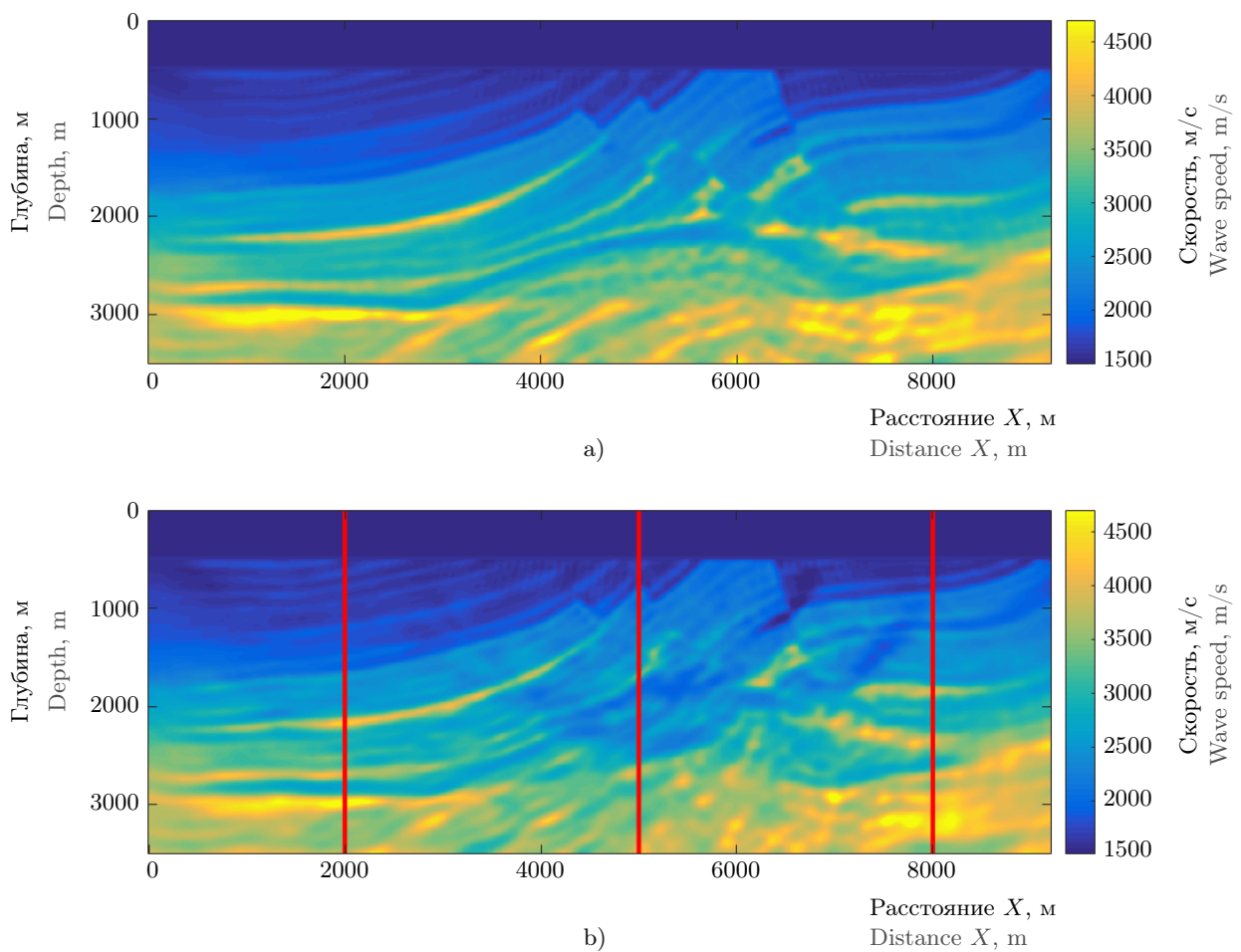


Рис. 6. Распределение скоростей сейсмических волн для частот 5, 7, 10 Гц в среде: а) классический метод FWI; б) асимптотический метод (красными линиями показаны положения вертикальных профилей скоростей (рис. 7) для оценки качества обращения)

Fig. 6. The distribution of seismic wave velocities for frequencies of 5, 7, 10 Hz in the medium:
a) the classical FWI method; b) the asymptotic method (the positions of the vertical velocity profiles (Fig. 7) are shown by red lines for estimation of the inversion quality)

Визуальный контроль качества приводит нас к выводу, что уточненная скоростная модель для классического сценария обращения выглядит лучше, особенно в области от $X = 4000$ м до $X = 7000$ м. Это связано с наличием сложных геологических структур в этой части модели и, как следствие, со сложной волновой картиной. Асимптотическое решение начинает сильнее отличаться от истинной скоростной модели, чем в предыдущем эксперименте для частоты 3 Гц, и поэтому результат обращения становится хуже. Более детальное сравнение вертикальных скоростных профилей представлено на рис. 7. Можно заметить, что для вертикальных профилей, соответствующих координатам $X = 2000$ м и $X = 8000$ м, результаты обращения сопоставимы. В то же время для вертикального профиля $X = 5000$ м результат асимптотического обращения существенно уступает классическому подходу.

