

УДК 519.633.9

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ СПИРАЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

В. В. Пикалов¹, А. В. Лихачев¹

Работа посвящена трехмерной трансмиссионной томографии. Исследуется схема регистрации данных, в которой источник движется вдоль спирали. Выполнено количественное сравнение трех алгоритмов реконструкции. При этом в первую очередь сравниваются алгоритмы, основанные на почти точных формулах обращения, с приближенным итерационным методом ART. Предложены модификации известных алгоритмов, повышающие устойчивость к шумам. Даны рекомендации по выбору оптимального алгоритма в разных схемах регистрации томографических проекций.

Ключевые слова: спиральная томография, алгоритмы реконструкции, математическое моделирование.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается задача томографии для проекционных схем с источником, движущимся по спирали. Такая геометрия сбора данных в настоящее время является весьма актуальной, поскольку она широко используется в медицинских томографах. Это важное прикладное значение спиральной геометрии инициировало ее многочисленные исследования. В первую очередь был поставлен вопрос о полноте набора проекционных данных, получаемого при движении источника вдоль спирали, т.е. можно ли точно восстановить внутреннюю структуру объекта по таким данным. В основополагающей работе Туя [1] были выведены достаточные условия, которым должна удовлетворять траектория движения источника для того, чтобы была возможна точная реконструкция. Наиболее важным из них является следующее: любая плоскость, пересекающая носитель восстанавливаемой функции, также должна пересекать траекторию движения источника, по крайней мере, в одной точке. Вообще говоря, спираль, охватывающая полностью объект как по радиусу, так и по высоте, удовлетворяет условиям достаточности Туя. Следовательно, для данного случая в принципе возможно получить точную формулу обращения.

Построению алгоритмов решения задачи томографии, основанных на этой формуле обращения, посвящено большое количество работ. В большинстве своем эти алгоритмы являются приближенными в том смысле, что некоторые части точной формулы заменяются в них более простыми и легко реализуемыми операторами. Условно такие алгоритмы можно разделить на два класса. К первому относятся алгоритмы, в которых из совокупности конусных проекций, зарегистрированных при движении источника по спиральной траектории, путем интерполяции получается набор веерных проекций. По этим проекциям оказывается возможна двумерная реконструкция параллельных слоев объекта, которые, как правило, выбираются перпендикулярными оси спирали [2–5]. В англоязычной литературе этот подход называется *rebinning* метод, ниже он будет именоваться методом пересортировки в соответствии со сложившейся традицией.

Во второй класс входят алгоритмы обратного проецирования с фильтрацией (английский эквивалент — *filtered backprojection*; далее, согласно английской аббревиатуре, они будут называться ГВР-алгоритмы). Уже само название поясняет принцип действия таких алгоритмов: двумерные конусные проекции фильтруются каким-либо образом, а вслед за этим производится процедура обратного проецирования. Последняя является стандартной и не вызывает значительных теоретических затруднений. Она осуществляется как интегрирование проекционных данных по параметру, изменением которого задается спираль. Формула обратного проецирования приведена в разделе 3.1. Наибольший интерес вызывает способ фильтрации. Именно он во многом характеризует точность алгоритма. Существует несколько подходов к построению фильтров. В первую очередь, это различные модификации фильтрации, предложенной Смитом [6] для источника, движущегося по криволинейной траектории, или Фельдкампом с соавторами — для кругового движения источника [7]. Как правило, такая фильтрация сводится к вычислению одномерной свертки с сингулярным ядром преобразования Гильберта. В настоящей работе рассмотрен один из таких алгоритмов, описанный в [8]. Детали его реализации приведены в разделе 3.1.

¹ Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, ул. Институтская 4/1, 630090, Новосибирск; e-mail: pickalov@itam.nsc.ru;

Более сложные FBP-алгоритмы основываются на идее Гранжа, изложенной в [9]. Суть этой работы состоит в том, чтобы из проекционных данных, представляющих собой интегралы от искомой функции вдоль прямых, собрать интегралы от этой же функции по плоскостям. Точнее, в [9] было выведено соотношение, связывающее радиальную производную трехмерного преобразования Радона от некоторой функции трех переменных с интегралом вдоль прямой от двумерной лучевой проекции этой функции. Фильтры, полученные исходя из формулы Гранжа, являются двумерными и обеспечивают более высокое качество восстановления, нежели одномерные фильтры. Методы их построения можно найти, например, в [10–14]. В разделе 3.2 данной работы описан фильтр, разработанный в [11].

На практике часто приходится исследовать протяженные структуры посредством детектора, имеющего относительно небольшой размер. В результате на каждой из проекций отображается только часть объекта. Такие проекции называются усеченными. В настоящей работе будут рассматриваться только усеченные проекции следующего типа. Пусть объект вытянут только в одном направлении, так что его можно вписать в цилиндр. Пусть, далее, система источник–детектор движется по спирали, осью которой является ось этого цилиндра. Размер детектора вдоль нее будем называть его высотой, а перпендикулярно ей — шириной. Предположим, что детектор широкий настолько, что при заданном расстоянии до источника проекция цилиндра не пересекает его боковых сторон. В то же время высота детектора недостаточна, и проекция цилиндра пересекает либо его верхнюю сторону, либо нижнюю, либо и ту и другую.

