



doi 10.26089/NumMet.v23r423

УДК 519.6

Балансно-характеристический метод для решения гиперболических систем уравнений на треугольных расчетных сетках

В. М. Головизнин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-4354-9290, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Д. Ю. Горбачев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-3184-6549, e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru

Н. А. Афанасьев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-4414-6645, e-mail: vmaf@cs.msu.ru

Аннотация: В данной статье рассматривается балансно-характеристический численный метод решения гиперболических систем уравнений на треугольных расчетных сетках. Описываются основные шаги алгоритма на примере решения двумерных уравнений мелкой воды. Метод верифицирован и проведено его сравнение с методами, разработанными другими авторами, на основных тестах для уравнений мелкой воды над ровным дном.

Ключевые слова: балансно-характеристические методы, метод КАБАРЕ, вычислительная гидродинамика, мелкая вода, треугольные расчетные сетки.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20–31–90084).

Для цитирования: Головизнин В.М., Горбачев Д.Ю., Афанасьев Н.А. Балансно-характеристический метод для решения гиперболических систем уравнений на треугольных расчетных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2022. 23, № 4. 365–378. doi 10.26089/NumMet.v23r423.



Conservative-characteristic method for solving hyperbolic systems of equations on triangular computational grids

Vasily M. Goloviznin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-4354-9290, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Daniil Y. Gorbachev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-3184-6549, e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru

Nikita A. Afanasiev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-4414-6645, e-mail: vmaf@cs.msu.ru

Abstract: This article considers a conservative-characteristic numerical method for solving hyperbolic systems of equations on triangular computational grids. The main steps of the algorithm are described with the example of solving two-dimensional shallow water equations. The method is verified and compared with the methods developed by other authors on the main tests for shallow water equations over a flat bottom.

Keywords: conservative-characteristic methods, CABARET method, computational fluid dynamics, shallow water, triangular computational grids.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20–31–90084).

For citation: V. M. Goloviznin, D. Y. Gorbachev, and N. A. Afanasiev, “Conservative-characteristic method for solving hyperbolic systems of equations on triangular computational grids,” *Numerical Methods and Programming*. 23 (4), 365–378 (2022). doi 10.26089/NumMet.v23r423.

1. Введение. В настоящее время с увеличением вычислительных мощностей и параллелизма, которые предоставляют современные системы, явные численные методы высокой разрешающей способности, построенные на компактных шаблонах, дают возможность иметь робастный и простой в реализации инструмент для решения широкого спектра задач вычислительной гидродинамики. В таких задачах важную роль играют следующие свойства численного метода: консервативность, хорошие диссипативные и дисперсионные характеристики. Данными свойствами обладает балансно-характеристический метод КАБАРЕ, подробно описанный в [1–3]. Помимо этих свойств метод КАБАРЕ имеет особенность, заключающуюся в использовании двух наборов переменных: 1) консервативных, которые передают законы сохранения, и 2) потоковых, выражающих характеристическую природу гиперболических систем уравнений. В методе КАБАРЕ естественным образом используется характеристический вид гиперболических систем и на основе этого определяется процедура монотонизации решения.

Работа по развитию балансно-характеристических методов и метода КАБАРЕ, в частности, ведется на протяжении двадцати лет. К текущему моменту достигнуты серьезные результаты во многих задачах вычислительной гидродинамики и задачах индустриальной математики. Метод КАБАРЕ был верифицирован и показал свою робастность в случае применения четырехугольных и гексаэдральных расчетных сеток в различных областях вычислительной гидроаэродинамики — таких как перенос пассивной примеси [2, 3], в газовой динамике и аэроакустике [4, 5], в задачах с турбулентным течением при различных числах Рейнольдса [6, 7]. Эти результаты получены для четырехугольных и гексаэдральных расчетных сеток.

В течение всего этого периода предпринимались многочисленные попытки обобщить схему КАБАРЕ на расчетные сетки с треугольными ячейками. До уровня публикации была доведена только одна из этих попыток [8], которую, однако, нельзя признать в полной мере успешной, поскольку предложенная схема не обладала свойством временной обратимости и, как следствие, имела относительно большую схемную вязкость. Новая конструктивная идея появилась только в 2019 году [9]. Было предложено на каждой грани



треугольника брать по две точки с потоковыми переменными, а не одну, как в схеме на четырехугольных ячейках. Это, на принципиальном уровне, позволило решить многие ранее существующие проблемы.

В настоящей работе предлагается обобщение метода КАБАРЕ на треугольные расчетные сетки с сохранением основных свойств и особенностей данного метода. Статья организована следующим образом. В разделах 2 и 3 описана постановка задачи в общем виде, рассмотрен характеристический вид и локальные внутренние мажоранты гиперболических систем. Раздел 4 посвящен постановке двумерных уравнений мелкой воды над ровным дном, выводятся их характеристический вид и инварианты Римана в произвольном направлении. Описание обобщенного метода КАБАРЕ применительно к уравнениям мелкой воды сделано в разделе 5. В разделе 6 приведены результаты по основным тестам для уравнений мелкой воды. Статья завершается разделом 7 с заключительными замечаниями.

2. Системы квазилинейных законов сохранения гиперболического типа. Рассмотрим систему двумерных квазилинейных законов сохранения в некоторой области Ω :

$$\frac{\partial \mathbf{U}(x, y, t)}{\partial t} + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, y, t)) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, t \in [0, T], \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)$ — величины, для которых выполняются законы сохранения, \mathbf{F} — векторная функция потоков. Уравнения также дополняются некоторыми начальными и граничными условиями.

Систему (1) можно переписать в так называемой простой форме относительно “простейших” неизвестных ($\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)$, таких что $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{w})$) в некоторой произвольной ортогональной системе координат (n, s) :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A_n \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n} + A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = 0. \quad (2)$$

Будем предполагать, что исходная система (1) является гиперболической, т.е. все собственные значения матриц Якоби $A_n = A_n(\mathbf{w}, n, s, t)$, $A_s = A_s(\mathbf{w}, n, s, t)$ действительны и матрицы обладают полным набором собственных векторов.

Систему (2) можно представить в так называемом характеристическом виде относительно каждого из направлений n и s . Покажем это для направления n . Найдем левые собственные векторы матрицы A_n и умножим на них систему (2) слева:

$$\begin{aligned} l_1^n \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \lambda_1^n l_1^n \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n} &= -l_1^n A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s}, \\ \dots, \\ l_N^n \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \lambda_N^n l_N^n \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n} &= -l_N^n A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь l_1^n, \dots, l_N^n и $\lambda_1^n, \dots, \lambda_N^n$ — левые собственные векторы и соответствующие им собственные значения матрицы A_n . Будем предполагать, что собственные векторы можно занести под производные по t и по n (т.е. известны аналитические выражения для инвариантов Римана), тогда из системы (3) можно получить характеристический вид системы (1) по направлению n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^n}{\partial t} + \lambda_1^n \frac{\partial I_1^n}{\partial n} &= -l_1^n A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = G_1^n, \\ \dots, \\ \frac{\partial I_N^n}{\partial t} + \lambda_N^n \frac{\partial I_N^n}{\partial n} &= -l_N^n A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = G_N^n, \end{aligned} \quad (4)$$

где $I_1^n = I_1^n(\mathbf{w}, n, s, t), \dots, I_N^n = I_N^n(\mathbf{w}, n, s, t)$ — инварианты Римана по направлению n , которые были бы постоянными вдоль характеристик $\frac{dn}{dt} = \lambda_i^n$, если бы правые части в (4) были нулевыми. Характеристическая форма по направлению s получается аналогичным образом.