4. Заключение. В работе рассмотрена численная реализация метода обращения полного волнового поля для двумерных акустических сред в двух постановках: в классической и в асимптотической. Классическая постановка заключается в реализации нелинейного метода наименьших квадратов применительно к обратной динамической задаче сейсмоки и основана на ресурсоемкой процедуре конечно-разностного решения уравнения Гельмгольца с использованием схемы 4-го порядка. Асимптотический подход заключается в применении частотно-зависимого лучевого метода решения волнового уравнения и для синтетической модели среды Marmousi позволяет на порядок ускорить процедуру построения градиента — самой сложной части в решении обратной задачи. Серия численных экспериментов на тест-

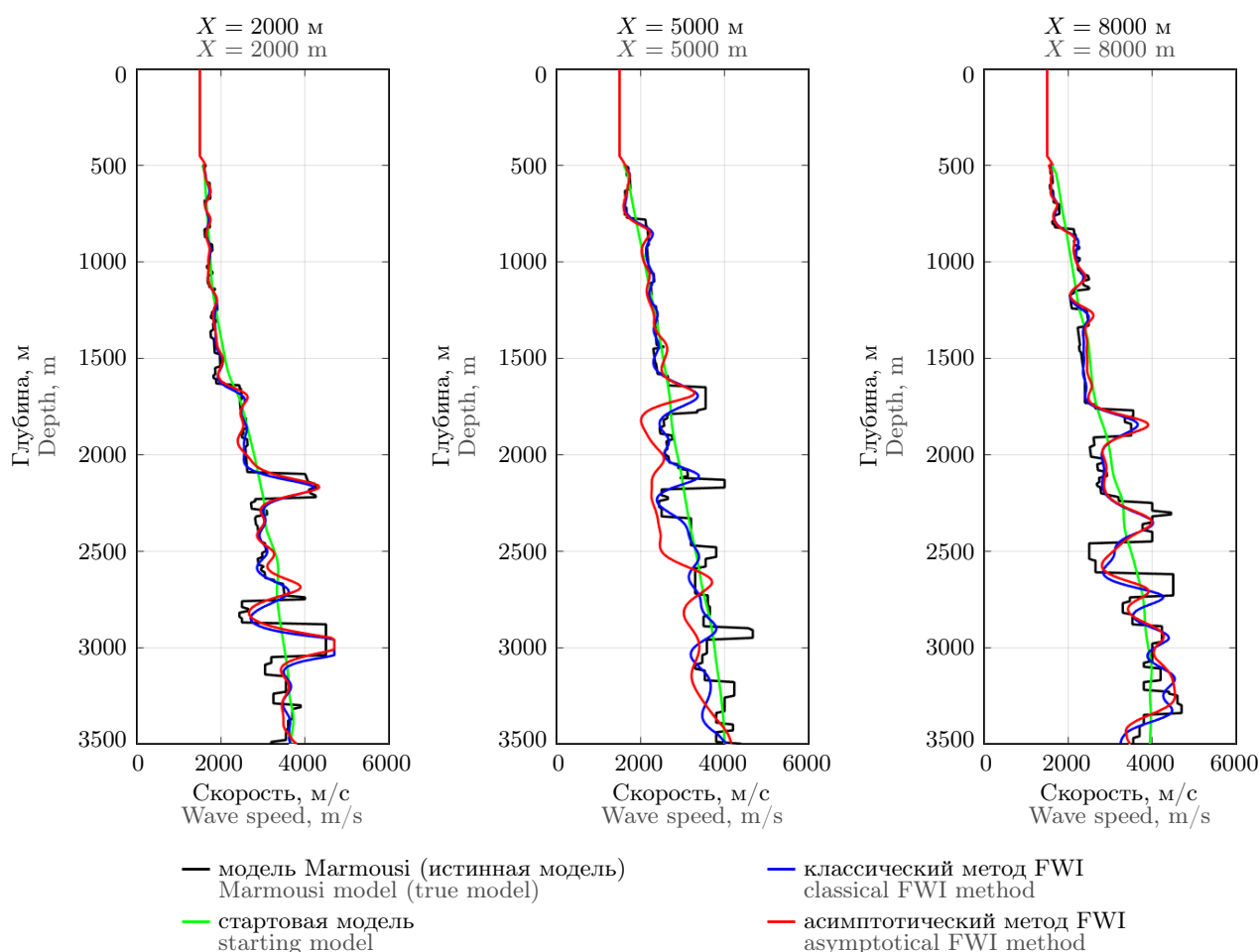


Рис. 7. Оценка качества восстановления скоростной модели по вертикальным профилям скоростей для различных латеральных координат и различных сценариев обращения сейсмических волн частотой 5, 7, 10 Гц

Fig. 7. Evaluation of the reconstruction quality of the velocity model from vertical velocity profiles for various lateral coordinates and various scenarios of inversion of seismic waves with a frequency of 5, 7, 10 Hz