Реконструкция по усеченным проекциям представляет дополнительную сложность. Для алгоритмов пересортировки отличие между результатами восстановления по полным и усеченным проекциям зависит от способа интерполяции. В частности, для рассмотренного здесь простейшего алгоритма такого типа (см. раздел 3.4) усеченность проекций начинает влиять, когда высота детектора становится меньше шага спирали. Как будет видно из раздела 3.1, для FBP-алгоритмов с одномерным фильтром усеченные проекции всегда вносят дополнительные искажения в решение. Структура фильтров в FBP-алгоритмах, использующих обращение трехмерного преобразования Радона, отличается для усеченных и неусеченных проекций; как именно — будет объяснено в разделе 3.2. Отметим, что рассматриваемый здесь алгоритм ориентирован на реконструкцию по усеченным проекциям.

Упомянутые выше алгоритмы в большинстве своем являются весьма сложными, в особенности это касается FBP-алгоритмов с двумерной фильтрацией проекций. Помимо этого, методы, основанные на точных формулах обращения интегральных преобразований, требуют большого количества проекционных данных для того, чтобы получить приемлемое решение. В качестве альтернативы могут быть привлечены алгебраические методы. Их применение к рассматриваемой постановке задачи томографии производится таким же образом, как и для других геометрий сбора данных (см., например, соответствующие разделы монографии [15]). Из опыта применения алгебраических алгоритмов для томографической реконструкции следует ожидать, что в некоторых случаях для их успешного применения требуется значительно меньше проекционных данных, чем, например, для FBP-алгоритмов. Есть основания предполагать, что итерационные методы будут эффективны для восстановления достаточно простых, высококонтрастных (в том числе бинарных) объектов, в частности, исследуемых в дефектоскопии. В то же время, сложные низкоконтрастные биологические объекты будут лучше реконструироваться посредством более точных алгоритмов, реализующих формулы обращения интегральных преобразований.

Целью настоящей работы является сравнение различных методов решения задачи томографии со спиральной геометрией сбора проекционных данных. При этом, в первую очередь, сравниваются относительно простой приближенный итерационный метод ART с более сложными FBP-алгоритмами, аппроксимирующими точную формулу обращения.

2. Постановка задачи. Рассматривается следующая задача трансмиссионной томографии. Пусть требуется восстановить внутреннюю структуру некоторого непрозрачного объекта. Последний предполагается достаточно протяженным в одном из направлений. Выберем в трехмерном пространстве систему координат (O, x, y, z) так, чтобы ось Z совпадала с этим направлением. Далее предполагается, что проекционные данные для томографической реконструкции регистрируются при помощи оборудования, в котором источник проникающего излучения и детектор неподвижны друг относительно друга. Обозначим расстояние между ними через D . Источник движется вдоль спирали, ось которой лежит на оси Z . При этом плоскость детектора всегда остается параллельной ей. Геометрию сбора проекционных данных поясняет рис. 1.

Пусть R — радиус спирали, $H/2\pi$ — ее шаг. Уравнение такой спирали имеет вид

$$\mathbf{a}(\lambda) = (R \cos \lambda, R \sin \lambda, H\lambda)^T. \quad (1)$$

Обозначим через $g(x, y, z)$ распределение коэффициента поглощения внутри объекта. Введем на детекторе двумерную систему координат (O_1, u, v) . Начало координат поместим в точку ортогональной проекции

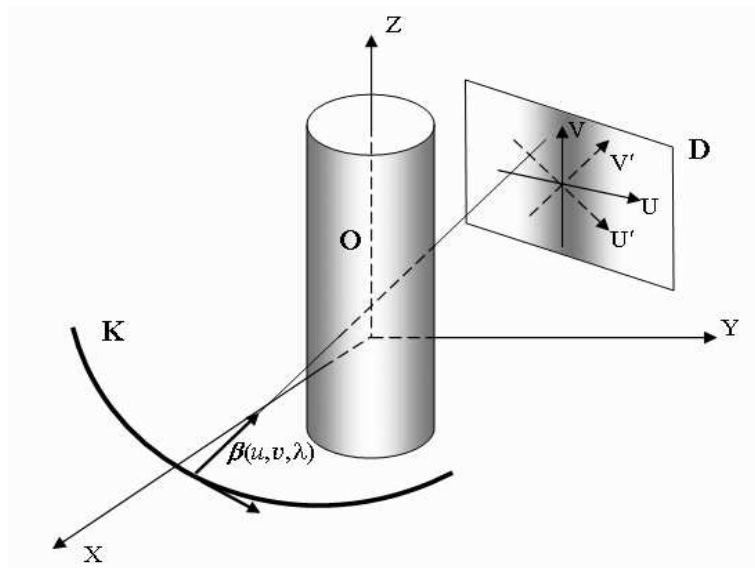


Рис. 1. Схема сбора проекционных данных для рассматриваемой задачи трансмиссионной томографии. К — участок спирали, по которой движется источник, D — плоский детектор, O — исследуемый объект

источника на плоскость, в которой расположен детектор. Ось V направим параллельно оси Z выбранной системы координат в трехмерном пространстве. При этом ось U будет вращаться в плоскости xy при движении детектора вместе с источником вдоль спирали. Через $f(u, v, \lambda)$ обозначим распределение интегрального поглощения по детектору при фиксированном положении источника, определяемом параметром λ . В дальнейшем функцию двух переменных $f_\lambda(u, v) \equiv f(u, v, \lambda)|_{\lambda=\text{const}}$ будем называть двумерной конусной проекцией, или просто проекцией функции $g(x, y, z)$.

В приложениях обычно рассматривается приближение лучевой томографии. Мы также будем его придерживаться на протяжении данной работы. В этом случае связь между функциями $g(x, y, z)$ и $f(u, v, \lambda)$ определяется следующим образом:

$$f(u, v, \lambda) = \int_0^\infty g(a(\lambda) + l\beta(u, v, \lambda)) dl. \quad (2)$$

В уравнении (2) $a(\lambda)$ — точка, в которой находится источник, ее координаты в системе (O, x, y, z) определяются согласно (1); $\beta(u, v, \lambda)$ — единичный вектор в направлении луча, соединяющего источник и точку с координатами (u, v) на детекторе (см. рис. 1).

