

УДК 519.633.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГЕРШБЕРГА–ПАПУЛИСА В ТРЕХМЕРНОЙ ДОПЛЕРОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ

В. В. Пикалов¹, А. В. Лихачев¹

Упрощенная постановка задачи доплеровской томографии приводит к реконструкции функции трех переменных по набору интегралов от нее по плоскостям. В работе рассмотрена возможность решения этой задачи методом Гершберга–Папулиса. На основе метода разработан итерационный алгоритм, включающий процедуры регуляризации. Проведено численное моделирование.

Ключевые слова: доплеровская томография, реконструкция функций, метод Гершберга–Папулиса, метод регуляризации, численное моделирование.

1. Введение. Измерения, основанные на эффекте Доплера, широко используются для определения скорости движения объектов. В случае исследования сложных систем, например таких, как плазма, чаще всего удается получить лишь интегральную информацию. Восстановление локальных характеристик по данным такого рода относится к задачам томографии. В томографических приложениях наиболее часто измеряются интегралы вдоль прямых в трехмерном пространстве. Вопросы, связанные с реконструкцией при таких условиях, достаточно широко освещены в литературе (см., например, [1]). Задача значительно усложняется, когда требуется восстановить векторное поле, каковым является скорость.

В диагностике плазмы наряду с распределением температуры часто также требуется найти и поле скоростей. Другими словами, возникает задача определения функции распределения компонентов плазмы, зависящей от шести переменных: трех пространственных координат и трех компонент импульса. В общем виде такая постановка является крайне сложной. Поэтому на практике применяются методики измерений, позволяющие ее упростить. В работе [2] исследовалось сечение цилиндрически симметричного плазменного столба; таким образом шестимерная задача была сведена к двумерной. При этом было восстановлено распределение модуля скорости ионов вдоль радиуса. В работах [3, 4] также рассматривалась задача восстановления функции распределения ионов в сечении плазмы. Однако симметрии не предполагалось. Было показано, что функция распределения, зависящая от четырех переменных, может быть восстановлена при условии несжимаемости плазмы.

В работе [5] была определена функция распределения ионов по скоростям. Ионы бариевой плазмы в окрестности некоторой точки возбуждались при помощи лазера с перестраиваемой частотой и регистрировалось излучение, испускаемое при их переходе на основной уровень. Плазма помещалась в однородное магнитное поле, при этом предполагалось, что благодаря вращению ионов по ларморовским орбитам их распределение по скоростям симметрично относительно направления магнитного поля. При сканировании лазерной частоты получается одномерная зависимость интенсивности зарегистрированной флуоресценции от лазерной частоты. Она пропорциональна количеству ионов, имеющих определенную величину компоненты скорости вдоль лазерного пучка. В перпендикулярном же направлении ионы могут иметь любую скорость. Следовательно, интенсивность излучения оказывается пропорциональной интегралу по плоскости в пространстве скоростей. В [5] были проведены измерения для нескольких направлений лазерного пучка. По полученным данным реконструирована функция распределения ионов бария по скоростям в окрестности выбранной точки. Таким образом, в этой работе восстанавливалась функция по своим интегралам по плоскостям. Именно такие задачи рассматриваются в настоящей работе.

Развитие экспериментальной техники позволило определять трехмерное распределение плотности импульсов электронов и поверхность Ферми в твердых телах по профилям комптоновского рассеяния. В [6] предложен метод, в основу которого было положено равенство интенсивности комптоновского рассеяния γ -кванта с импульсом \mathbf{p} интегралу от распределения плотности импульсов электронов по плоскости, перпендикулярной \mathbf{p} . Дальнейшее развитие этот метод получил в работе [7], где он был применен для реконструкции распределения плотности импульсов электронов в сплаве $\text{Cu}_{0.9}\text{Al}_{0.1}$. Восстановление производилось по девяти профилям комптоновского рассеяния, измеренным с высоким разрешением.

¹ Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, ул. Институтская 4/1, 630090, Новосибирск; e-mail: pickalov@itam.nsc.ru; www.itam.nsc.ru/lab17

В работе [8] была рассмотрена одна из возможных постановок задачи хромотографии [9]. Там было выведено уравнение, связывающее нестационарное распределение коэффициентов эмиссии в сечении объекта с суммарной интенсивностью излучения, зарегистрированной движущимся детектором. Оказалось, что эта связь осуществляется посредством интеграла по плоскости в \mathbb{R}^3 , два направления в котором являются пространственными, а третье — временным. При этом угол наклона плоскости ко временной оси определяется скоростью движения детектора.

Среди других исследований, где производилась реконструкция функций трех переменных по набору их интегралов по плоскостям, можно назвать следующие. Работы [10, 11], посвященные астрофизике, в которых посредством измерения доплеровского сдвига изучалось движение систем двойных звезд. В [12] была определена скорость длинных океанических волн, бегущих с востока на запад, которые носят название планетарных волн, или волн Россби. Ряд работ медицинского характера, относящихся к измерению скорости кровообращения, изложены в [13, 14].