вом материале демонстрирует возможность выполнения предложенной модификации метода обращения полного волнового поля даже применительно к сложноустроенным моделям среды. Для решения обратной задачи на низких временных частотах результат сопоставим с результатом классического алгоритма обращения, а значит, становится возможным восстанавливать макроскоростное строение среды за разумное время без потери точности реконструкции. При переходе к более высоким временным частотам наблюдается ухудшение качества решения в областях со сложным геологическим строением. Направление будущих исследований можно разделить на две части. В первой части планируется исследовать возможность использования результата асимптотического обращения на высоких временных частотах в качестве стартовой модели для классического обращения. В таком случае мы ожидаем уменьшение количества итераций в решении обратной задачи методом сопряженных градиентов, а значит, и сокращения ресурсоемких вычислений градиента конечно-разностным методом. Вторая часть наших будущих работ нацелена на численную реализацию асимптотического метода для трехмерных акустических и упругих сред.



Список литературы

1. *Oldham R.D.* The constitution of the Earth // Quarterly Journal of the Geological Society of London. 1906. **62**. 456–475. doi [10.1144/GSL.JGS.1906.062.01-04.21](https://doi.org/10.1144/GSL.JGS.1906.062.01-04.21).
2. *Gutenberg B.* Über Erdbebenwellen viia. Beobachtungen an Registrierungen von Fernbeben in Göttingen und Folgerungen über die Konstitution des Erdkörpers // Nachrichten von der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. 1914. **25**, N 3. 125–176.
3. *Lehmann I. P'* // Publications du Bureau Central Seismologique International, Série A, Travaux Scientifique. 1936. **14**. 87–115.
4. *Jannane M., Beydoun W., Crase E., et al.* Wavelengths of Earth structures that can be resolved from seismic reflection data // Geophysics. 1989. **54**, N 7. 906–910. doi [10.1190/1.1442719](https://doi.org/10.1190/1.1442719).
5. *Claerbout J.F., Doherty S.M.* Downward continuation of moveout corrected seismograms // Geophysics. 1972. **37**, N 5. 741–768. doi [10.1190/1.1440298](https://doi.org/10.1190/1.1440298).
6. *Gazdag J.* Wave equation migration with the phase-shift method // Geophysics. 1978. **43**, N 7. 1342–1351. doi [10.1190/1.1440899](https://doi.org/10.1190/1.1440899).
7. *Stolt R.H.* Migration by Fourier transform // Geophysics. 1978. **43**, N 1. 23–48. doi [10.1190/1.1440826](https://doi.org/10.1190/1.1440826).
8. *Baysal E., Kosloff D.D., Sherwood J.W.C.* Reverse-time migration // Geophysics. 1983. **48**, N 11. 1514–1524. doi [10.1190/1.1441434](https://doi.org/10.1190/1.1441434).
9. *Yilmaz Ö.* Seismic data analysis: processing, inversion and interpretation of seismic data. Tulsa: SEG Press, 2001.
10. *Biondi B., Symes W.W.* Angle-domain common-image gathers for migration velocity analysis by wavefield-continuation imaging // Geophysics. 2004. **69**, N 5. 1283–1298. doi [10.1190/1.1801945](https://doi.org/10.1190/1.1801945).
11. *Snieder R., Xie M.Y., Pica A., Tarantola A.* Retrieving both the impedance contrast and background velocity: a global strategy for the seismic reflection problem // Geophysics. 1989. **54**, N 8. 991–1000. doi [10.1190/1.1442742](https://doi.org/10.1190/1.1442742).