3. Локальные внутренние мажоранты. Не ограничивая общности, рассмотрим первое уравнение системы (4) для направления $n = x$:

$$\frac{\partial I_1^x}{\partial t} + \lambda_1^x \frac{\partial I_1^x}{\partial x} = -l_1^x A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = G_1^x. \quad (5)$$

Рассмотрим некоторую точку x_0 из области Ω в моменты времени t_0 и $t_1 = t_0 + \Delta t$. Пусть уравнение (5) является однородным, т.е. $G_1^x = 0$. Выпустим из точки (x_0, t_1) характеристику $\frac{dx}{dt} = \lambda_1^x$, которая придет в некоторую точку (x_1, t_0) . Область под проведенной характеристикой D (заштрихованная область на рис. 1) будем называть характеристической областью инварианта I_1^x в точке (x_0, t_1) , а отрезок $[x_1, x_0]$ — областью зависимости этого инварианта.

Тогда, согласно принципу максимума [10] для однородного уравнения (5), значение инварианта Римана в точке (x_0, t_1) будет ограничено минимальным и максимальным значениями этого инварианта Римана среди всех значений на отрезке $[x_1, x_0]$ на момент времени t_0 :

$$\min_{[x_1, x_0]} I_1^x(x, t_0) \leq I_1^x(x_0, t_1) \leq \max_{[x_1, x_0]} I_1^x(x, t_0). \quad (6)$$

Для обобщения условия (6) на случай неоднородного уравнения (5) нужно учесть вклад правой части G_1^x в изменение минимального и максимального значений инварианта:

$$\min_{[x_1, x_0]} I_1^x(x, t_0) + \Delta t \min_{(x,t) \in D} [G_1^x] \leq I_1^x(x_0, t_1) \leq \max_{[x_1, x_0]} I_1^x(x, t_0) + \Delta t \max_{(x,t) \in D} [G_1^x]. \quad (7)$$

Аналогичные ограничения мы можем получить при рассмотрении любого другого направления n . Данные ограничения, которые называют локальными внутренними мажорантами [11], лимитируют область возможных вариаций инвариантов Римана и играют важную роль в балансно-характеристических алгоритмах.

4. Уравнения мелкой воды. Рассмотрим конкретный пример системы гиперболических уравнений (1), а именно систему уравнений мелкой воды над ровным дном в декартовой системе координат (x, y) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H u_x}{\partial x} + \frac{\partial H u_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial H u_x}{\partial t} + \frac{\partial (H u_x^2 + 0.5gH^2)}{\partial x} + \frac{\partial H u_x u_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial H u_y}{\partial t} + \frac{\partial H u_x u_y}{\partial x} + \frac{\partial (H u_y^2 + 0.5gH^2)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь H — высота столба жидкости, g — ускорение свободного падения, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ — вектор скорости столба жидкости. Простая форма системы (8) в произвольной ортогональной декартовой системе координат (n, s) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A_n \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n} + A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} &= 0, \\ A_n &= \begin{pmatrix} u_n & H & 0 \\ g & u_n & 0 \\ 0 & 0 & u_n \end{pmatrix}, \quad A_s = \begin{pmatrix} u_s & 0 & H \\ 0 & u_s & 0 \\ g & 0 & u_s \end{pmatrix}, \\ \mathbf{w} &= (H, u_n, u_s)^T, \quad u_n = (\mathbf{u}, \mathbf{n}), \quad u_s = (\mathbf{u}, \mathbf{s}). \end{aligned}$$

Найдем характеристическую форму уравнений по направлению n . Собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы A_n выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_R^n &= u_n + \sqrt{gH}, & \mathbf{l}_R^n &= \left(\sqrt{\frac{g}{H}}, 1, 0 \right), \\ \lambda_Q^n &= u_n - \sqrt{gH}, & \mathbf{l}_Q^n &= \left(-\sqrt{\frac{g}{H}}, 1, 0 \right), \\ \lambda_S^n &= u_n, & \mathbf{l}_S^n &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

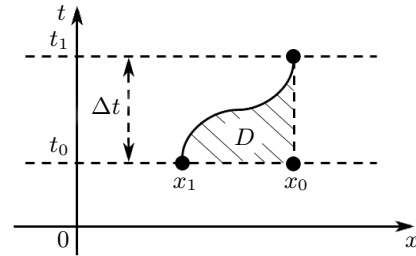


Рис. 1. Характеристическая область D инварианта I_1^x
 Fig. 1. The characteristic domain D of the invariant I_1^x



В данном случае собственные векторы могут быть занесены под производные, в результате чего получается характеристическая форма уравнений по направлению n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^n}{\partial t} + \lambda_R^n \frac{\partial R^n}{\partial n} &= -l_R^n A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = G_R^n, \\ \frac{\partial Q^n}{\partial t} + \lambda_Q^n \frac{\partial Q^n}{\partial n} &= -l_Q^n A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = G_Q^n, \\ \frac{\partial S^n}{\partial t} + \lambda_S^n \frac{\partial S^n}{\partial n} &= -l_S^n A_s \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = G_S^n, \end{aligned} \tag{9}$$

где $R^n = u_n + 2\sqrt{gH}$, $Q^n = u_n - 2\sqrt{gH}$ и $S^n = u_n$ — инварианты Римана по направлению n . Аналогично можно получить собственные значения и соответствующие им инварианты Римана по направлению s : $\lambda_R^s = u_s + \sqrt{gH}$, $\lambda_Q^s = u_s - \sqrt{gH}$, $\lambda_S^s = u_s$, $R^s = u_s + 2\sqrt{gH}$, $Q^s = u_s - 2\sqrt{gH}$, $S^s = u_s$. Характеристический вид (9) нам понадобится при описании численного метода на неструктурированных расчетных сетках.

5. Балансно-характеристический алгоритм на сетках с треугольными ячейками.

5.1. Расчетная сетка и сеточные переменные. В данной работе будут рассматриваться неструктурированные расчетные сетки с треугольными ячейками. Выберем в каждой расчетной ячейке семь точек (рис. 2 а): две точки на каждом ребре, которые делят ребро на три равные части, и одну точку на пересечении медиан треугольника (центр ячейки). В каждом узле зададим в качестве сеточных функций полный набор переменных уравнений мелкой воды (8): H , u_x и u_y . Переменные, относящиеся к ребрам ячейки и к ее центру, мы называем потоковыми и консервативными соответственно. Точки с консервативными переменными будем помечать на рисунках ромбами, а с потоковыми — кругами.

Будем рассматривать 3 типа неструктурированных сеток с треугольными ячейками, которые обычно используются для численного моделирования двумерных задач для гиперболических систем уравнений (рис. 3).