Из приведенного краткого обзора видно, что рассматриваемая здесь постановка задачи томографии встречается в широком спектре практических задач. Их объединяет лежащее в их основе соотношение, которое связывает искомую функцию g с результатами интегральных измерений f . С математической точки зрения речь идет об обращении интегрального преобразования

$$(Rg) \equiv f(\mathbf{n}, \varrho) = \int_{(\mathbf{n}, \mathbf{r})=\varrho} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

В уравнении (1) действительное число ϱ и единичный вектор \mathbf{n} пробегает ряд значений, определяемых условиями эксперимента. В случае, если ϱ принимает все значения из \mathbb{R}^1 , а \mathbf{n} — все значения из сферы направлений S^2 в \mathbb{R}^3 , то (1) является трехмерным преобразованием Радона, хорошо известным в интегральной геометрии [15]. Свойства преобразования Радона используются для построения алгоритмов решения уравнения (1). Некоторые из них будут кратко охарактеризованы ниже. Наибольшее внимание будет уделено модификации итерационного алгоритма Гершберга–Папулиса [1], предложенной авторами в упомянутой выше работе [8], где он был назван 3DGPR. В настоящей работе проведено его усовершенствование. В частности, в него включен ряд процедур регуляризации, улучшивших качество реконструкции при наличии случайных шумов в данных.

Следует отметить, что процедура обращения трехмерного преобразования Радона используется также как составная часть некоторых алгоритмов решения задачи трехмерной томографии с конусной геометрией сбора данных (см., например, [16–19]).

2. Методы обращения трехмерного преобразования Радона. Алгоритм 3DGPR. Трехмерное преобразование Радона имеет точную формулу обращения [15]:

$$g(\mathbf{r}) = R^{-1}f(\mathbf{n}, \varrho) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{n} \in S^2} f''(\mathbf{n}, \varrho) d\mathbf{n}, \quad \varrho = (\mathbf{r}, \mathbf{n}). \quad (2)$$

Здесь через (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение в \mathbb{R}^3 , интегрирование производится по всей единичной сфере направлений, двойное дифференцирование производится по второй переменной. Формула (2) является основой для построения ряда алгоритмов обращения преобразования Радона. Некоторые из них описаны в отмеченных ранее работах [16–19]. Недостатком алгоритмов, реализующих формулу обращения (2), является то, что для того чтобы они обеспечивали приемлемую точность реконструкции, требуется большое количество проекционных данных. В частности, большим должно быть число ракурсов, с которых ведется наблюдение. В медицинской томографии такое возможно. Однако когда речь идет о физических экспериментах, исследователь имеет дело с гораздо меньшим числом направлений регистрации. В связи с этим требуется разработка специальных методов решения уравнения (1).

В работах [6, 7] применялось разложение по полиномам Якоби и сферическим гармоникам. При этом функцию распределения электронов удалось восстановить по девяти профилям комптоновского рассеяния, что соответствует девяти значениям вектора \mathbf{n} в уравнении (1). Однако задача обладала высокой (гексагональной) симметрией, и это обстоятельство было использовано в алгоритме в качестве априорной информации.

В настоящей работе рассматривается другой подход, основанный на теореме о центральном слое в Фурье-пространстве (см., например, [15]). Эта теорема также применялась для обращения трехмерного преобразования Радона и в [17, 18, 20], но там не строился итерационный процесс, подобный тому, который описан ниже. В [8] авторами был разработан итерационный алгоритм 3DGPR для реконструкции функции трех переменных по ее неполному преобразованию Радона. Ниже описывается дальнейшая модификация

этого алгоритма, включающая, в частности, новые процедуры регуляризации. Алгоритм 3DGPR можно рассматривать как одно из возможных обобщений на трехмерный случай метода Гершберга–Папулиса. Применение этого метода в различных томографических задачах описано в работах [1, 21–23]. Там же приведены соответствующие алгоритмы.

В дальнейшем выражение (1) при фиксированном \mathbf{n} будем называть одномерной проекцией функции $g(\mathbf{r})$. Для рассматриваемого здесь случая трехмерного преобразования Радона теорема о центральном слое связывает Фурье-образ одномерной проекции от некоторой функции со значениями Фурье-образа этой функции на прямой в Фурье-пространстве, определяемой угловыми параметрами проекции. Ниже эту прямую будем называть проекционной прямой. Если преобразование Фурье определено согласно уравнению

$$\tilde{g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{r}) e^{-2\pi i(\mathbf{r}, \nu)} d\mathbf{r}, \quad (3)$$

то формулировку центральной проекционной теоремы можно записать так:

$$\tilde{f}_{\mathbf{n}}(\nu) = \tilde{g}(\mathbf{n}\nu_1), \quad \nu_1 \in \mathbb{R}^1. \quad (4)$$