12. *Docherty P., Silva R., Singh S., et al.* Migration velocity analysis using a genetic algorithm // Geophysical Prospecting. 2003. **45**, N 5. 865–878. doi [10.1046/j.1365-2478.1997.640298.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-2478.1997.640298.x).
13. *Lailly P.* The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations // Proc. Conference on Inverse Scattering — Theory and Application. Philadelphia: SIAM Press, 1983. 206–220.
14. *Tarantola A.* Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation // Geophysics. 1984. **49**, N 8. 1259–1266. doi [10.1190/1.1441754](https://doi.org/10.1190/1.1441754).
15. *Claerbout J.F.* Toward a unified theory of reflector mapping // Geophysics. 1971. **36**, N 3. 467–481. doi [10.1190/1.1440185](https://doi.org/10.1190/1.1440185).
16. *Claerbout J.F.* Fundamentals of geophysical data processing. New York: McGraw–Hill, 1976.
17. *Gauthier O., Virieux J., Tarantola A.* Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: numerical results // Geophysics. 1986. **51**, N 7. 1387–1403. doi [10.1190/1.1442188](https://doi.org/10.1190/1.1442188).
18. *Kolb P., Collino F., Lailly P.* Prestack inversion of a 1-D medium // Proceedings of the IEEE. 1986. **74**, N 3. 498–508. doi [10.1109/PROC.1986.13490](https://doi.org/10.1109/PROC.1986.13490).
19. *Ikelle L.T., Diet J.P., Tarantola A.* Linearized inversion of multioffset seismic reflection data in the $\omega - k$ domain: depth-dependent reference medium // Geophysics. 1988. **53**, N 1. 50–64. doi [10.1190/1.1442399](https://doi.org/10.1190/1.1442399).
20. *Crace E., Pica A., Noble M., et al.* Robust elastic non-linear waveform inversion: application to real data // Geophysics. 1990. **55**, N 5. 527–538. doi [10.1190/1.1442864](https://doi.org/10.1190/1.1442864).
21. *Pica A., Diet J.P., Tarantola A.* Nonlinear inversion of seismic reflection data in laterally invariant medium // Geophysics. 1990. **55**, N 3. 284–292. doi [10.1190/1.1442836](https://doi.org/10.1190/1.1442836).
22. *Djikpéssé H.A., Tarantola A.* Multiparameter l_1 -norm waveform fitting: interpretation of Gulf of Mexico reflection seismograms // Geophysics. 1999. **64**, N 4. 1023–1035. doi [10.1190/1.1444611](https://doi.org/10.1190/1.1444611).
23. *Choi Y., Min D.-J., Shin C.* Two-dimensional waveform inversion of multi-component data in acoustic-elastic coupled media // Geophysical Prospecting. 2008. **56**, N 6. 863–881. doi [10.1111/j.1365-2478.2008.00735.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2008.00735.x).
24. *Cary P.W., Chapman C.H.* Automatic 1-D waveform inversion of marine seismic refraction data // Geophysical Journal International. 1988. **93**, N 3. 527–546. doi [10.1111/j.1365-246X.1988.tb03879.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1988.tb03879.x).
25. *Koren Z., Mosegaard K., Landa E., Thore P., Tarantola A.* Monte Carlo estimation and resolution analysis of seismic background velocities // Journal of Geophysical Research. Solid Earth. 1991. **96**, N B12. 20289–20299. doi [10.1029/91JB02278](https://doi.org/10.1029/91JB02278).
26. *Sambridge M., Drijkoningen G.* Genetic algorithms in seismic waveform inversion // Geophysical Journal International. 1992. **109**, N 2. 323–342. doi [10.1111/j.1365-246X.1992.tb00100.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1992.tb00100.x).