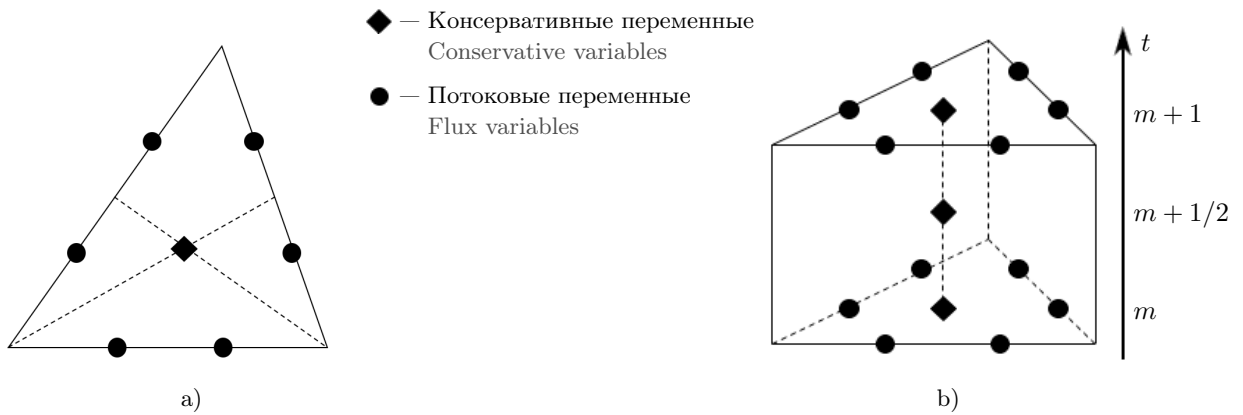


Рис. 2. Расчетная сетка: а) ячейка сетки и введенные в ней сеточные переменные; б) шаблон схемы

Fig. 2. Computational grid: a) grid cell and grid functions in it; b) scheme template

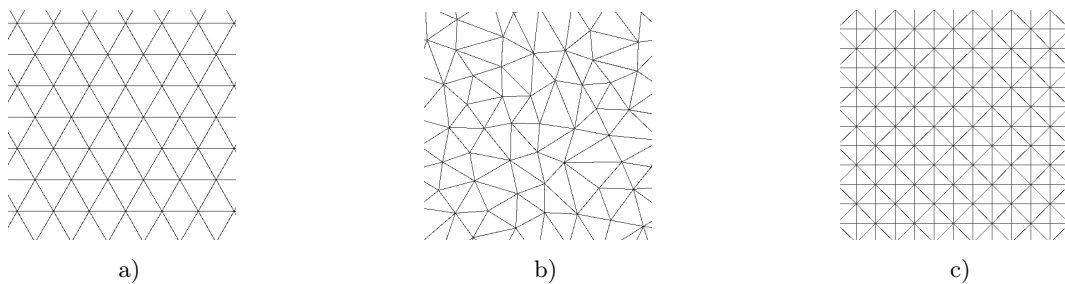


Рис. 3. Типы расчетных сеток: а) тип 1; б) тип 2; в) тип 3

Fig. 3. Types of computational grids: a) type 1; b) type 2; c) type 3

5.2. Общий алгоритм метода. Расчет переменных при переходе с временного слоя m на новый временной слой $m + 1$ происходит в три этапа:

1. *Предиктор.* Вычисление консервативных переменных на полуцелом слое по времени $m + 1/2$ с помощью аппроксимации консервативных уравнений (8).
2. *Генератор потоков.* Вычисление потоковых переменных на слое $m + 1$ с помощью переноса инвариантов Римана.
3. *Корректор.* Вычисление консервативных переменных на слое $m + 1$ с помощью аппроксимации консервативных уравнений (8).

Подробно опишем каждый из трех этапов алгоритма.

5.3. Предиктор. Рассмотрим систему (8) в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0,$$

$$\mathbf{U} = (H, Hu_x, Hu_y)^T,$$

$$\mathbf{F} = (H\mathbf{u}, Hu_x\mathbf{u} + \{0.5gH^2, 0\}^T, Hu_y\mathbf{u} + \{0, 0.5gH^2\}^T)^T.$$

Аппроксимируем систему (10) в расчетной ячейке по методу конечного объема (см. шаблон и обозначения на рис. 4 а):

$$\frac{U_c^{m+1/2} - U_c^m}{\tau_m/2} + \frac{1}{V_c} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\mathbf{F}(U_{i_1}^m) + \mathbf{F}(U_{i_2}^m)}{2}, \mathbf{n}_i \right) \cdot l_i = 0,$$

где V_c — площадь ячейки, l_i — длина i -ого ребра ячейки, \mathbf{n}_i — единичная внешняя нормаль к i -му ребру ячейки, $\tau_m = t_{m+1} - t_m$ — величина шага по времени. Оператор дивергенции аппроксимирован в (11) через контурный интеграл по треугольной ячейке на слое m , интеграл по каждому ребру которой приближен с помощью формулы трапеций по двум потоковым значениям на этом ребре. Таким образом, выражение (11) аппроксимирует систему (10) как минимум с первым порядком на произвольных треугольных ячейках.

Выражения (11) позволяют вычислить консервативные значения высоты $H_c^{m+1/2}$ и скорости $\mathbf{u}_c^{m+1/2}$ в центрах ячеек на полуцелом слое по времени $m + 1/2$.

5.4. Генератор потоков. Генератор потоков осуществляет вычисление потоковых переменных, заданных на ребрах ячеек, на следующем слое по времени $m + 1$. В схеме КАБАРЕ на четырехугольных ячейках [1], в которых потоковые переменные заданы в центрах ребер ячеек, вычисление проводится с помощью экстраполяции инвариантов Римана (9) в направлении прямых, соединяющих центры противоположных ребер ячеек. Выбранное нами расположение потоковых переменных на треугольных сетках позволяет проделать аналогичную процедуру экстраполяции. Действительно, три пары точек с потоковыми переменными ячейки можно соединить таким образом, что все проведенные прямые пересекутся в центре ячейки, где заданы консервативные переменные (рис. 5 а). В направлении этих прямых и будет осуществляться экстраполяция.

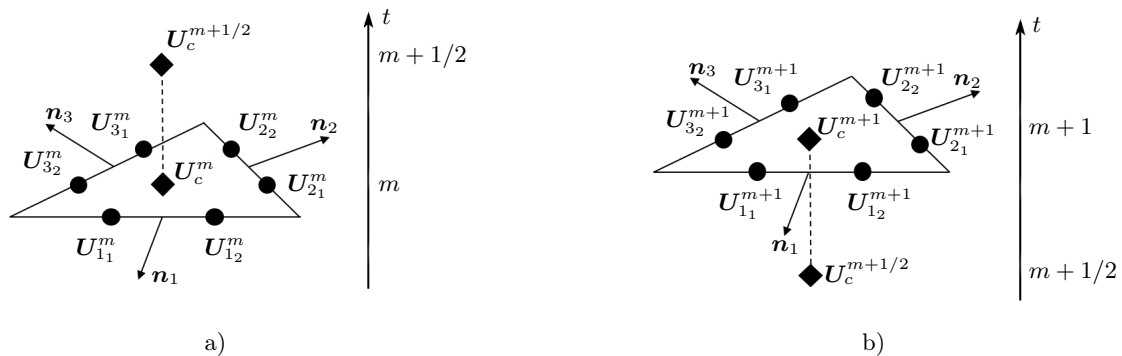


Рис. 4. Шаблоны: а) предиктора; б) корректора

Fig. 4. Templates: a) the predictor template; b) the corrector template

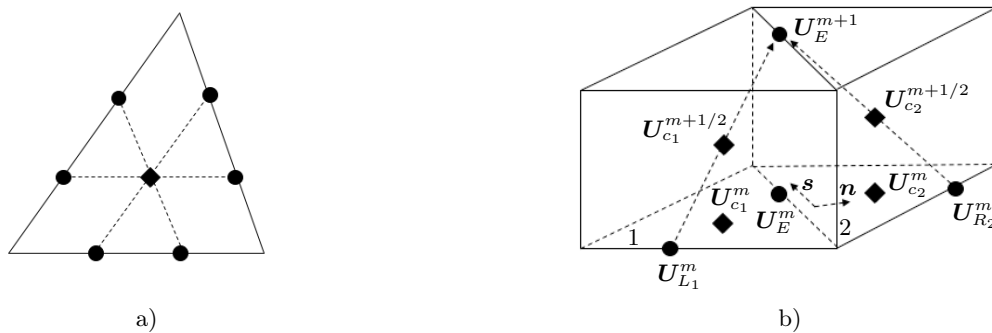


Рис. 5. К расчету потоковых переменных на слое $m + 1$: а) направления переноса; б) шаблон генератора потоков
 Fig. 5. On the calculation of flow variables on the layer $m + 1$: a) transfer directions; b) flux generator template