В [8] была приведена общая схема итерационного процесса для алгоритма 3DGPR. В символической форме она имеет следующий вид

$$g^{(i)}(\mathbf{r}) = \Phi_s^{(i)} F_3^{-1} \Phi_f^{(i-1)} \Gamma_f^{(i)} F_3 g^{(i-1)}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

В уравнениях (5) F_3 и F_3^{-1} — операторы прямого и обратного трехмерного преобразования Фурье; $\Phi_s^{(i)}$ и $\Phi_f^{(i)}$, соответственно, операторы изменения i -го итерационного решения и его Фурье-образа, которые определяются наличием априорной информации, верхний индекс (i) указывает на то, что эти операторы могут меняться в зависимости от номера итерации. Через $\Gamma_f^{(i)}$ обозначен оператор экстраполяции данных, полученных на проекционных прямых, на трехмерное Фурье-пространство.

Работа [8] была ориентирована на исследование плазмы, поэтому при реализации операторов $\Phi_s^{(i)}$ и $\Phi_f^{(i)}$ учитывались характерные особенности, присущие задачам томографии плазмы. В частности предполагалось, что восстанавливаемая функция является достаточно гладкой, поэтому в оператор $\Phi_s^{(i)}$ были включены процедуры усреднения и медианной фильтрации в скользящем окне.

При построении операторов $\Gamma_f^{(i)}$ использовался следующий метод. Каждой точке Фурье-пространства, расстояние от которой до очередной проекционной прямой меньше величины $h^{(i)}$, приписывается значение Фурье-образа, равное значению в проекции этой точки на прямую. Это значение находится путем линейной интерполяции из ближайших к такой проекции узлов сетки на проекционной прямой. В остальных точках Фурье-пространства значение Фурье-образа остается неизменным. После обработки данных со всех проекционных прямых значения, снесенные в каждый из узлов трехмерной сетки, усредняются. Величина $h^{(i)}$, которую мы ниже будем называть радиусом слоя влияния, может зависеть от номера итерации. О выборе последовательности $h^{(i)}$ будет сказано ниже в разделе, посвященном вычислительному эксперименту.

3. Регуляризация алгоритма 3DGPR. Недостатком усреднения и медианной фильтрации в скользящем окне является то, что они не адаптируются к уровню шумов и к виду восстанавливаемой функции. Более гибкой в этом отношении является адаптивная частотная фильтрация. В связи с этим в операторе $\Phi_f^{(i)}$ был реализован регуляризирующий фильтр низких частот:

$$\Omega(\nu) = \frac{1}{1 + \alpha P(\nu_x, \nu_y, \nu_z)}. \quad (6)$$

В уравнении (6) $P(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ — полином четной степени от компонент вектора ν , α — положительный параметр регуляризации. Его величина определялась в работе двумя способами. Первый из них — известный метод невязки. Он был реализован следующим образом. На каждой итерации решалось уравнение

$$\|F_3 g_\alpha^{(i)} - \tilde{g}^{(i)}\|^2 = \sigma^2 \|\tilde{g}^{(i)}\|^2. \quad (7)$$

В (7) $\|\cdot\|$ — норма в пространстве l_2 , $g^{(i)}$ и $g_\alpha^{(i)}$ — не регуляризованное и регуляризованное решения на i -й итерации соответственно, σ — оценка нормы шума.

Второй способ был предложен авторами в работе [24]; в отличие от метода невязки он не требует знания величины σ . При использовании этого метода на каждой итерации также решается уравнение, подобное (7), но вместо оценки шума в правой части стоит оценка согласованности полученного решения с имеющимися проекционными данными. Таким образом, для второго способа параметр регуляризации α вычислялся из следующего уравнения:

$$\|F_3 g_\alpha^{(i)} - \tilde{g}^{(i)}\|^2 = \frac{\|Rg^{(i)} - f\|^2}{\|f\|^2} \|\tilde{g}^{(i)}\|^2. \tag{8}$$

По уравнениям (7) или (8) находится только параметр регуляризации для вычисления обратного преобразования Фурье. Чтобы регуляризовать в целом алгоритм обращения преобразования Радона, для получения параметра α по критерию невязки следовало бы [25] решать уравнение

$$\|Rg_\alpha^{(i)} - f\|^2 = \sigma^2. \tag{9}$$

Но вычислительные эксперименты показали, что невязка, стоящая в левой части (9), не является монотонной функцией α . В связи с этим поиск корней уравнения (9) оказывается весьма затруднителен. В то же время легко показать, что (7) (соответственно, и (8)) в случае регуляризации оператором (6) имеет единственное решение, которое, в частности, может быть найдено таким простым методом, как деление отрезка пополам.