27. Jin S., Madariaga R., Virieux J., Lambaré G. Two-dimensional asymptotic iterative elastic inversion // Geophysical Journal International. 1992. **108**, N 2. 575–588. doi [10.1111/j.1365-246X.1992.tb04637.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1992.tb04637.x).
28. Lambaré G., Virieux J., Madariaga R., Jin S. Iterative asymptotic inversion in the acoustic approximation // Geophysics. 1992. **57**, N 9. 1138–1154. doi [10.1190/1.1443328](https://doi.org/10.1190/1.1443328).
29. Beylkin G. Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform // Journal of Mathematical Physics. 1985. **26**, N 1. 99–108. doi [10.1063/1.526755](https://doi.org/10.1063/1.526755).
30. Bleistein N. On the imaging of reflectors in the Earth // Geophysics. 1987. **52**, N 7. 931–942. doi [10.1190/1.1442363](https://doi.org/10.1190/1.1442363).
31. Beylkin G., Burridge R. Linearized inverse scattering problems in acoustics and elasticity // Wave Motion. 1990. **12**, N 1. 15–52. doi [10.1016/0165-2125\(90\)90017-X](https://doi.org/10.1016/0165-2125(90)90017-X).
32. Tarantola A. Inverse problem theory: methods for data fitting and model parameter estimation. Amsterdam: Elsevier, 1987.
33. Thierry P., Operto S., Lambaré G. Fast 2-d ray+Born migration/inversion in complex media // Geophysics. 1999. **64**, N 1. 162–181. doi [10.1190/1.1444513](https://doi.org/10.1190/1.1444513).
34. Operto S., Xu S., Lambaré G. Can we image quantitatively complex models with rays? // Geophysics. 2000. **65**, N 4. 1223–1238. doi [10.1190/1.1444814](https://doi.org/10.1190/1.1444814).
35. Marfurt K.J. Accuracy of finite-difference and finite-elements modeling of the scalar and elastic wave equation // Geophysics. 1984. **49**, N 5. 533–549. doi [10.1190/1.1441689](https://doi.org/10.1190/1.1441689).
36. Min D.-J., Shin C. Refraction tomography using a waveform-inversion back-propagation technique // Geophysics. 2006. **71**, N 3. R21–R30. doi [10.1190/1.2194522](https://doi.org/10.1190/1.2194522).
37. Virieux J. $P^{\sim}SV$ wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // Geophysics. 1986. **51**, N 4. 889–901. doi [10.1190/1.1442147](https://doi.org/10.1190/1.1442147).
38. Brossier R., Virieux J., Operto S. Parsimonious finite-volume frequency-domain method for 2-d $P^{\sim}SV$ -wave modelling // Geophysical Journal International. 2008. **175**, N 2. 541–559. doi [10.1111/j.1365-246X.2008.03839.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2008.03839.x).
39. Danecek P., Seriani G. An efficient parallel Chebyshev pseudo-spectral method for large-scale 3d seismic forward modelling // Proc. 70th EAGE Conference and Exhibition. Amsterdam: European Assoc. Geosci. Eng., 2008. doi [10.3997/2214-4609.20147862](https://doi.org/10.3997/2214-4609.20147862).
40. Kennett B.L.N. Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.
41. Chapman C. Ray theory and its extension: Wkbj and Maslov seismograms // Journal of Geophysics. 1985. **58**, N 1. 27–43. <https://journal.geophysicsjournal.com/JofG/article/view/147>. Cited January 25, 2022.
42. Klem-Musatov K.D., Aizenberg A.M. Seismic modelling by methods of the theory of edge waves // Journal of Geophysics. 1985. **57**, N 1. 90–105. <https://journal.geophysicsjournal.com/JofG/article/view/236>. Cited January 25, 2022.
43. Pratt R.G. Seismic waveform inversion in the frequency domain, part 1: theory and verification in a physical scale model // Geophysics. 1999. **64**, N 3. 888–901. doi [10.1190/1.1444597](https://doi.org/10.1190/1.1444597).
44. Brenders A.J., Pratt R.G. Efficient waveform tomography for lithospheric imaging: implications for realistic two-dimensional acquisition geometries and low frequency data // Geophysical Journal International. 2007. **168**, N 1. 152–170. doi [10.1111/j.1365-246X.2006.03096.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03096.x).
45. Sirgue L. The importance of low frequency and large offset in waveform inversion // Proc. 68th EAGE Conference and Exhibition. Amsterdam: European Assoc. Geosci. Eng., 2006. doi [10.3997/2214-4609.201402146](https://doi.org/10.3997/2214-4609.201402146).
46. Гадильшин К.Г., Чеверда В.А. Обращение полных волновых полей нелинейным методом наименьших квадратов: SVD анализ // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**, № 3. 499–513. <https://num-meth.ru/index.php/journal/article/view/786/793>. Cited January 25, 2022.
47. Гадильшин К.Г., Чеверда В.А. Реконструкция глубинной макроскоростной модели путем обращения полного волнового сейсмического поля // Доклады Академии наук. 2017. **476**, № 6. 693–697. doi [10.7868/S086956521730020X](https://doi.org/10.7868/S086956521730020X).
48. Гадильшин К.Г., Протасов М.И. Построение точных частотно-зависимых лучей при известном решении уравнения Гельмгольца // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**, № 4. 586–594. doi [10.26089/NumMet.v16r455](https://doi.org/10.26089/NumMet.v16r455).
49. Гадильшин К.Г., Чеверда В.А. Решение обратной динамической задачи сейсмоки путем обращения полного многокомпонентного упругого волнового поля // Доклады Академии наук. 2018. **482**, № 6. 708–712. doi [10.31857/S000523100002920-6](https://doi.org/10.31857/S000523100002920-6).
50. Métivier L., Brossier R., Virieux J. Combining asymptotic linearized inversion and full waveform inversion // Geophys. J. Int. 2015. **201**, N 3. 1682–1703. doi [10.1093/gji/ggv106](https://doi.org/10.1093/gji/ggv106).