Рассматриваемая задача трансмиссионной томографии заключается в следующем. Пусть известны двумерные проекции (2) для ряда значений параметра λ из интервала $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. По этим данным требуется определить функцию трех переменных $g(x, y, z)$. Отметим, что проекции могут быть усеченными. Напомним, что в статье рассматриваются проекции, отсеченные по оси V, но не по оси U (см. Введение).

3. Описание алгоритмов.

3.1. Одномерная фильтрация проекций. Обычно FBP-алгоритмы, осуществляющие реконструкцию по проекционным данным, зарегистрированным в системах со спиральным движением источника, строятся следующим образом. На первом этапе производится поворот системы координат на детекторе $(O_1, u, v) \rightarrow (O_1, u', v')$ таким образом, чтобы ось U' оказалась параллельной и сонаправленной касательному вектору к спирали в точке положения источника. Для круглой спирали с равномерным шагом угол поворота γ не зависит от места источника, т.е. является постоянным для любой точки траектории. Он равен

$$\gamma = \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right). \quad (3)$$

Поворот системы координат производится для каждой двумерной проекции. При этом получается набор данных $f(u', v', \lambda)$.

На втором этапе каждая из проекций умножается на весовую функцию, учитывающую геометрический фактор. В результате получается взвешенная проекция, которая в дальнейшем будет обозначаться

через $f_1(u', v', \lambda)$. Для рассматриваемой спирали взвешенная проекция выражается посредством уравнения

$$f_1(u', v', \lambda) = \frac{D}{\sqrt{u'^2 + v'^2 + D^2}} f(u', v', \lambda). \quad (4)$$

Следующим шагом является фильтрация каждой из функций $f_1(u', v', \lambda)$. Фильтрация может быть либо одномерной по переменной u' , либо двумерной; последняя будет описана в разделе 3.2. Один из рассматриваемых здесь алгоритмов реализован согласно работе [8]. Там была предложена одномерная фильтрация в виде свертки с сингулярным в пределе ядром

$$f^F(u', v', \lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_1(u', v', \lambda) * E_\varepsilon(u')), \quad \begin{cases} E_\varepsilon(u') = 1/\varepsilon^2 & u' < \varepsilon \\ E_\varepsilon(u') = 1/u'^2 & u' \geq \varepsilon \end{cases}. \quad (5)$$

Для каждой проекции свертка (5) применяется последовательно для каждой строки при фиксированном значении переменной v' . В качестве реализации ядра $E_\varepsilon(u')$ в настоящей работе был использован другой известный фильтр — Шеппа–Логана [16]. В дискретном виде он определяется следующим уравнением:

$$E_{SL} = \frac{4}{h_{u'}^2(4k^2 - 1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

В выражении (6) $h_{u'}$ — шаг сетки по переменной u' . В дальнейшем при описании вычислительного эксперимента FBP-алгоритм с фильтрацией (5), (6) мы будем для краткости обозначать как FBP_SL, по первым буквам фамилий авторов использованного в нем фильтра.

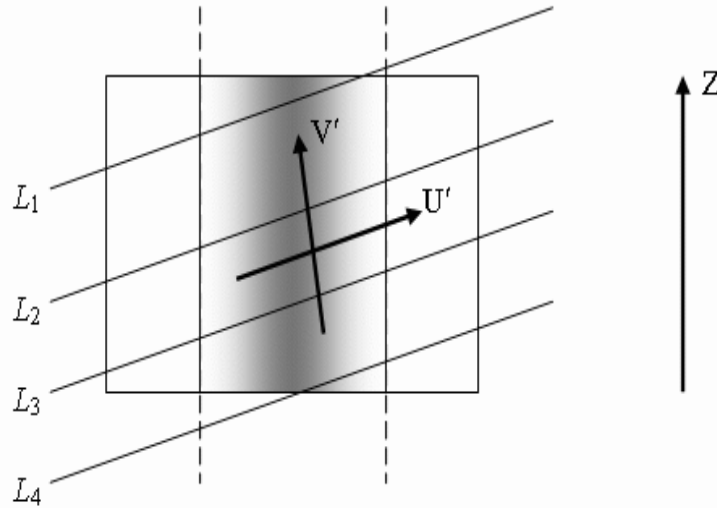


Рис. 2. К одномерной фильтрации усеченных проекций. Фильтрация посредством формулы (5) неверна для прямых L_1, L_4 , поскольку часть их пересечения с носителем полной (неусеченной) проекции находится вне детектора

Наконец, на последнем этапе FBP-алгоритмов производится обратное проецирование фильтрованных функций $f^F(u', v', \lambda)$, в результате которого получается оценка искомой функции $g(x, y, z)$. Для спиральной геометрии регистрации данных обратное проецирование задается формулой

$$g(x, y, z) \approx \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{D\sqrt{R^2 + H^2}}{(x \cos \lambda + y \sin \lambda - R)^2} f^F(u', v', \lambda) d\lambda. \quad (7)$$

Координаты (u', v') повернутой системы на детекторе связаны с координатами (x, y, z) в трехмерном пространстве следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{y \cos \lambda - x \sin \lambda}{R - x \cos \lambda - y \sin \lambda} D \cos \gamma + \frac{(z - H\lambda)}{\sqrt{(x - R \cos \lambda)^2 + (y - R \sin \lambda)^2}} D \sin \gamma, \\ v' &= \frac{y \cos \lambda - x \sin \lambda}{R - x \cos \lambda - y \sin \lambda} D \sin \gamma + \frac{(z - H\lambda)}{\sqrt{(x - R \cos \lambda)^2 + (y - R \sin \lambda)^2}} D \cos \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим применение одномерной фильтрации (5) в случае усеченных проекций. Такая проекция изображена на рис. 2. Здесь же показано несколько прямых, вдоль которых берется свертка. Для ее правильного вычисления интегрирование должно производиться по всей области пересечения носителя полной (неусеченной) проекции с прямой. Из рис. 2 видно, что для прямых L_1, L_4 часть этого пересечения находится вне детектора. Поэтому фильтрация вдоль них производится неверно. Очевидно, что искажения возрастают при увеличении угла γ , что, как следует из формулы (3), соответствует увеличению шага спирали по отношению к ее радиусу.