Подробно опишем алгоритм вычисления потоковых переменных U_E^{m+1} в некоторой точке E . Все необходимые значения для вычисления в точке E (т.е. шаблон генератора потоков) изображены на рис. 5 б. Пусть рассматриваемая точка находится на ребре с вектором нормали \mathbf{n} . Направление переноса будем определять с помощью консервативных значений на полупростом слое в ячейках слева $(\lambda_{R,Q,S}^n)^{m+1/2} = \lambda_{R,Q,S}^n(U_{c_1}^{m+1/2})$ и справа $(\lambda_{R,Q,S}^n)^{m+1/2} = \lambda_{R,Q,S}^n(U_{c_2}^{m+1/2})$ от рассматриваемого ребра. Так, например, инвариант R в направлении \mathbf{n} будет экстраполироваться следующим образом:

$$(\tilde{R}^n)_E^{m+1} = \begin{cases} 2(R^n)_{c_1}^{m+1/2} - (R^n)_{L_1}^m, & \text{если } \frac{1}{2} \left((\lambda_{R,Q,S}^n)^{m+1/2} + (\lambda_{R,Q,S}^n)^{m+1/2} \right) \geq 0, \\ 2(R^n)_{c_2}^{m+1/2} - (R^n)_{R_2}^m, & \text{если } \frac{1}{2} \left((\lambda_{R,Q,S}^n)^{m+1/2} + (\lambda_{R,Q,S}^n)^{m+1/2} \right) < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Экстраполяция инвариантов Q^n и S^n осуществляется аналогичным (12) образом. Отдельно отметим, что в данной статье мы рассматриваем лишь случай строго дозвуковых течений, когда в каждую точку на ребре приходят ровно один инвариант R и один инвариант Q . Учет трансзвуковых течений даже для случая ортогональных четырехугольных сеток является крайне нетривиальной задачей. Моделированию трансзвуковых течений схемой КАБАРЕ для уравнений мелкой воды посвящена статья [12].

Процедуры экстраполяции (12) необходимо дополнить монотонизацией на основе принципа максимума. Для этого воспользуемся дискретным аналогом (7):

$$(R^n)_E^{m+1} = \begin{cases} \max = \max \left((R^n)_{L_1}^m, (R^n)_{c_1}^m, (R^n)_E^m \right) + \tau_m * G_R^n, & \text{если } (\tilde{R}^n)_E^{m+1} > \max, \\ \min = \min \left((R^n)_{L_1}^m, (R^n)_{c_1}^m, (R^n)_E^m \right) + \tau_m * G_R^n, & \text{если } (\tilde{R}^n)_E^{m+1} < \min, \\ (\tilde{R}^n)_E^{m+1}, & \text{если } \min \leq (\tilde{R}^n)_E^{m+1} \leq \max. \end{cases} \quad (13)$$

Процедура монотонизации (13) выписана для случая переноса инварианта R^n со стороны левой ячейки c_1 . Для случая переноса со стороны правой ячейки c_2 она осуществляется аналогичным образом. Рассмотрим два разных варианта аппроксимации правых частей G_R^n в (13): с помощью левой и с помощью правой части уравнений (9).

Первый вариант аппроксимации G_R^n (классический для балансно-характеристических методов) основан на приближении левой части нелинейного уравнения переноса (9) и имеет следующий вид:

$$G_R^n = \frac{(R^n)_{c_1}^{m+1/2} - (R^n)_{c_1}^m}{\tau_m/2} + (\lambda_{R,Q,S}^n)^{m+1/2} (\nabla R^n, \mathbf{n}). \quad (14)$$

Вариант (14) наиболее универсален, так как он не требует знания точного выражения для правой части уравнения переноса (9).

Второй вариант аппроксимации G_R^n использует достаточно сложное выражение для правой части (9):

$$G_R^n = -\sqrt{\frac{g}{H_{c_1}^{m+1/2}}} (u_s)_{c_1}^{m+1/2} (\nabla H, \mathbf{s}) - \sqrt{g H_{c_1}^{m+1/2}} (\nabla u_s, \mathbf{s}) - (u_s)_{c_1}^{m+1/2} (\nabla u_n, \mathbf{s}) \quad (15)$$

где \mathbf{s} — касательный к рассматриваемому ребру единичный вектор (рис. 5b), (u_n, u_s) — координаты вектора скорости \mathbf{u} в системе координат (n, s) . Как в выражении (14), так и в выражении (15) используются градиенты исходных неизвестных и инвариантов Римана. Они, подобно оператору дивергенции в (11), аппроксимируются по контуру ячейки с использованием соответствующих потоковых значений на ребрах ячейки со слоя по времени m . Для инвариантов Q^n и S^n монотонизация осуществляется аналогичным образом.

После процедур экстраполяции (12) и монотонизации (13) значения всех инвариантов Римана $(R^n)_E^{m+1}$, $(Q^n)_E^{m+1}$, $(S^n)_E^{m+1}$ на слое $m + 1$ в рассматриваемой точке на ребре известны. Остается лишь перейти к исходным потоковым переменным, решая следующую систему:

$$\begin{aligned} (R^n)_E^{m+1} &= (\mathbf{u}_E^{m+1}, \mathbf{n}) + 2\sqrt{gH_E^{m+1}}, \\ (Q^n)_E^{m+1} &= (\mathbf{u}_E^{m+1}, \mathbf{n}) - 2\sqrt{gH_E^{m+1}}, \\ (S^n)_E^{m+1} &= (\mathbf{u}_E^{m+1}, \mathbf{s}). \end{aligned} \tag{16}$$

5.5. Корректор. На данной фазе алгоритма осуществляется вычисление консервативных переменных на слое $m + 1$ по формулам, аналогичным (11), где операторы дивергенции уже аппроксимируются по значениям потоковых переменных на следующем временном слое:

$$\frac{U_c^{m+1} - U_c^{m+1/2}}{\tau_m/2} + \frac{1}{V_c} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\mathbf{F}(U_{i_1}^{m+1}) + \mathbf{F}(U_{i_2}^{m+1})}{2}, \mathbf{n}_i \right) \cdot \mathbf{l}_i = 0. \tag{17}$$

Как и уравнения этапа предиктор, корректор (17) является консервативной аппроксимацией законов сохранения (8) как минимум первого порядка.

Отметим, что основные фазы алгоритма (11)–(17) аппроксимируют исходную систему уравнений (8) как минимум с первым порядком по пространству и времени. При этом, если отключить процедуры монотонизации (13), алгоритм будет обладать свойством временной обратимости. Действительно, из приведенных уравнений следует, что если сделать шаг по представленному алгоритму со слоя m на слой $m + 1$, поменять знаки векторов скорости, сделать еще один шаг и опять развернуть скорости, то все неизвестные на слоях m и $m + 2$ совпадут. Мы не приводим строгое доказательство выполнения данного свойства, так как оно аналогично доказательству временной обратимости схемы КАБАРЕ, которое приведено в [12].

Свойство временной обратимости говорит о бездиссипативности представленного метода, что означает, что алгоритм обладает четным порядком аппроксимации. Таким образом, схема (11)–(17) при отключенных процедурах монотонизации аппроксимирует систему (8) как минимум со вторым порядком. Заметим, что в двумерном случае отключение монотонизации даже на гладких решениях почти всегда приводит к аварийному останову программы, так как в таком случае в алгоритме никак не учитываются правые части характеристических уравнений (9). Тем не менее, выполнение свойства временной обратимости гарантирует порядок аппроксимации близкий ко второму в областях с достаточно гладким решением.