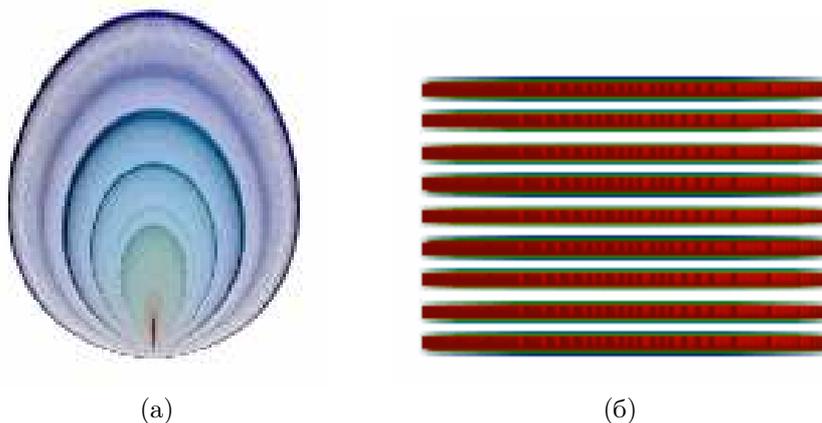


Рис. 1. Трехмерные модели 1 (а) и 2 (б)

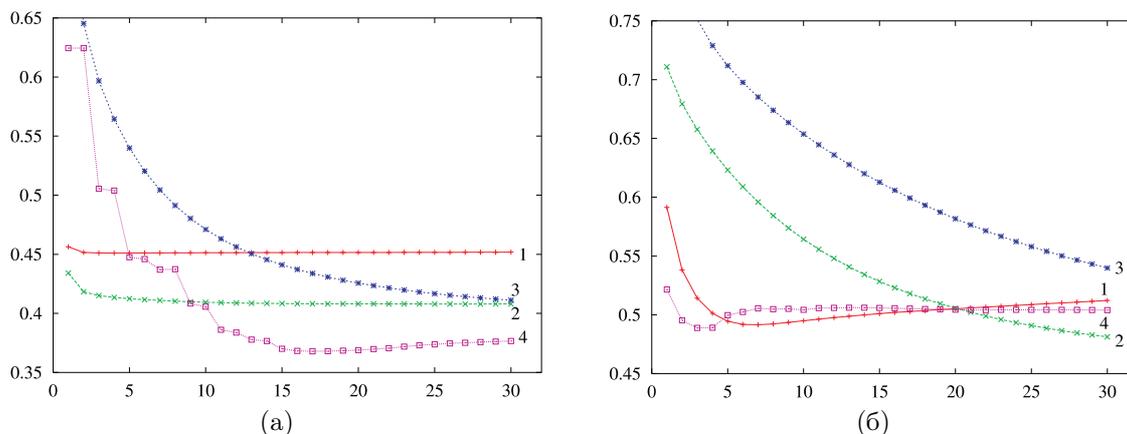


Рис. 2. Зависимости ошибки Δ от номера итерации для разных последовательностей $h^{(i)}$; (а) — модель g_1^M , (б) — модель g_2^M ; на обоих рисунках для кривых 1 — $h^{(i)} = h_0$, 2 — $h^{(i)} = 0.6h_0$, 3 — $h^{(i)} = 0.25h_0$, 4 — $h^{(i)} = 1.5h_0 \cdot 0.8^{[0.5i]}$, где h_0 — величина шага сетки в Фурье-пространстве

4. Вычислительный эксперимент. Разработанный алгоритм реконструкции был исследован путем вычислительного эксперимента. В качестве моделей были взяты две функции трех переменных. Первая

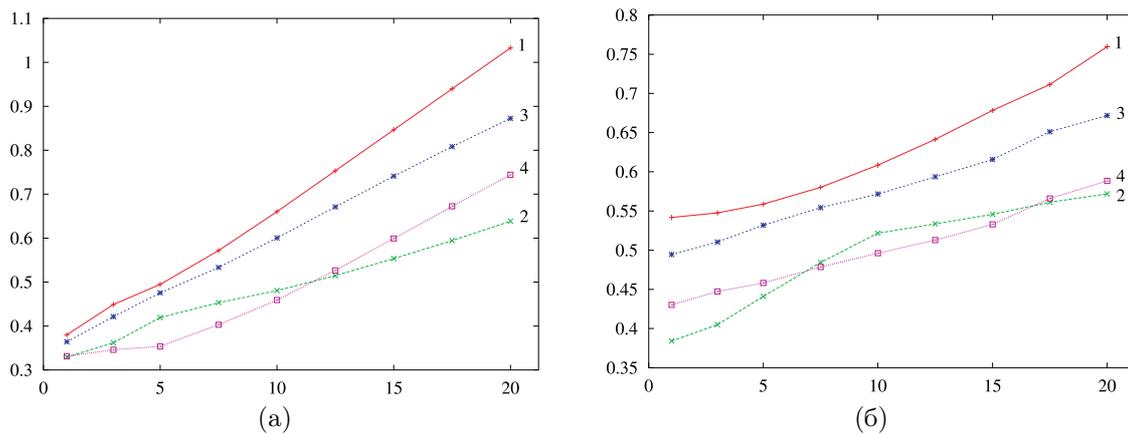


Рис. 3. Зависимости ошибки Δ от уровня шумов σ ; (а) — модель g_1^M , (б) — модель g_2^M ; на обоих рисунках кривая 1 — восстановление без регуляризации, 2 — одновременное применение медианной фильтрации и усреднения, 3 и 4 — использование регуляризирующего фильтра (6), 3 — α вычислялся по критерию невязки (7), 4 — α вычислялся по уравнению (8)