3.2. Двумерная фильтрация проекций. Как уже было указано во введении, суть двумерной фильтрации сводится к тому, чтобы получить производную трехмерного преобразования Радона от искомой функции согласно методу, разработанному Гранжа [9]. В случае если проекции не усеченные, формула реконструкции, выведенная в [9], может быть применена для любой траектории движения источника, удовлетворяющей условиям Туя, в том числе и для спирали. Однако, в практически важных постановках проекции часто оказываются усеченными, как это было описано выше. Для случая спиральной геометрии с усеченными проекциями формула Гранжа была модифицирована [10, 11]. При этом было введено понятие так называемой области B на детекторе. (Здесь мы следуем терминологии работы [11]; в более поздних публикациях область B чаще называют π -область.) Эта область определяется следующим образом. Пусть источник находится в точке траектории, заданной параметром λ_0 . Тогда верхняя граница области B образуется путем проецирования витка спирали, расположенного выше текущего положения источника, т.е. при $\lambda \in [\lambda_0; \lambda_0 + 2\pi]$ соответственно; нижняя граница образуется при проецировании витка спирали с $\lambda \in [\lambda_0 - 2\pi; \lambda_0]$. В системе координат (O_1, u, v) верхняя граница области B задается уравнением

$$V(u) = \frac{DH}{R} \left(1 + \frac{u^2}{D^2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{u}{D} \right), \quad (9)$$

а нижняя граница задается кривой $-V(-u)$. Отметим, что в рассматриваемой постановке можно считать, что $u \in (-\infty; +\infty)$, поскольку проекции усечены только в направлении оси спирали. Очевидно, что для круглой спирали с постоянным шагом область B одинакова для всех проекций.

На основе понятия области B с использованием формулы Гранжа был разработан ряд алгоритмов реконструкции для спиральной геометрии с усеченными по высоте детектора проекциями. Характерной особенностью этих алгоритмов является то, что для того чтобы найти одно значение радиальной производной трехмерного преобразования Радона, используются данные, принадлежащие различным проекциям (отметим, что исключение здесь составляют алгоритмы, разрабатываемые Кацевичем [13, 14]), в то время как в оригинальной формуле Гранжа при вычислении радиальной производной в любой точке используется только одна двумерная проекция (подробнее см., например, в работе [11]). Исходя из определения области B , можно показать, что точная реконструкция по усеченным проекциям, зарегистрированным при спиральном движении источника, возможна, если траектория движения источника выходит на виток вниз и виток вверх за цилиндр, в который вписан исследуемый объект.

В настоящей работе рассматривается алгоритм, описанный в [11]. Он также относится к классу FBP-алгоритмов. При этом фильтрация проекций является двумерной. Этот алгоритм строится по той же схеме, что была описана в разделе 3.1, но вместо одномерного фильтра (5) используется более сложный двумерный фильтр. Его можно разбить на несколько шагов. Сначала для каждой проекции вычисляются две вспомогательные функции $f_u^{tr}(u', v', \lambda)$ и $f_v^{tr}(u', v', \lambda)$:

$$f_u^{tr}(u', v', \lambda) = \chi_B(u', v') \frac{\partial}{\partial u'} f_1(u', v', \lambda), \quad f_v^{tr}(u', v', \lambda) = \chi_B(u', v') \frac{\partial}{\partial v'} f_1(u', v', \lambda). \quad (10)$$

В уравнениях (10) $f_1(u', v', \lambda)$ — взвешенная проекция (4), $\chi_B(u', v')$ — характеристическая функция области B , которая в рассматриваемом случае одинакова для всех проекций. Далее от вспомогательных функций (10) берется двумерное преобразование Радона:

$$\begin{aligned} \psi_u(s, \varphi, \lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_u^{tr}(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi, \lambda) dt, \\ \psi_v(s, \varphi, \lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_v^{tr}(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Затем функции $\psi_u(s, \varphi, \lambda)$ и $\psi_v(s, \varphi, \lambda)$ умножаются на веса $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ соответственно. После этого производится их обратное проецирование в плоскости детектирования, а от результата берется частная

производная по переменной u' :

$$\begin{aligned} f_u^F(u', v', \lambda) &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial u'} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi_u(u' \cos \varphi + V' \sin \varphi, \varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi, \\ f_v^F(u', v', \lambda) &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial u'} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi_v(u' \cos \varphi + V' \sin \varphi, \varphi, \lambda) \sin \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Фильтрованная проекция получается путем суммирования функций $f_u^F(u', v', \lambda)$, $f_v^F(u', v', \lambda)$ и так называемого граничного члена $f_{\text{bound}}(u', v', \lambda)$:

$$f^F(u', v', \lambda) = f_u^F(u', v', \lambda) + f_v^F(u', v', \lambda) + f_{\text{bound}}(u', v', \lambda). \quad (13)$$

Граничный член в уравнении (13) возникает вследствие того, что используются усеченные проекции. Формулы для его вычисления выведены в работе [11]. Здесь они не приводятся из-за их сложности.