51. Ribodetti A., Gaffet S., Operto S., Virieux J., Saracco G. Asymptotic waveform inversion for unbiased velocity and attenuation measurements: numerical tests and application for Vesuvius lava sample analysis // *Geophys. J. Int.* 2004. **158**, N 1. 353–371. doi [10.1111/j.1365-246X.2004.02245.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02245.x).
52. Chen J., Cheng D.S., Jie R., Zhu X. A fourth-order 9-point finite difference method for the Helmholtz equation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. **1453**, N 1. doi [10.1088/1742-6596/1453/1/012044](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1453/1/012044).
53. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *Journal of Computational Physics*. 1994. **114**, N 2. 185–200. doi <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1159>.
54. Lomax A. The wavelength-smoothing method for approximating broad-band wave propagation through complicated velocity structures // *Geophys. J. Int.* 1994. **117**, N 2. 313–334. doi [10.1111/j.1365-246X.1994.tb03935.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03935.x).
55. Cervený V., Molotkov I.A., Psencik I. Ray theory in seismology. Prague: Charles Univ. Press, 1977.

Поступила в редакцию
23 октября 2021 г.

Принята к публикации
10 января 2022 г.

Информация об авторах

Кирилл Геннадьевич Гадильшин — к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Дмитрий Александрович Неклюдов — к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Максим Игоревич Протасов — д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. R. D. Oldham, “The Constitution of the Interior of the Earth, as Revealed by Earthquakes,” *Quart. J. Geol. Soc. London* **62**, 456–475 (1906). doi [10.1144/GSL.JGS.1906.062.01-04.21](https://doi.org/10.1144/GSL.JGS.1906.062.01-04.21).
2. B. Gutenberg, “Über Erdbebenwellen viia. Beobachtungen an Registrierungen von Fernbeben in Göttingen und Folgerungen über die Konstitution des Erdkörpers,” *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **25** (3), 125–176 (1914).
3. I. Lehmann, “P,” *Publications du Bureau Central Seismologique International, Série A, Travaux Scientifique* **14**, 87–115 (1936).
4. M. Jannane, W. Beydoun, E. Crase, et al., “Wavelengths of Earth Structures that can be Resolved from Seismic Reflection Data,” *Geophysics* **54** (7), 906–910 (1989). doi [10.1190/1.1442719](https://doi.org/10.1190/1.1442719).
5. J. F. Claerbout and S. M. Doherty, “Downward Continuation of Moveout-Corrected Seismograms,” *Geophysics* **37** (5), 741–768 (1972). doi [10.1190/1.1440298](https://doi.org/10.1190/1.1440298).
6. J. Gazdag, “Wave Equation Migration with the Phase-Shift Method,” *Geophysics* **43** (7), 1342–1351 (1978). doi [10.1190/1.1440899](https://doi.org/10.1190/1.1440899).
7. R. H. Stolt, “Migration by Fourier Transform,” *Geophysics* **43** (1), 23–48 (1978). doi [10.1190/1.1440826](https://doi.org/10.1190/1.1440826).
8. E. Baysal, D. D. Kosloff, and J. W. C. Sherwood, “Reverse-Time Migration,” *Geophysics* **48** (11), 1514–1524 (1983). doi [10.1190/1.1441434](https://doi.org/10.1190/1.1441434).
9. Ö. Yilmaz, *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data* (SEG Press, Tulsa, 2001).
10. B. Biondi and W. W. Symes, “Angle-Domain Common-Image Gathers for Migration Velocity Analysis by Wavefield-Continuation Imaging,” *Geophysics* **69** (5), 1283–1298 (2004). doi [10.1190/1.1801945](https://doi.org/10.1190/1.1801945).
11. R. Snieder, M. Y. Xie, A. Pica, and A. Tarantola, “Retrieving both the Impedance Contrast and Background Velocity: A Global Strategy for the Seismic Reflection Problem,” *Geophysics* **54** (8), 991–1000 (1989). doi [10.1190/1.1442742](https://doi.org/10.1190/1.1442742).