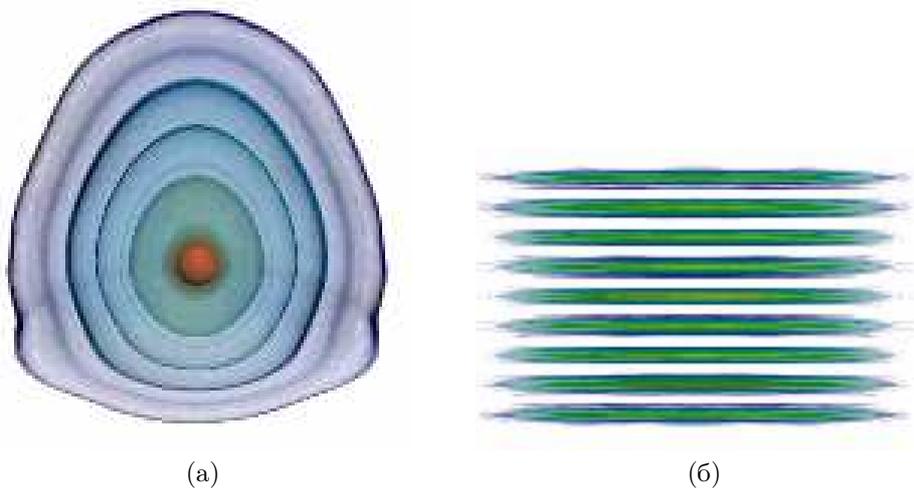


Рис. 4. Реконструкция по данным без шумов; (а) — модель g_1^M , $\Delta = 0.345$; (б) — g_2^M , $\Delta = 0.461$

из них, g_1^M , выбиралась с учетом того, что работа ориентирована на задачи, связанные с определением функции распределения по скоростям. Она задавалась следующим образом:

$$g_1^M(x, y, z) = \exp\{-a(x^2 + y^2) - b(z - z_0)^2\} \frac{(z - z_0)^2}{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}. \quad (10)$$

Значения параметров в (10) были следующими: $a = 0.35$, $b = 0.65$, $z_0 = -0.7$. Функция g_1^M в общих чертах описывает распределение частиц по скоростям, образовавшееся после рассеяния в точке $(0, 0, z_0)$ пучка, первоначально распространявшегося вдоль оси Z . На рис. 1(а) дано изображение нескольких изоповерхностей функции g_1^M .

Другой функцией g_2^M , использованной в численном моделировании, являлась известная модель Дефрiza. Она состояла из девяти цилиндров, радиусом 0.5 каждый. Цилиндры имеют общую ось — Z . Высота всех цилиндров и зазоры между ними одинаковы и равны двум шагам сетки. Модель Дефрiza служит для определения разрешающей способности алгоритма, она представлена на рис. 1(б).

Данные для томографической реконструкции моделировались одномерными проекциями (1). Количество проекций M равнялось $13 \times 13 = 169$, при этом по полярному и азимутальному углам было по 13 отсчетов (исключение составляют результаты, приведенные на рис. 6(а), см. ниже). Их распределение было равномерным в интервале $[0, \pi]$ для полярного угла θ и в интервале $[0, 2\pi]$ для азимутального угла φ .