5.6. Условие устойчивости. Для вычислительной устойчивости описываемого метода необходимо соблюдать условия его корректности — обратные характеристики, по которым переносятся инварианты Римана, должны пересекать плоскость текущего временного слоя в пределах рассматриваемой ячейки. Данное условие выражается через условие устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [13]. Шаг по времени будем выбирать следующим образом:

$$\tau_m = CFL \min_c \min_j \frac{h_{cj}}{\max(|(\lambda_R^n)_{cj}^m|, |(\lambda_Q^n)_{cj}^m|, |(\lambda_S^n)_{cj}^m|)},$$

где CFL — число Куранта–Фридрихса–Леви, минимум по c берется по всем ячейкам сетки, минимум по j — по каждому из шести направлений переноса в каждой ячейке, h_{cj} — длины проекций прямых, по которым осуществляется экстраполяция (12) (рис. 6).

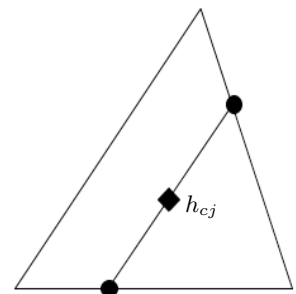


Рис. 6. j -ое направление переноса в c -ой ячейке

Fig. 6. The j transfer direction in the c cell



6. Тестовые расчеты. В данном разделе приводятся результаты верификации предложенного алгоритма (11)–(17) на некоторых тестовых задачах.

6.1. Сохранение полной энергии. В алгоритме (11)–(17) было представлено 2 варианта аппроксимации правой части характеристических уравнений (9): (14) и (15). Определим, какой из этих вариантов обладает меньшей численной вязкостью. Для этого рассмотрим задачу о распространении малых возмущений в квадратной области $(x, y) \in [0, 50]^2$ со следующими начальными условиями:

$$H(x, y, 0) = 1 + 0.01 \exp[-0.05((x - 25)^2 + (y - 25)^2)], \quad \mathbf{u}(x, y, 0) = (0, 0)^T, \quad (x, y) \in [0, 50]^2. \quad (18)$$

В качестве граничных условий рассмотрим условия непротекания на всех границах рассматриваемой области. В случае дозвукового течения на все граничные ребра сетки приходят ровно два инварианта Римана (R и S или Q и S) и система для определения потоковых переменных (16) становится неполной. Для ее замыкания используется уравнение $(\mathbf{u}_E^{m+1}, \mathbf{n}) = 0$.

Рассмотрим сетки второго типа (рис. 3 б) с 2017 и 3955 расчетными ячейками. Расчет будем вести до момента $t = 20000$ при $CFL = 0.3$ и $g = 1$. При такой конфигурации начальные возмущения доходят до границ и возвращаются обратно в центр области за $t = 50$, то есть в конце расчета будем иметь 400 полных периодов. Расчет проведем как с аппроксимацией правой части характеристических уравнений вида (14), так и с (15). В качестве определяющего параметра рассмотрим приращение полной энергии относительно значения полной энергии на начальный момент времени. Отметим, что среднее значение полной энергии отличается от начального, так как в течение нескольких первых шагов по времени происходит стабилизация решения, которая соответствует периоду согласования начальных потоковых и консервативных переменных. В случае сетки из 2017 ячеек такое “стабилизированное” значение полной энергии отличается от фонового примерно на 3%, для сетки из 3955 ячеек — на 0.5%.

Зависимость приращения полной энергии от времени для расчетов на двух сетках с аппроксимацией правой части характеристических уравнений (14) и (15) приведена на рис. 7. Представленные результаты позволяют заключить, что аппроксимация (14) обладает меньшей численной вязкостью. Именно эта аппроксимация и будет использоваться во всех приведенных далее расчетах. Отдельно отметим, что совсем избавиться от численной вязкости невозможно в силу присутствия в алгоритме процедур монотонизации (13).

6.2. Распространение возмущений по неподвижному фону. Данный тест взят из пункта 4.5 работы [14]. Рассматривается задача о распространении возмущений поверхности жидкости в квадратной области $(x, y) \in [0, 1]^2$ со следующими начальными условиями:

$$H(x, y, 0) = 1 + 0.1 \exp[-100((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)], \quad \mathbf{u}(x, y, 0) = (0, 0)^T, \quad (x, y) \in [0, 1]^2. \quad (19)$$

В качестве граничных условий на всех границах рассматриваемой области действуют условия непротекания.

Расчеты теста (19) проводились на сетке второго типа (рис. 3 б) с 5260 расчетными ячейками, $CFL = 0.3$ и $g = 9.81$. Результаты расчетов (профили высоты H) на разные моменты времени представлены на рис. 8. Полученные с помощью метода (11)–(17) результаты хорошо согласуются с результатами, полученными с использованием метода высокой разрешающей способности из работы [14].

6.3. Изоэнтропический вихрь. Рассмотрим задачу о вращении уединенного изоэнтропического вихря. Данная задача часто используется для верификации малодиссипативных методов для различных систем уравнений гиперболического типа. Так, например, классическая схема КАБАРЕ на четырехугольных сетках тестировалась на данной задаче для уравнений газовой динамики [1] и для уравнений мелкой воды на сфере [15].

Введем задачу для уравнений (8) в квадратной области $(x, y) \in [-1, 1]^2$ со следующими начальными условиями:

$$H(x, y, 0) = 1 - \frac{\theta^2}{4\beta}, \quad \mathbf{u}(x, y, 0) = \frac{\theta}{r_0} (y, -x)^T, \quad \theta(x, y) = \alpha \exp\left[\beta \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r_0^2}\right)\right],$$

$$\alpha = 0.3, \quad \beta = 0.3, \quad r_0 = 0.15, \quad g = 1. \quad (20)$$

Начальные условия (20) являются стационарным решением системы (8), период вращения вихря составляет $T = 3.83715$. На всех границах области задаются граничные условия непротекания.