Последовательность операций, задаваемая формулами (11) и (12), может быть заменена фильтрацией функций $f_u^{tr}(u', v', \lambda)$ и $f_v^{tr}(u', v', \lambda)$ в частотной области:

$$\tilde{f}_u^F(\nu_u, \nu_v, \lambda) = -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\nu_u |\nu_u|}{\nu_u^2 + \nu_v^2} \cdot \tilde{f}_u^{tr}(\nu_u, \nu_v, \lambda) \quad \text{и} \quad \tilde{f}_v^F(\nu_u, \nu_v, \lambda) = -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\nu_v |\nu_v|}{\nu_u^2 + \nu_v^2} \cdot \tilde{f}_v^{tr}(\nu_u, \nu_v, \lambda). \quad (14)$$

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что использование формулы (14) вместо (11) и (12) значительно ускоряет время счета. При численной реализации частотного фильтра из (14) возникает проблема для точки $\nu_u = 0, \nu_v = 0$. В настоящей работе значение фильтра в этой точке полагалось равным нулю, поскольку при переходе к параллельному случаю (т.е. при удалении источника на бесконечность) двумерные проекции должны фильтроваться посредством фильтра $|\nu|$, который в начале координат также равен нулю.

Реализованный в данной работе FBP-алгоритм с фильтрацией (10), (13), (14) ниже будет называться FBP_2DF (последние три символа означают, что используется двумерный фильтр).

В заключение этого раздела отметим, что двумерный фильтр (10)–(14) при некоторых допущениях может быть сведен к одномерному фильтру, описанному в разделе 3.1. Заменяем в (10) характеристическую функцию $\chi_B(u', v')$ единицей. Такое, в частности, возможно в случае, если область B полностью покрывает детектор. Тогда фильтрация (11), (12) или (14) будет непосредственно применяться к частной производной взвешенной проекции $f_1(u', v', \lambda)$. Как известно, производная эквивалентна в пространстве Фурье умножению на $i2\pi\nu$; следовательно, (14) можно переписать в виде

$$\tilde{f}_u^F(\nu_u, \nu_v, \lambda) = \frac{\nu_u^2 |\nu_u|}{\nu_u^2 + \nu_v^2} \cdot \tilde{f}_1(\nu_u, \nu_v, \lambda) \quad \text{и} \quad \tilde{f}_v^F(\nu_u, \nu_v, \lambda) = \frac{\nu_v^2 |\nu_v|}{\nu_u^2 + \nu_v^2} \cdot \tilde{f}_1(\nu_u, \nu_v, \lambda). \quad (15)$$

При подстановке (15) в (14) сумма первых двух членов дает фильтрацию функции $f_1(u', v', \lambda)$ одномерным фильтром $|\nu_u|$. Но фильтр Шеппа–Логана (6) является одной из реализаций в пространственной области частотного фильтра $|\nu|$. Таким образом, если пренебречь граничным членом $f_{\text{bound}}(u', v', \lambda)$ и заменить функцию $\chi_B(u', v')$ единицей, то описанный в данном разделе двумерный фильтр сведется к одномерному ϱ -фильтру [15] в направлении u' .

3.3. Алгебраические методы. Алгоритм ART. В условиях относительно небольшого количества проекционных данных томографическую реконструкцию обычно предпочтительнее производить посредством алгебраических методов. При этом на первом этапе производится дискретизация восстанавливаемой функции и проекционных данных. Вопросам дискретизация задач томографии посвящены, например, несколько глав монографий [15, 17]. В результате получается система линейных алгебраических уравнений $Ag = f$, связывающая искомый вектор $g \in R^J$ с вектором измерений $f \in R^I$. Матрица этой системы A , *проецирующая матрица*, существенно зависит от схемы сбора данных и способа дискретизации. В приближении лучевой томографии элемент проецирующей матрицы a_{ij} часто определяют как длину пересечения i -го луча с j -м вокселем. (*Воксели* — это элементарные объемы, на которые разбивается область реконструкции.) Таким образом, в данном случае проецирующая матрица оказывается сильно разреженной. Для решения систем линейных алгебраических уравнений подобного рода существуют специальные итерационные алгоритмы. В данной работе использован один из них — ART (Algebraic Reconstruction

Technique). Он часто применяется в задачах томографической реконструкции. Согласно [15], $(k + 1)$ -й шаг для ART дается формулой

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + \mu \frac{f^{i(k)} - (a^{i(k)}, g^{(k)})}{\|a^{i(k)}\|^2} a^{i(k)}. \quad (16)$$

Здесь $a^{i(k)}$ — $i(k)$ -я строка матрицы A ; μ — так называемый параметр релаксации, влияющий на скорость сходимости алгоритма; $i(k) = [k(\bmod I) + 1]$, т.е. строки матрицы перебираются циклически; $(\circ, \circ)$ — скалярное произведение; $\|\circ\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^J$. В [15] было показано, что итерационный процесс (16) сходится для любого начального приближения $g^{(0)} \in \mathbb{R}^J$, если $0 < \mu < 2$. Если, кроме того, приближение $g^{(0)}$ принадлежит линейной оболочке векторов a^i , $i = 1, 2, \dots, I$, тогда процесс (16) сходится к решению системы уравнений с минимальной нормой, если она совместна, и к обобщенному решению для несовместной системы.