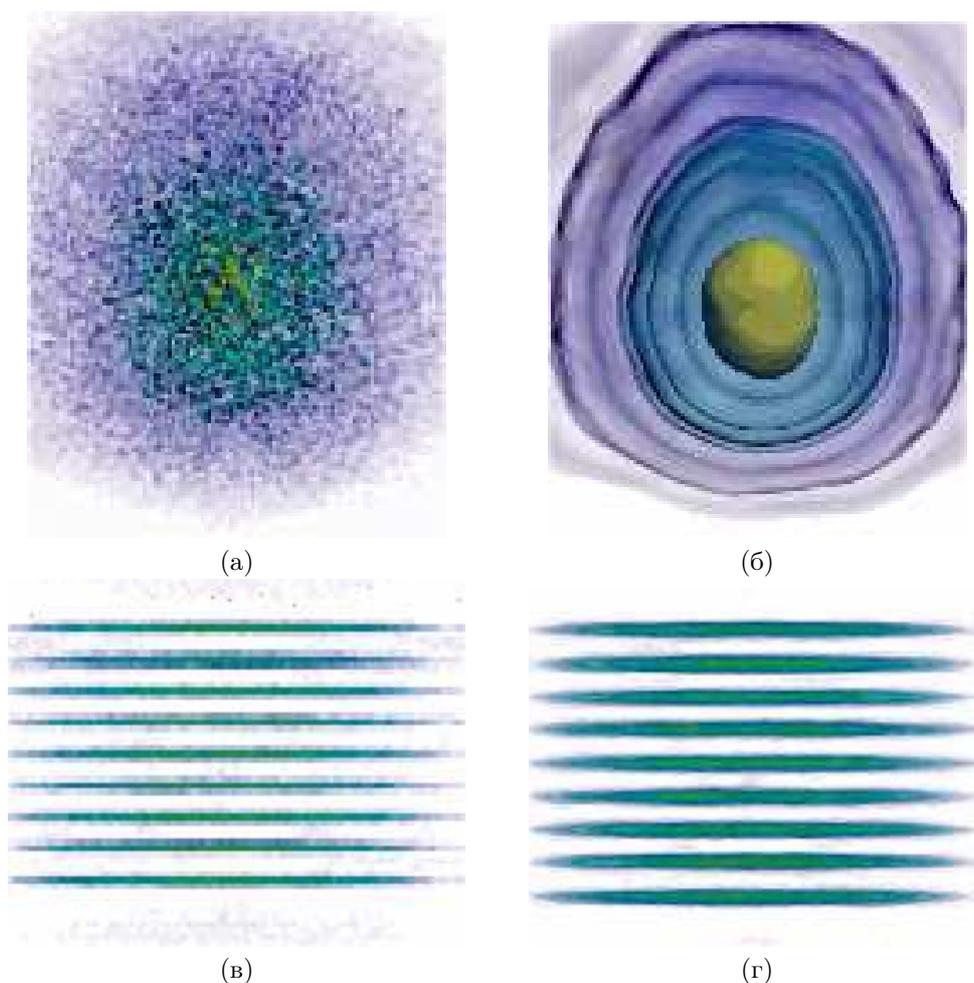


Рис. 5. Реконструкция по данным с шумом 5 %; (а) — модель g_1^M , без регуляризации, $\Delta = 0.471$; (б) — g_1^M , регуляризация фильтром (6) с α , вычисляемым согласно (8), $\Delta = 0.365$; (в) — модель g_2^M , без регуляризации, $\Delta = 0.559$; (г) — g_2^M , регуляризация (6)–(8), $\Delta = 0.458$

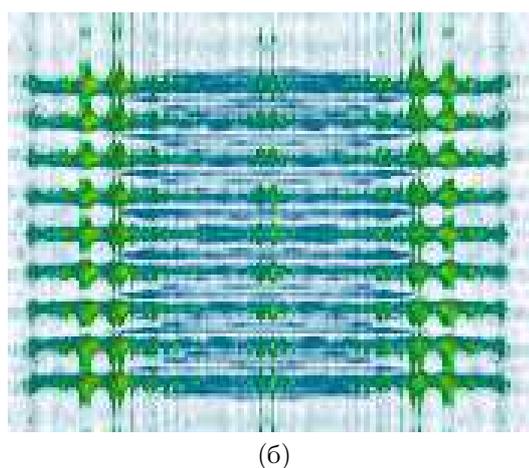
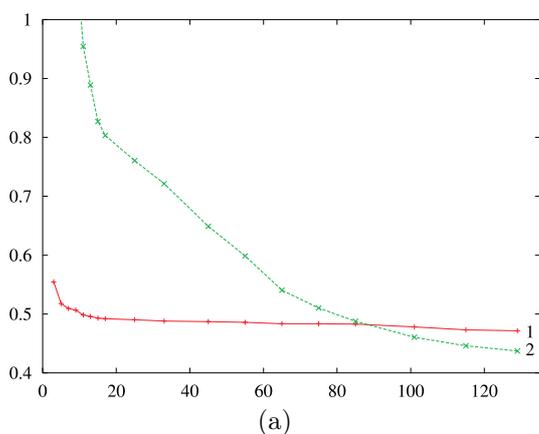


Рис. 6. (а) Зависимости ошибки Δ от корня квадратного из числа проекций M , фантом Дефрiza g_2^M , кривая 1 — алгоритм 3DGPR, 2 — реализации формулы обращения (2); (б) — реконструкция по формуле (2), модель g_2^M , $\sqrt{M} = 33$, $\Delta = 0.721$

Носители функций g_1^M и g_2^M предполагались заключенными внутри единичной сферы. Описывающий ее куб был разбит на $129 \times 129 \times 129$ кубических вокселей. Число узлов сетки на одномерных проекциях

равнялось 129.

Для численной характеристики качества реконструкции использовалась нормированная среднеквадратичная ошибка Δ , которая вычислялась после каждой итерации алгоритма:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\|g^M - g^{(i)}\|^2}{\|g^M\|^2}}, \quad (11)$$

где g^M и $g^{(i)}$ — модель и решение, полученное после i -й итерации соответственно.