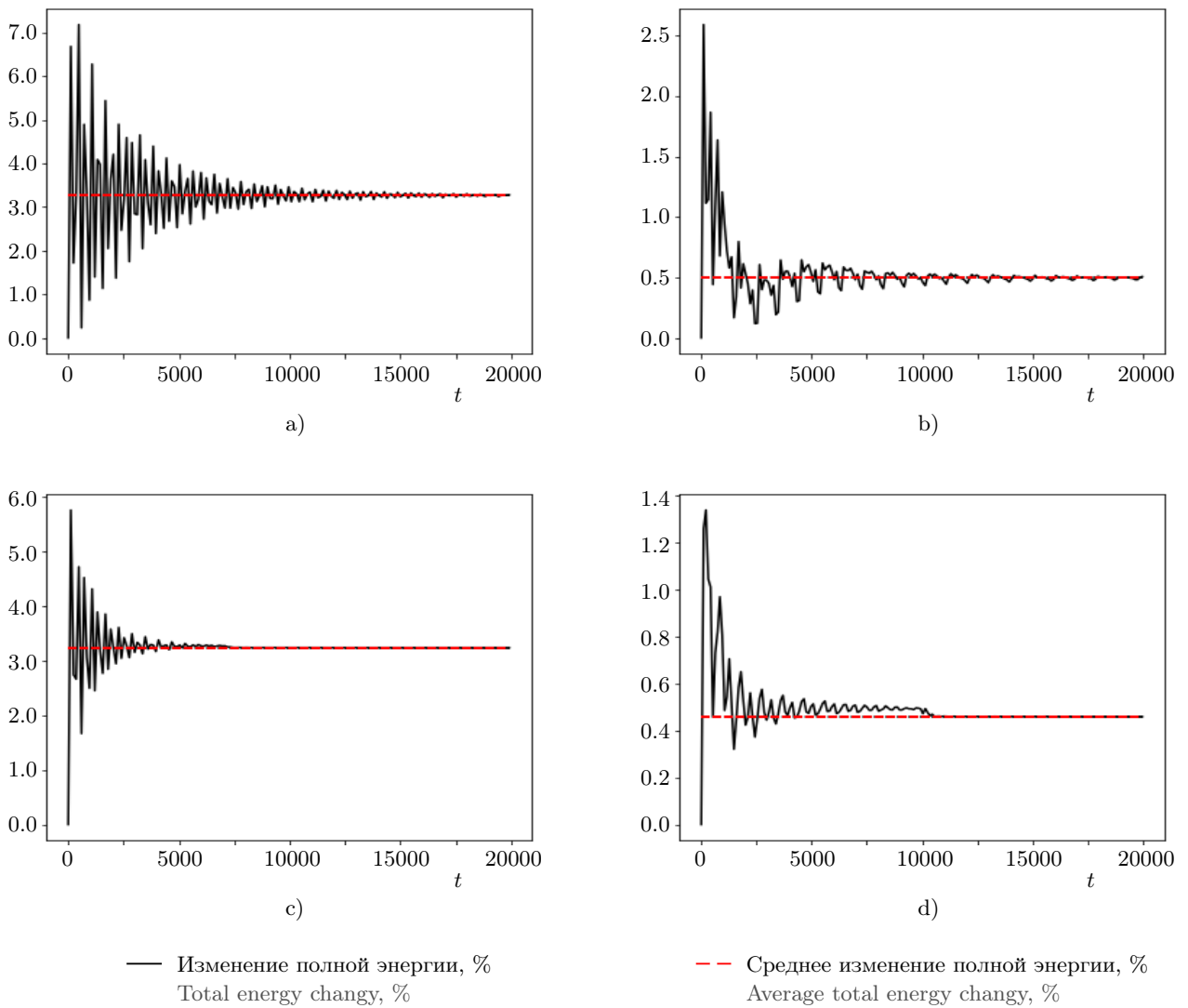


Рис. 7. Изменение полной энергии для задачи (18): а) с 2017 расчетными ячейками с аппроксимацией (14); б) с 3955 расчетными ячейками с аппроксимацией (14); в) с 2017 расчетными ячейками с аппроксимацией (15); д) с 3955 расчетными ячейками с аппроксимацией (15)

Fig. 7. Total energy change for problem (18): a) on 2017 cells with approximation (14); b) on 3955 cells with approximation (14); c) on 2017 cells with approximation (15); d) on 3955 cells with approximation (15)

Результаты расчетов задачи (20) на сетке первого типа (рис. 3 а) с 5700 ячейками при $CFL = 0.3$ представлены на рис. 9 в виде профилей высоты H на начальный момент времени и после пяти оборотов вихря. Профиль поверхности жидкости перевернут для наглядности. Одномерные профили построены для сечения $y = 0$ с помощью осреднения. Для осреднения отрезок $x \in [-1, 1]$ был разбит на 200 отрезков одинаковой длины. В каждом из таких отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ брались те точки потоковых и консервативных переменных, для которых их координаты (x_i, y_i) удовлетворяли неравенствам $x_k \leq x_i < x_{k+1}$, $-0.01 \leq y_i < 0.01$. Из всех попавших в это множество потоковых и консервативных переменных H бралось среднее арифметическое и относилось к координате $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Результаты показывают, что после пяти оборотов минимальное значение высоты изменилось на 0.008, что составляет 5.869% от “глубины” вихря, которая равна 0.1363. Таким образом, представленный алгоритм показывает приемлемые результаты для неструктурированных сеток, но несколько уступает классической схеме КАБАРЕ на четырехугольных ячейках [1, 15] с точки зрения диссипативных свойств.

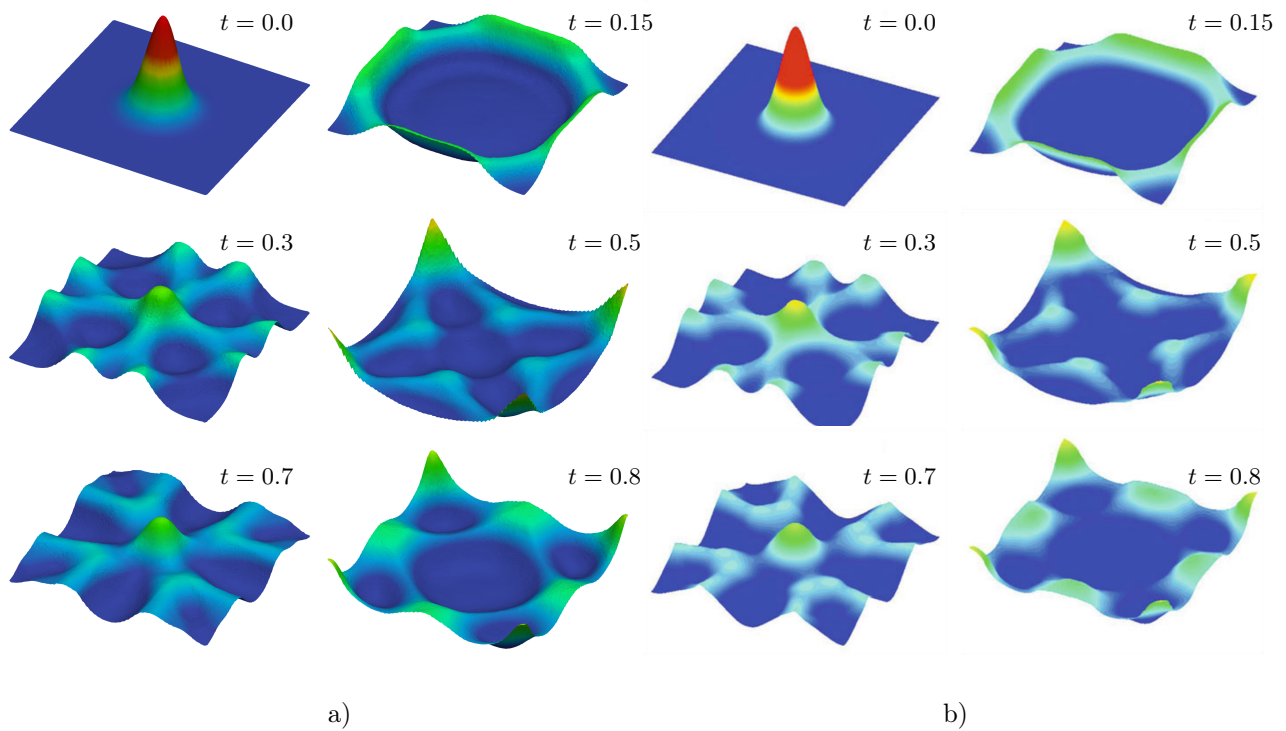


Рис. 8. Профили высоты жидкости H для задачи (19): а) полученные по методу (11)–(17); б) полученные по методу [14]

Fig. 8. Fluid height H profiles for problem (19): а) obtained with method (11)–(17); б) obtained with method [14]