3.4. Алгоритм послойной реконструкции. Упомянутый во введении метод пересортировки представляется привлекательным для решения задачи томографической реконструкции со спиральной схемой сбора проекционных данных. Преимущество метода, в первую очередь, заключается в том, что с его помощью возможно быстрое получение оценки решения в одном или нескольких сечениях объекта, представляющих наибольший интерес. Эффективность такой реконструкции во многом зависит от способа интерполяции проекционных данных. С нашей точки зрения, для быстрого восстановления исследуемого объекта в двумерном сечении предпочтительнее использовать локальную интерполяцию. В частности, использовать для реконструкции одного слоя данные, полученные при прохождении источником одного витка спирали. С другой стороны, для высокой точности реконструкции объекта во многих слоях целесообразнее применять более сложную интерполяцию, в том числе нелокальную, в Фурье-пространстве (см., например, [2]).

В настоящей работе реализован также и алгоритм, основанный на следующей простейшей схеме получения данных для реконструкции объекта в слое, перпендикулярном оси спирали. Пусть требуется восстановить структуру объекта в сечении $z = z_0$. Из уравнения спирали вычисляется параметр λ_0 , при котором она пересекает это сечение. Далее производится двумерная реконструкция по данным, полученным при движении источника в интервале $[\lambda_0 - \pi, \lambda_0 + \pi]$. При этом с каждой двумерной проекции берется одна строка — та, которая лежит в плоскости $z = z_0$. Полученный результат приписывается сечению $z = z_0$. Помимо простоты преимущество данного метода состоит в том, что для восстановления искомой функции в сечении используются измеренные данные, а не полученные в результате интерполяции, которая всегда вносит дополнительные искажения. Для двумерной реконструкции по полученному набору одномерных верных проекций использовался следующий FBP-алгоритм (см., например, [18]):

$$g(r, \phi, z_0) = \frac{1}{2} \int_{\lambda_0 - \pi}^{\lambda_0 + \pi} U^2(r, \phi, \lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v, \lambda) |_{v=z_0} E_{SL}(s(r, \phi, \lambda) - u) \frac{D}{\sqrt{D^2 + u^2}} du d\lambda. \quad (17)$$

В уравнении (17) искомая функция записана в цилиндрических координатах, E_{SL} — фильтр Шеппа-Логана (6),

$$U^2(r, \phi, \lambda) = \frac{RD}{(R + r \sin(\lambda - \phi))^2}, \quad s(r, \phi, \lambda) = \frac{Dr \cos(\lambda - \phi)}{R + r \sin(\lambda - \phi)}. \quad (18)$$

Очевидно, что для того чтобы собрать описанным выше способом верные проекции со всех азимутальных направлений, необходимо, чтобы для всех $\lambda \in [\lambda_0 - \pi, \lambda_0 + \pi]$ детектор пересекал плоскость $z = z_0$. Таким образом, размер детектора должен быть равен, по крайней мере, шагу спирали (напомним, что по условиям рассматриваемой геометрии источник всегда проецируется в центр детектора).

4. Вычислительный эксперимент.

4.1. Описание модели и проекционной геометрии. Выбранная для вычислительного эксперимента модель представляет из себя полый цилиндр. Его центр находится в начале координат, ось совпадает с осью Z . Высота цилиндра в выбранных безразмерных единицах 1.6, радиус 0.85, толщина стенок 0.2, их плотность 1.0. Внутри стенки расположены три сферические полости маленького размера. Центры всех трех полостей лежат в плоскости $z = 0$, радиусы двух из них 0.03, радиус третьей — 0.035. На рис. 3 представлены изображения модели. На рис. 3а дано трехмерное изображение цилиндрической изоповерхности $g(x, y, z) = 1$, ее часть для $z > 0$ удалена, так что видны сферические отверстия. На рис. 3б приведено сечение модели плоскостью $z = 0$.

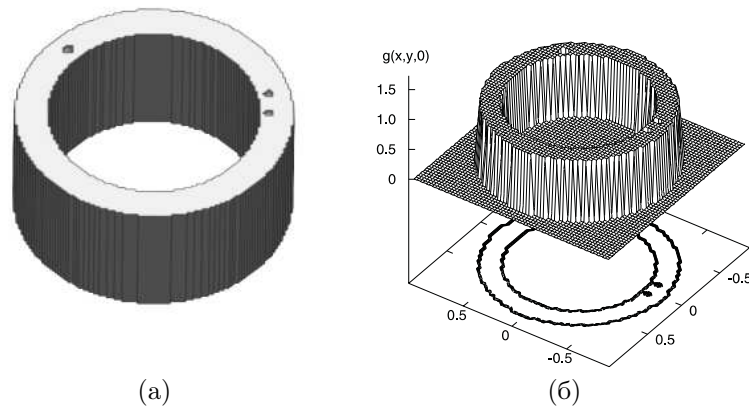


Рис. 3. Модель, использовавшаяся в вычислительном эксперименте; а) трехмерное изображение, в котором удалена часть модели для $z > 0$; б) сечение плоскостью $z = 0$

В качестве области реконструкции был взят куб с центром в начале координат и длиной ребра 2.0. На кубе задана равномерная сетка $129 \times 129 \times 129$ узлов. Расстояние между ближайшими узлами равнялось 0.015625. Детектор был прямоугольной формы. Его ширина (размер вдоль оси U) всегда равнялась 3.0, а высота варьировалась для различных расчетов. На детекторе задавалась квадратная сетка с тем же шагом, что и сетка на области реконструкции, т.е. 0.015625. Радиус спирали также варьировался, но при этом всегда выполнялось условие $D = R + 1$.