На рис. 2 приведены зависимости ошибки Δ от номера итерации для разных последовательностей $h^{(i)}$. Рис. 2(а) относится к модели g_1^M , а рис. 2(б) — к модели g_2^M . На обоих рисунках кривые 1, 2 и 3 соответствуют последовательностям $h^{(i)} = h$, т.е. величина радиуса слоя влияния не зависит от номера итерации. Для кривой 1 — $h = h_0$, для кривой 2 — $h = 0.6h_0$, для кривой 3 — $h = 0.25h_0$, где h_0 есть величина шага сетки в Фурье-пространстве. Для кривых 4 последовательность $h^{(i)}$ была следующей: $h^{(1)} = 1.5h_0$, далее через каждые две итерации величина радиуса слоя влияния уменьшалась в 0.8 раза.

Для исследования разработанных процедур регуляризации производилась реконструкция по проекционным данным, искаженным случайными шумами. Шум предполагался нормально распределенным с нулевым средним и переменной дисперсией. В каждой точке дисперсия составляла $\sigma\%$ от величины проекции в этой точке.

Вычислительный эксперимент показал, что применение регуляризующего фильтра (6) в операторе Φ_f , а также медианной фильтрации и усреднения в операторе Φ_s обеспечивает устойчивость алгоритма (10) по отношению к шумам в достаточно широких пределах значений σ . По проведенному моделированию оказалось, что регуляризация посредством фильтра $\Omega(\nu)$ с параметром α , вычисляемым вторым способом, дает наилучший результат. Вычисление α по критерию невязки (7) с σ , равным дисперсии шума, не обеспечило достаточного сглаживания решения. А одновременное применение медианной фильтрации и усреднения в скользящем окне $3 \times 3 \times 3$, напротив, приводит к переглаживанию.

На рис. 3(а), (б) представлены зависимости Δ от σ для реконструкции моделей g_1^M и g_2^M соответственно. На обоих рисунках кривая 1 отвечает восстановлению без регуляризации, а кривая 2 — восстановлению с одновременным применением медианной фильтрации и усреднения. Кривые 3 и 4 получены при использовании регуляризующего фильтра (6). В первом случае параметр α вычислялся по критерию невязки (7), а во втором — по уравнению (8).

Визуально о возможностях предлагаемого алгоритма можно судить по рисункам 4, 5. На рис. 4(а), (б) представлены результаты реконструкции моделей g_1^M и g_2^M по незашумленным данным. По восстановленной модели Дефрiza видно, что алгоритм обеспечивает высокое пространственное разрешение. На рис. 5 приведены изображения, реконструированные по проекционным данным с пятипроцентным шумом. Решения на рис. 5(а), (б) получены без регуляризации, а на рис. 5(в), (г) — с регуляризацией фильтром $\Omega(\nu)$ с параметром α , вычисляемым по (8).

Было произведено сравнение метода Гершберга–Папулиса с алгоритмом, реализующим формулу обращения (2). Оказалось, что при относительно небольшом количестве проекций алгоритм 3DGPR обеспечивает значительно более высокое качество реконструкции. Помимо этого было установлено, что он более устойчив по отношению к случайным шумам. На рис. 6(а) даны зависимости ошибки Δ от корня квадратного из числа проекций M , полученные для реконструкции модели g_2^M . При этом использовалась проекционная схема, в которой количество отсчетов по полярному и азимутальному углам были равны, а их распределение было равномерным в интервалах $[0, \pi]$ и $[0, 2\pi]$ соответственно. На рис. 6(а) кривая 1 соответствует алгоритму 3DGPR, а кривая 2 — реализации формулы (2). Кроме того, было обнаружено, что при значениях $\sqrt{M} \lesssim 65$ при использовании (2) возникает характерная система высокочастотных артефактов. Она хорошо видна на рис. 6(б), где приведен результат реконструкции посредством (2) модели g_2^M при $\sqrt{M} = 33$.

5. Заключение. В работе рассмотрены возможности применения метода Гершберга–Папулиса для доплеровской томографии и сходных с ней задач. Исследована упрощенная постановка, которая приводит к реконструкции функции трех переменных по набору интегралов от нее по плоскостям. В обзоре, приведенном во введении, показано, что такая задача встречается не только в доплеровской томографии, но и во многих других областях естествознания. Для решения рассматриваемой задачи нами был модифицирован метод Гершберга–Папулиса, в частности, он дополнен новыми процедурами регуляризации. Свойства модифицированного алгоритма исследованы в процессе численного моделирования. Показано, что при малом количестве проекционных данных метод Гершберга–Папулиса обеспечивает значительно более высокое качество реконструкции, нежели простые неитерационные алгоритмы, реализующие формулу обращения трехмерного преобразования Радона. При реконструкции по проекционным данным,