12. P. Docherty, R. Silva, S. Singh, et al., “Migration Velocity Analysis Using a Genetic Algorithm,” *Geophys. Prospect.* **45** (5), 865–878 (2003). doi [10.1046/j.1365-2478.1997.640298.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-2478.1997.640298.x).
13. P. Lailly, “The Seismic Inverse Problem as a Sequence of before Stack Migrations,” in *Proc. Conf. on Inverse Scattering — Theory and Application, Tulsa, USA, May 16–18, 1983* (SIAM Press, Philadelphia, 1983), pp. 206–220.
14. A. Tarantola, “Inversion of Seismic Reflection Data in the Acoustic Approximation,” *Geophysics* **49** (8), 1259–1266 (1984). doi [10.1190/1.1441754](https://doi.org/10.1190/1.1441754).
15. J. F. Claerbout, “Toward a Unified Theory of Reflector Mapping,” *Geophysics* **36** (3), 467–481 (1971). doi [10.1190/1.1440185](https://doi.org/10.1190/1.1440185).
16. J. F. Claerbout, *Fundamentals of Geophysical Data Processing* (McGraw–Hill, New York, 1976).
17. O. Gauthier, J. Virieux, and A. Tarantola, “Two-Dimensional Nonlinear Inversion of Seismic Waveforms: Numerical Results,” *Geophysics* **51** (7), 1387–1403 (1986). doi [10.1190/1.1442188](https://doi.org/10.1190/1.1442188).
18. P. Kolb, F. Collino, and P. Lailly, “Prestack Inversion of a 1-D Medium,” *Proc. IEEE* **74** (3), 498–508 (1986). doi [10.1109/PROC.1986.13490](https://doi.org/10.1109/PROC.1986.13490).
19. L. T. Ikelle, J. P. Diet, and A. Tarantola, “Linearized Inversion of Multioffset Seismic Reflection Data in the $\omega - k$ Domain: Depth-Dependent Reference Medium,” *Geophysics* **53** (1), 50–64 (1988). doi [10.1190/1.1442399](https://doi.org/10.1190/1.1442399).
20. E. Crase, A. Pica, M. Noble, et al., “Robust Elastic Non-Linear Waveform Inversion: Application to Real Data,” *Geophysics* **55** (5), 527–538 (1990). doi [10.1190/1.1442864](https://doi.org/10.1190/1.1442864).
21. A. Pica, J. Diet, and A. Tarantola, “Nonlinear Inversion of Seismic Reflection Data in Laterally Invariant Medium,” *Geophysics* **55** (3), 284–292 (1990).
22. H. A. Djikpéssé and A. Tarantola, “Multiparameter l_1 Norm Waveform Fitting: Interpretation of Gulf of Mexico Reflection Seismograms,” *Geophysics* **64** (4), 1023–1035 (1999). doi [10.1190/1.1444611](https://doi.org/10.1190/1.1444611).
23. Y. Choi, D.-J. Min, and C. Shin, “Two-Dimensional Waveform Inversion of Multi-Component Data in Acoustic-Elastic Coupled Media,” *Geophys. Prospect.* **56** (6), 863–881 (2008). doi [10.1111/j.1365-2478.2008.00735.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2008.00735.x).
24. P. W. Cary and C. H. Chapman, “Automatic 1-D Waveform Inversion of Marine Seismic Refraction Data,” *Geophys. J. Int.* **93** (3), 527–546 (1988). doi [10.1111/j.1365-246X.1988.tb03879.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1988.tb03879.x).
25. Z. Koren, K. Mosegaard, E. Landa, et al., “Monte Carlo Estimation and Resolution Analysis of Seismic Background Velocities,” *J. Geophys. Res. Solid Earth* **96** (B12), 20289–20299 (1991). doi [10.1029/91JB02278](https://doi.org/10.1029/91JB02278).
26. M. Sambridge and G. Drijkoningen, “Genetic Algorithms in Seismic Waveform Inversion,” *Geophys. J. Int.* **109** (2), 323–342 (1992). doi [10.1111/j.1365-246X.1992.tb00100.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1992.tb00100.x).
27. S. Jin, R. Madariaga, J. Virieux, and G. Lambaré, “Two-Dimensional Asymptotic Iterative Elastic Inversion,” *Geophys. J. Int.* **108** (2), 575–588 (1992). doi [10.1111/j.1365-246X.1992.tb04637.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1992.tb04637.x).
28. G. Lambaré, J. Virieux, R. Madariaga, and S. Jin, “Iterative Asymptotic Inversion in the Acoustic Approximation,” *Geophysics* **57** (9), 1138–1154 (1992). doi [10.1190/1.1443328](https://doi.org/10.1190/1.1443328).
29. G. Beylkin, “Imaging of Discontinuities in the Inverse Scattering Problem by Inversion of a Causal Generalized Radon Transform,” *J. Math. Phys.* **26** (1), 99–108 (1985). doi [10.1063/1.526755](https://doi.org/10.1063/1.526755).
30. N. Bleistein, “On the Imaging of Reflectors in the Earth,” *Geophysics* **52** (7), 931–942 (1987). doi [10.1190/1.1442363](https://doi.org/10.1190/1.1442363).
31. G. Beylkin and R. Burridge, “Linearized Inverse Scattering Problems in Acoustics and Elasticity,” *Wave Motion* **12** (1), 15–52 (1990). doi [10.1016/0165-2125\(90\)90017-X](https://doi.org/10.1016/0165-2125(90)90017-X).
32. A. Tarantola, *Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation* (Elsevier, Amsterdam, 1987).
33. P. Thierry, S. Operto, and G. Lambaré, “Fast 2-D Ray+Born Migration/Inversion in Complex Media,” *Geophysics* **64** (1), 162–181 (1999). doi [10.1190/1.1444513](https://doi.org/10.1190/1.1444513).
34. S. Operto, S. Xu, and G. Lambaré, “Can We Image Quantitatively Complex Models with Rays?” *Geophysics* **65** (4), 1223–1238 (2000). doi [10.1190/1.1444814](https://doi.org/10.1190/1.1444814).
35. K. J. Marfurt, “Accuracy of Finite-Difference and Finite-Elements Modeling of the Scalar and Elastic Wave Equation,” *Geophysics* **49** (5), 533–549 (1984). doi [10.1190/1.1441689](https://doi.org/10.1190/1.1441689).
36. D.-J. Min and C. Shin, “Refraction Tomography Using a Waveform-Inversion Back-Propagation Technique,” *Geophysics* **71** (3), R21–R30 (2006). doi [10.1190/1.2194522](https://doi.org/10.1190/1.2194522).
37. J. Virieux, “ $P^{\sim}SV$ Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-Stress Finite-Difference Method,” *Geophysics* **51** (4), 889–901 (1986). doi [10.1190/1.1442147](https://doi.org/10.1190/1.1442147).
38. R. Brossier, J. Virieux, and S. Operto, “Parsimonious Finite-Volume Frequency-Domain Method for 2-D $P^{\sim}SV$ -Wave Modelling,” *Geophys. J. Int.* **175** (2), 541–559 (2008). doi [10.1111/j.1365-246X.2008.03839.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2008.03839.x).