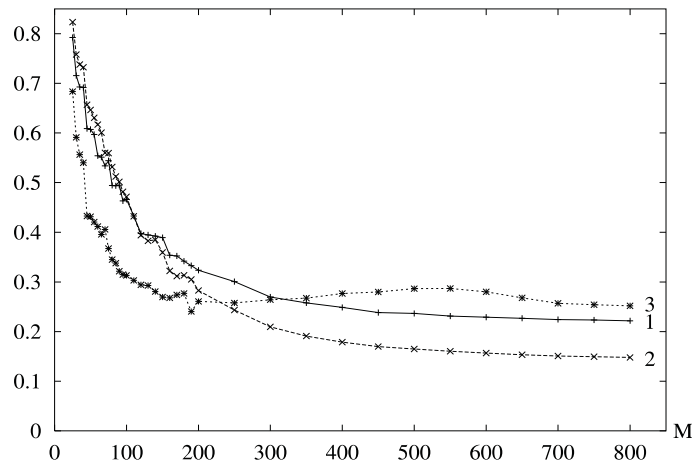


Рис. 4. Зависимости ошибки Δ от числа проекций M . Параметры спиральной траектории: координата нижней точки -1.0 , шаг 0.4 , количество витков 5 , радиус 2.0 . Высота детектора 0.8 . Кривая 1 — алгоритм FBP_SL, 2 — FBP_2DF, 3 — ART

Для количественной оценки точности реконструкции использовалась нормированная среднеквадратичная ошибка Δ , которая определялась следующим образом:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i,j,k} (g_0(x_i, y_j, z_k) - g(x_i, y_j, z_k))^2}{\sum_{i,j,k} (g_0(x_i, y_j, z_k))^2}}. \quad (19)$$

В формуле (19) $g_0(x_i, y_j, z_k)$ и $g(x_i, y_j, z_k)$ — значения модели и восстановленной функции в узле с координатами (x_i, y_j, z_k) ; суммирование ведется по всем узлам.

4.2. Зависимость качества реконструкции от числа проекций и числа витков. Как правило, увеличение числа регистрируемых проекций влечет усложнение оборудования. В случае медицинской

томографии это к тому же ведет к возрастанию дозы облучения, получаемой пациентом. Поэтому исследование зависимости качества реконструкции от числа проекций представляется весьма актуальным.

На рис. 4 даны зависимости среднеквадратичной ошибки Δ от числа проекций M . Параметры спиральной траектории, по которой движется источник, следующие: координата нижней точки -1.0 , шаг 0.4 , количество витков 5 , радиус 2.0 . Высота детектора 0.8 , на нем задана сетка 193×51 узлов. Кривая 1 соответствует реконструкции алгоритмом FBP_SL, кривая 2 — алгоритмом FBP_2DF, кривая 3 — алгоритмом ART. Из рис. 4 видно, что при относительно малом числе двумерных проекций ART имеет значительное преимущество перед рассматриваемыми FBP-алгоритмами. Однако для $M > 190 \div 250$ ошибка восстановления алгоритмом ART перестает уменьшаться и даже несколько возрастает. Возможно, это связано с тем, что система линейных алгебраических уравнений, которая решается посредством ART, при $M \approx 220$ становится переопределенной, т.е. число уравнений в ней начинает превосходить число неизвестных. При $M > 250 \div 300$ наилучшие результаты дает алгоритм FBP_2DF. Отсюда можно заключить, что сложную двумерную фильтрацию целесообразно применять только при наличии достаточно большого числа проекций.

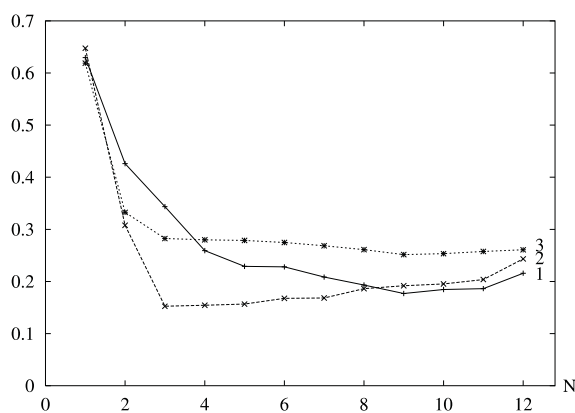


Рис. 5. Зависимости ошибки реконструкции от числа витков спирали. Высота спирали 2.0 , радиус 2.0 , число проекций 600 , высота детектора 0.8 . Кривая 1 — алгоритм FBP_SL, 2 — FBP_2DF, 3 — ART

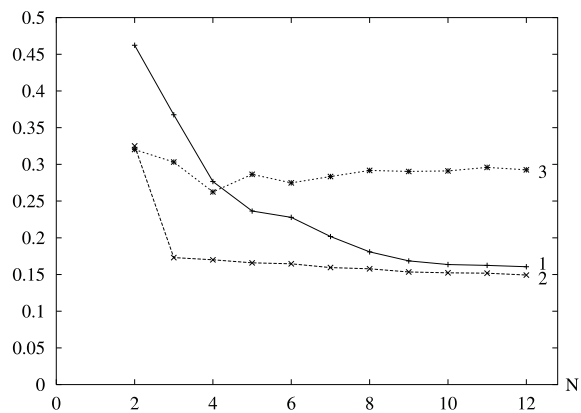


Рис. 6. Зависимости ошибки реконструкции от числа витков спирали. Высота спирали 2.0 , радиус 2.0 , высота детектора 0.8 . Число проекций на один виток остается постоянным и равным 100 . Кривая 1 — алгоритм FBP_SL, 2 — FBP_2DF, 3 — ART