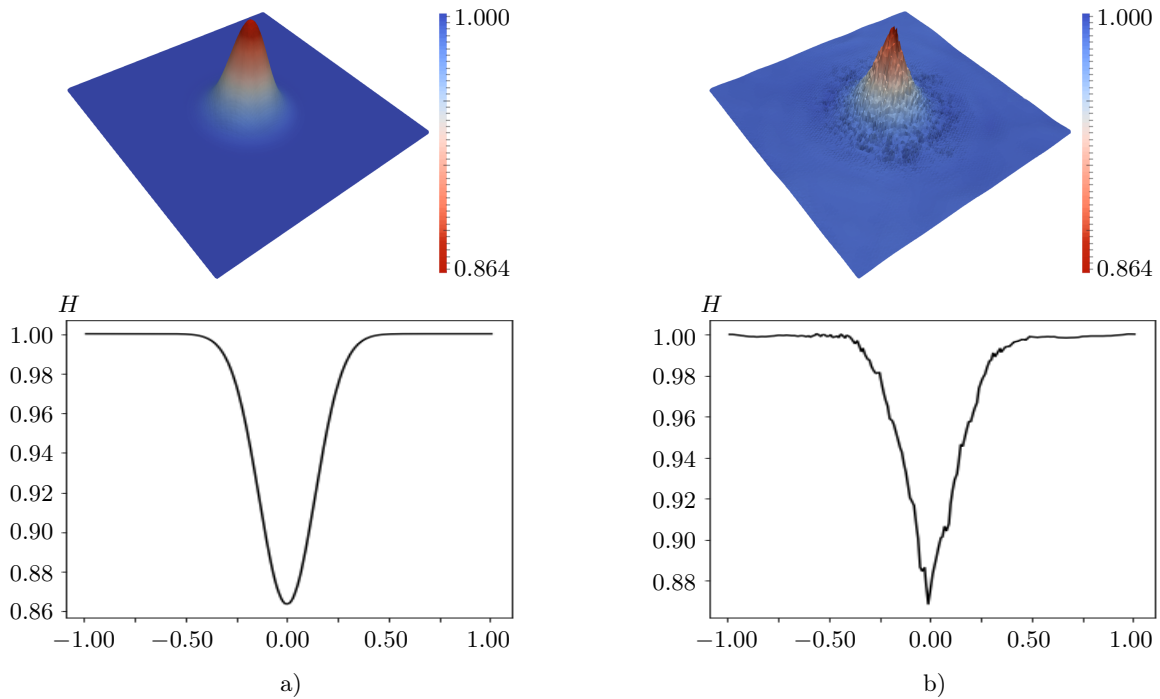


Рис. 9. Профили высоты жидкости H для задачи (20) на плоскости (x, y) и в сечении $y = 0$: а) начальный момент времени; б) после пяти оборотов вихря

Fig. 9. Fluid height H profiles for problem (20) on (x, y) plane and in $y = 0$ slice: а) profiles at the initial moment of time; б) profiles after five revolutions of the whirl

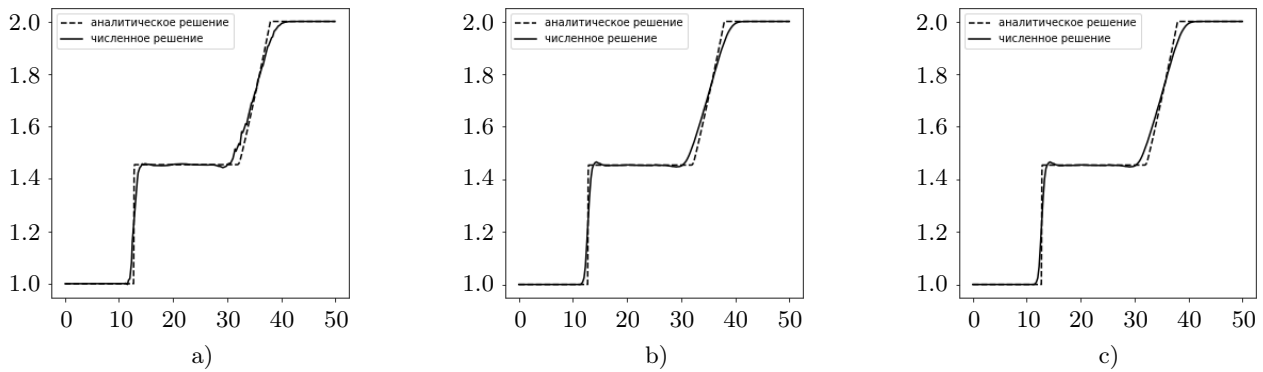


Рис. 10. Профили высоты жидкости H для задачи (21) в сечении $y = 25$ для $t = 9.11$:
 а) сетка первого типа (рис. 3а) с 3948 ячейками; б) сетка второго типа (рис. 3б) с 3955 ячейками;
 в) сетка третьего типа (рис. 3с) с 4050 ячейками

Fig. 10. Fluid height H profiles for problem (21) in $y = 25$ slice at the time instant $t = 9.11$:
 а) type 1 grid (fig. 3a) with 3948 cells; б) type 2 grid (fig. 3b) with 3955 cells;
 в) type 3 grid (fig. 3c) with 4050 cells

6.4. Одномерная задача о распаде разрыва. В качестве заключительного теста продемонстрируем поведение предложенного метода на одномерной задаче о распаде разрыва в области $(x, y) \in [0, 50]^2$:

$$H(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 25, \quad 0 \leq y \leq 50, \\ 2, & 25 < x \leq 50, \quad 0 \leq y \leq 50, \end{cases} \quad \mathbf{u}(x, y, 0) = (0, 0)^T. \quad (21)$$

На всех границах области формально зададим граничные условия непротекания, но расчеты будут вестись до достижения волнами разрежения и ударными волнами границ.

Результаты расчетов задачи (21) при $CFL = 0.3$ и $g = 1$ на момент времени $t = 9.11$ в сечении $y = 25$ на сетках трех разных типов представлены на рис. 10. Графики высоты жидкости H получены с помощью осреднения, аналогичного осреднению в задаче о уединенном вихре.

Все три типа сеток адекватно приближают аналитическое решение: ударные волны занимают 4–6 ячеек осреднения, волны разрежения передаются без заметных артефактов (кроме, разве что, некоторых неровностей на сетке первого типа, вызванных особенностями процедуры осреднения). В случае сетки третьего типа (рис. 10с) решение обладает некоторыми немонотонностями вблизи разрыва, что объясняется неполной работой процедур монотонизации (13) на данном типе сеток. Отметим, что третий тип сеток обычно используется в методах конечных элементов, тогда как методам конечных объемов (представителем которого является предложенная схема) больше подходят сетки с более равномерным распределением узлов. Качественные результаты на сильно неструктурированной сетке второго типа (рис. 10б) позволяют сделать вывод о высоком качестве представленного алгоритма.

7. Заключение. В данной работе был представлен метод КАБАРЕ, обобщенный на треугольные расчетные сетки. Подробно описаны все три фазы алгоритма. В характеристической фазе рассмотрены два варианта аппроксимации правой части при осуществлении монотонизации решения с использованием локальных внутренних мажорантов. Показано, что аппроксимация через квазилинейное уравнение переноса ведет себя лучше на больших временных промежутках. Построенный метод сохраняет все основные свойства классического метода КАБАРЕ: он является явным, обладает минимальным вычислительным шаблоном в одну пространственно-временную ячейку и формально обратим по времени при отключении процедур монотонизации. Данный метод верифицирован на стандартных тестах для уравнений мелкой воды над ровным дном с дозвуковым течением. Показано, что результаты, полученные по представленному методу, согласуются с результатами других методов высокой разрешающей способности.

Список литературы

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М: Изд-во Моск. ун-та, 2013.



2. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact Accurately Boundary-Adjusting high-REsolution Technique for fluid dynamics // Journal of Computational Physics. 2009. **228**, N 19. 7426–7451. doi 10.1016/j.jcp.2009.06.037.
3. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М. Балансно–характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 9. 29–48. <http://www.mathnet.ru/links/e17c5ac50620b8984a8ac3f04e485c1e/mm395.pdf>.
4. Головизнин В.М. Балансно–характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Математическое моделирование. 2006. **18**, № 11. 14–30. <http://www.mathnet.ru/links/1b6d32093c9ba998e1748578adb397/mm118.pdf>.
5. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Козубская Т.К., Максимов Н.В. Схема “КАБАРЕ” для численного решения задач аэроакустики: обобщение на линеаризованные уравнения Эйлера в одномерном случае // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. **49**, № 12. 2265–2280. <http://www.mathnet.ru/links/86e092e0ce971e5bf70445094cc4e88f/zvmmf4805.pdf>.
6. Асфандияров Д.Г., Головизнин В.М., Финогенов А.С. Беспараметрический метод расчета турбулентного течения в плоском канале в широком диапазоне чисел Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. **55**, № 9. 1545–1558. doi 10.7868/S0044466915090021.
7. Сергеев К.М., Головизнин В.М., Глотов В.Ю. LES-моделирование турбулентного теплообмена при течении свинцового теплоносителя в круглой трубе при различных числах Рейнольдса // Математическое моделирование. 2018. **30**, № 7. 29–46. <http://www.mathnet.ru/links/4e81314a3a385d4dd3ea004d321325a2/mm3983.pdf>.
8. Яковлев П.Г. Метод Кабаре для решения двумерных задач аэроакустики и гидродинамики. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Место защиты: Сев.-Вост. федер. ун-т им. М.К. Аммосова. Якутск, 2013.
9. Gorbachev D.Y., Goloviznin V.M. The balance-characteristic numerical method on triangle grids // Journal of Physics: Conference Series. 2019. **1392**. doi 10.1088/1742-6596/1392/1/012036.
10. Protter M.H., Weinberger H.F. Maximum principles in differential equations. New York: Springer, 1984. doi 10.1007/978-1-4612-5282-5.
11. Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Балансно-характеристические разностные схемы для уравнений параболического типа // Математическое моделирование. 2020. **32**, № 4. 94–106. doi 10.20948/mm-2020-04-07.
12. Afanasiev N., Goloviznin V. A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations // Journal of Computational Physics. 2021. **434**. doi 10.1016/j.jcp.2021.110220.
13. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. On the partial difference equations of mathematical physics // IBM Journal of Research and Development. 1967. **11**, N 2. 215–234. <https://web.stanford.edu/class/cme324/classics/courant-friedrichs-lewy.pdf>.
14. Xing Y., Zhang X. Positivity-preserving well-balanced discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations on unstructured triangular meshes // Journal of Scientific Computing. 2013. **57**, N 1. 19–41. doi 10.1007/s10915-013-9695-y.
15. Goloviznin V.M., Solovjov A.V., Zalesny V.B. A new algorithm for solving the shallow water equations on the sphere based on the Cabaret scheme // Journal of Physics: Conference Series. 2018. **1128**. doi 10.1088/1742-6596/1128/1/012091.

Поступила в редакцию
 20 сентября 2022 г.

Принята к публикации
 7 ноября 2022 г.

Информация об авторах

Василий Михайлович Головизнин — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

Даниил Юрьевич Горбачев — аспирант; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

Никита Александрович Афанасьев — аспирант; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New Computational Fluid Dynamics Algorithms for Multiprocessor Computing Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
2. S. A. Karabasov and V. M. Goloviznin, “Compact Accurately Boundary-Adjusting high-REsolution Technique for Fluid Dynamics,” *J. Comput. Phys.* **228** (19), 7426–7451 (2009). doi 10.1016/j.jcp.2009.06.037.
3. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, “Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables,” *Mat. Model.* **15** (9), 29–48 (2003). <http://www.mathnet.ru/links/e17c5ac50620b8984a8ac3f04e485c1e/mm395.pdf>. Cited November 20, 2022.
4. V. M. Goloviznin, “Balanced Characteristic Method for 1D Systems of Hyperbolic Conservation Laws in Eulerian Representation,” *Mat. Model.* **18** (11), 14–30 (2006). <http://www.mathnet.ru/links/707660922f34a0b08d3be629ba33800b/mm118.pdf>. Cited November 20, 2022.
5. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, T. K. Kozubskaya, and N. V. Maksimov, “CABARET Scheme for the Numerical Solution of Aeroacoustics Problems: Generalization to Linearized One-Dimensional Euler Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **49** (12), 2265–2280 (2009) [*Comput. Math. Math. Phys.* **49** (12), 2168–2182 (2009)]. doi 10.1134/S096554250912015X.
6. D. G. Asfandiyarov, V. M. Goloviznin, and S. A. Finogenov, “Parameter-Free Method for Computing the Turbulent Flow in a Plane Channel in a Wide Range of Reynolds Numbers,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **55** (9), 1545–1558 (2015) [*Comput. Math. Math. Phys.* **55** (9), 1515–1526 (2015)]. doi 10.1134/S096554251509002X.
7. K. M. Sergeenko, V. M. Goloviznin, and V. Yu. Glotov, “LES Simulation of Heat Transfer in a Turbulent Pipe Flow with Lead Coolant at Different Reynolds Numbers,” *Mat. Model.* **30** (7), 29–46 (2018) [*Math. Models Comput. Simul.* **11** (2), 176–189 (2019)]. doi 10.1134/S2070048219020157.
8. P. G. Yakovlev, *The Cabaret Method for Solving Two-Dimensional Problems of Aeroacoustics and Hydrodynamics*, Candidate’s Dissertation in Mathematics and Physics (Ammosov North-East Feder. Univ., Yakutsk, 2013).
9. D. Y. Gorbachev and V. M. Goloviznin, “The Balance-Characteristic Numerical Method on Triangle Grids,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **1392** (2019). doi 10.1088/1742-6596/1392/1/012036.
10. M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations* (Springer, New York, 1984), doi 10.1007/978-1-4612-5282-5.
11. V. Y. Glotov, V. M. Goloviznin, and B. N. Chetverushkin, “Balance and Characteristic Finite Difference Schemes for Equations of the Parabolic Type,” *Mat. Model.* **32** (4), 94–106 (2020) [*Math. Models Comput. Simul.* **12** (6), 981–989 (2020)]. doi 10.1134/S2070048220060095.
12. N. Afanasiev and V. Goloviznin, “A Locally Implicit Time-Reversible Sonic Point Processing Algorithm for One-Dimensional Shallow-Water Equations,” *J. Comput. Phys.* **434** (2021). doi 10.1016/j.jcp.2021.110220.
13. R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, “On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics,” *IBM J. Res. Dev.* **11** (2), 215–234 (1967). <https://web.stanford.edu/class/cme324/classics/courant-friedrichs-1ewy.pdf>. Cited November 20, 2022.
14. Y. Xing and X. Zhang, “Positivity-Preserving Well-Balanced Discontinuous Galerkin Methods for the Shallow Water Equations on Unstructured Triangular Meshes,” *J. Sci. Comput.* **57** (1), 19–41 (2013). doi 10.1007/s10915-013-9695-y.
15. V. M. Goloviznin, A. V. Solovjov, and V. B. Zalesny, “A New Algorithm for Solving the Shallow Water Equations on the Sphere Based on the Cabaret Scheme,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **1128** (2018). doi 10.1088/1742-6596/1128/1/012091.

Received
September 20, 2022

Accepted for publication
November 7, 2022

Information about the authors

Vasily M. Goloviznin — Dr. Sci., Professor; Lomonosov Moscow State University, Leninskie gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

Daniil Y. Gorbachev — PhD student; Lomonosov Moscow State University, Leninskie gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

Nikita A. Afanasiev — PhD student; Lomonosov Moscow State University, Leninskie gory, 1, 119991, Moscow, Russia.