содержащим случайные шумы, была выявлена высокая устойчивость рассматриваемого алгоритма, при использовании разработанных в данной работе процедур регуляризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пикалов В.В., Мельникова Т.С.* Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995.
2. *Poluektov N.P., Efremov N.P.* New tomographic approach for deconvolution of ion velocity and temperature profiles in a plasma centrifuge // *Appl. Phys. (D)*. 1998. **31**, N 8. 988–995.
3. *Balandin A.L., Ono Y.* Tomographic determination of plasma velocity with the use of ion Doppler spectroscopy // *Eur. Phys. J. (D)*. 2001. **17**, N 3. 337–344.
4. *Balandin A.L., Murata Y., Ono Y.* Radial velocity profile reconstruction by Doppler spectroscopy measurements // *Eur. Phys. J. (D)*. 2003. **27**, N 2. 125–130.
5. *Koslover R., McWilliams R.* Measurement of multidimensional ion velocity distributions by optical tomography // *Rev. Sci. Instrum.* 1986. **57**, N 10. 2441–2448.
6. *Kontrym-Sznajd G., Samsel-Czekala M.* New reconstruction method of electron momentum density from Compton profiles // *Appl. Phys. (A)*. 2000. **70**, N 1. 89–92.
7. *Samsel-Czekala M., Kontrym-Sznajd G., Döring G., Schülke W., Kwiatkowska J., Maniowski F., Kaprzyk S., Bansil A.* Electron momentum density in $\text{Cu}_{0.9}\text{Al}_{0.1}$ // *Appl. Phys. (A)*. 2003. **76**, N 1. 87–92.
8. *Лухачев А.В., Пикалов В.В.* Об одной постановке задачи хромотомографии // *Оптика и спектроскопия*. 1996. **80**, № 4. 581–589.
9. *Levin G.G., Vishnyakov G.N.* On the possibilities of chronotomography of high speed processes // *Optics Communications*. 1985. **56**, N 4. 231–234.
10. *Matsumoto K., Mennickent R.E.* On the secondary star of the galactic supersoft X-ray source RX J0925.7-4758 and Doppler tomography of the emission lines // *Astron. Astrophys.* 2000. **356**, N 2. 579–584.
11. *Torres M.A.P., Casares J., Martínez-Pais I.G., Charles P.A.* Rotational broadening and Doppler tomography of the quiescent X-ray nova Centaurus X-4 // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2002. **334**, N 1. 233–240.
12. *Challenor P.G., Cipollini G., Cromwell D.* Use of 3D Radon transform to examine the properties of oceanic Rossby waves // *J. Atmospheric and Oceanic Technology*. 2001. **18**, N 6. 1558–1566.
13. *Lindmo T., Smithies D.J., Chen Z., Nelson J.S., Milner T.E.* Accuracy and noise in optical Doppler tomography studied by Monte Carlo simulations // *Phys. Med. Biol.* 1998. **43**, N 10. 3045–3064.
14. *Yang V.X.D., Gordon M.L., Mok A., Zhao Y., Chen Z., Cobbold R.S.C., Wilson B.C., Vitkin I.A.* Improved phase-resolved optical Doppler tomography using Kasai velocity estimator and histogram segmentation // *Optics Communications*. 2002. **208**, N 4–6. 209–214.
15. *Наттереп Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М: Мир, 1990.
16. *Grangeat P.* Mathematical framework of cone-beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform // *Mathematical Methods in Tomography. Proceedings of conference. Oberwolfach, Germany, 5–11 June, 1990.* Berlin: Springer-Verlag, 1991.
17. *Jacobson C., Danielson P.-E.* Three-dimensional reconstruction from cone-beam data in $O(N^3 \log N)$ -time // *Phys. Med. Biol.* 1994. **39**, N 3. 477–491.
18. *Seger M.M.* Three-dimensional reconstruction from cone-beam data using an efficient Fourier technique combined with a special interpolation filter // *Phys. Med. Biol.* 1998. **43**, N 4. 951–959.
19. *Taguchi K., Zeng G.L., Gullberg G.T.* Cone-beam image reconstruction using spherical harmonics // *Phys. Med. Biol.* 2001. **46**, N 6. 127–138.
20. *Баландин А.Л., Преображенский Н.Г., Седелников А.И.* Томографическое определение трехмерного распределения частиц по скоростям // *ПМТФ*. 1989. **6**. 34–37.
21. *Defrise M., De Mol C.* A regularized iterative algorithm for limited-angle inverse Radon transform // *Optica Acta*. 1983. **30**, N 4. 403–408.
22. *Melnikova T.S., Pickalov V.V.* Computer-aided plasma tomography // *High temperature dust laden jets in plasma technology. Proc. Inter. Workshop. Novosibirsk, USSR, 6–8 September 1988.* Utrecht: VSP, 1990.
23. *Balandin A.L., Likhachov A.V., Panferov N.V., Pickalov V.V., Rupasov A.A., Shikanov A.S.* Emission microtomography of plasma // *Proceedings SPIE*. 1992. **1843**. 68–82.
24. *Лухачев А.В., Пикалов В.В.* Частотная фильтрация в алгебраических алгоритмах трехмерной томографии // *Автометрия*. 1995. **4**. 83–89.
25. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
22.06.2004