39. P. Danecek and G. Seriani, “An Efficient Parallel Chebyshev Pseudo-Spectral Method for Large Scale 3D Seismic Forward Modelling,” in *Proc. 70th EAGE Conference and Exhibition, Rome, Italy, June 9–June 12, 2008* (European Assoc. Geosci. Eng., Amsterdam, 2008). doi [10.3997/2214-4609.20147862](https://doi.org/10.3997/2214-4609.20147862).
40. B. L. N. Kennett, *Seismic Wave Propagation in Stratified Media* (Cambridge Univer. Press, Cambridge, 1983).
41. C. Chapman, “Ray Theory and Its Extension: Wkbj and Maslov Seismograms,” *J. Geophys.* **58** (1), 27–43 (1985). <https://journal.geophysicsjournal.com/JofG/article/view/147>. Cited January 25, 2022.
42. K. D. Klem–Musatov and A. M. Aizenberg, “Seismic Modelling by Methods of the Theory of Edge Waves,” *J. Geophys.* **57** (1), 90–105 (1985). <https://journal.geophysicsjournal.com/JofG/article/view/236>. Cited January 25, 2022.
43. R. G. Pratt, “Seismic Waveform Inversion in the Frequency Domain, Part 1: Theory and Verification in a Physical Scale Model,” *Geophysics* **64** (3), 888–901 (1999). doi [10.1190/1.1444597](https://doi.org/10.1190/1.1444597).
44. A. J. Brenders and R. G. Pratt, “Efficient Waveform Tomography for Lithospheric Imaging: Implications for Realistic Two-Dimensional Acquisition Geometries and Low Frequency Data,” *Geophys. J. Int.* **168** (1), 152–170 (2007). doi [10.1111/j.1365-246X.2006.03096.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03096.x).
45. L. Sirgue, “The Importance of Low Frequency and Large Offset in Waveform Inversion,” in *Proc. 68th EAGE Conference and Exhibition, Vienna, Austria, June 12–15, 2006* (European Assoc. Geosci. Eng., Amsterdam, 2006). doi [10.3997/2214-4609.201402146](https://doi.org/10.3997/2214-4609.201402146).
46. K. G. Gadylshin and V. A. Tcheverda, “Nonlinear Least-Squares Full Waveform Inversion: SVD Analysis,” *Vychisl. Metody Programm.* **15** (3), 499–513 (2014).
47. K. G. Gadylshin and V. A. Cheverda, “Reconstruction of a Depth Velocity Model by Full Waveform Inversion,” *Dokl. Akad. Nauk* **476** (6), 693–697 (2017) [*Dokl. Earth. Sci.* **476** (2), 1233–1237 (2017)]. doi [10.1134/S1028334X17100221](https://doi.org/10.1134/S1028334X17100221).
48. K. G. Gadylshin and M. I. Protasov, “Calculation of Exact Frequency-Dependent Rays When the Solution of the Helmholtz Equation Is Known,” *Vychisl. Metody Programm.* **16** (4), 586–594 (2015). doi [10.26089/NumMet.v16r455](https://doi.org/10.26089/NumMet.v16r455).
49. K. G. Gadylshin and V. A. Tcheverda, “Solving an Inverse Dynamic Seismic Problem by Multicomponent Elastic Full Waveform Inversion,” *Dokl. Akad. Nauk* **482** (6), 708–712 (2018) [*Dokl. Earth. Sci.* **482** (2), 1365–1369 (2018)]. doi [10.1134/S1028334X18100227](https://doi.org/10.1134/S1028334X18100227).
50. L. Métivier, R. Brossier, and J. Virieux, “Combining Asymptotic Linearized Inversion and Full Waveform Inversion,” *Geophys. J. Int.* **201** (3), 1682–1703 (2015). doi [10.1093/gji/ggv106](https://doi.org/10.1093/gji/ggv106).
51. A. Ribodetti, S. Gaffet, S. Operto, et al., “Asymptotic Waveform Inversion for Unbiased Velocity and Attenuation Measurements: Numerical Tests and Application for Vesuvius Lava Sample Analysis,” *Geophys. J. Int.* **158** (1), 353–371 (2004). doi [10.1111/j.1365-246X.2004.02245.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02245.x).
52. J. Chen, D. S. Cheng, R. Jie, and X. Zhu, “A Fourth-Order 9-Point Finite Difference Method for the Helmholtz Equation,” *J. Phys. Conf. Ser.* **1453** (1) (2020). doi [10.1088/1742-6596/1453/1/012044](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1453/1/012044).
53. J.-P. Berenger, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves,” *J. Comput. Phys.* **114** (2), 185–200 (1994). doi [10.1006/jcph.1994.1159](https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1159).
54. A. Lomax, “The Wavelength-Smoothing Method for Approximating Broad-Band Wave Propagation through Complicated Velocity Structures,” *Geophys. J. Int.* **117** (2), 313–334 (1994). doi [10.1111/j.1365-246X.1994.tb03935.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03935.x).
55. V. Cervený, I. A. Molotkov, and I. Psencik, *Ray Theory in Seismology* (Charles Univ. Press, Prague, 1977).

Received
October 23, 2021

Accepted for publication
December 10, 2022

Information about the authors

Kirill G. Gadylshin — Ph. D., Senior Research Scientist, Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Koptug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.

Dmitry A. Neklyudov — Ph. D., Senior Research Scientist, Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Koptug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.

Maxim I. Protasov — Dr. Sci., Leading Research Scientist, Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Koptug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.