На рис. 5 приведены зависимости ошибки Δ от числа витков спирали N . При этом количество проекций остается постоянным и равным 600 . Координата нижней точки спирали -1.0 , ее высота 2.0 . Шаг спирали получается путем деления ее высоты на количество витков. Радиус спирали 2.0 , расстояние между источником и центром детектора 3.0 . Так же, как и для рис. 4, кривая 1 соответствует алгоритму FBP_SL, кривая 2 — алгоритму FBP_2DF, кривая 3 — алгоритму ART. Видно, что когда траектория делает только один виток, качество реконструкции всеми алгоритмами невысокое. Для двух-трех витков оно резко улучшается. При дальнейшем увеличении числа витков уменьшение ошибки Δ не столь значительно. Более того, начиная с некоторого числа витков (своего для каждого алгоритма) Δ начинает расти. Объяснение этому может быть следующим. При слишком малом числе витков проекционные данные оказываются хорошо обеспеченными по азимутальному углу и плохо по полярному. С другой стороны, при чрезмерном увеличении количества витков число положений источника на каждый из них уменьшается, поскольку в целом оно остается постоянным. Таким образом, получаются проекционные данные хорошо обеспеченные по полярному углу и плохо — по азимутальному, что также ведет к ухудшению восстановления. На рис. 6 также даны зависимости Δ от N (номера кривых имеют тот же смысл, что и на рис. 4, 5). Но здесь, в отличие от рис. 5, постоянно число проекций на один виток M/N : оно равно 100 . По рис. 4–6, в частности, можно заключить, что если $N \geq 3$, то для того чтобы повысить точность реконструкции алгоритмом FBP_2DF, целесообразнее увеличивать отношение M/N , а не N . В то же время для алгоритма FBP_SL важно увеличение обоих этих параметров.

На рис. 7 даны трехмерные изображения модели, реконструированной по различному числу проекций. Для рис. 7 а, б, в оно равно 200 , а для рис. 7 г, д, е — 400 . Число витков спирали, по которой движется источник, равно 5 , ее радиус 2 , высота детектора 0.8 . На рис. 7 а, г показаны результаты восстановления

алгоритмом FBP_2DF, на рис. 7б, д — алгоритмом ART. На рис. 7в, е также представлены решения, полученные посредством ART, но при этом после каждой его итерации к решению применялась медианная фильтрация [19]. Из этих рисунков видно, что включение медианного фильтра в итерационный процесс существенно подавляет артефакты, что ведет к уменьшению среднеквадратичной ошибки. С другой стороны, низкочастотный фильтр может “замыть” тонкую структуру, присутствующую в исследуемом объекте, однако для рассматриваемой модели этого практически не произошло.

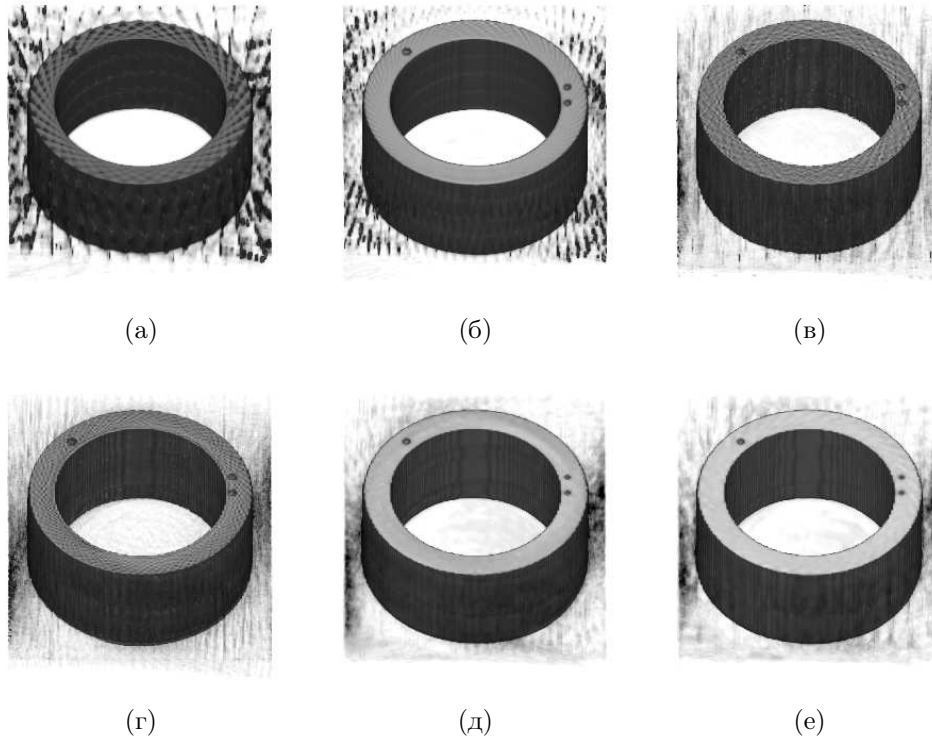


Рис. 7. Результаты реконструкции. Параметры $N = 5$, $R = 2$, шаг 0.4, высота детектора 0.8.
 а) $M = 200$, FBP_2DF, $\Delta = 0.283$; б) $M = 200$, ART, $\Delta = 0.261$; в) $M = 200$, ART с фильтрацией, $\Delta = 0.143$; г) $M = 400$, FBP_2DF, $\Delta = 0.179$; д) $M = 400$, ART, $\Delta = 0.253$;
 е) $M = 400$, ART с фильтрацией, $\Delta = 0.167$

4.3. Влияние геометрических параметров. Для томографических установок, использующих проникающее излучение, важными параметрами являются расстояния между источником и объектом, а также между источником и детектором. Поэтому в настоящей работе проведено исследование влияния радиуса траектории движения источника на качество реконструкции. На рис. 8 показаны зависимости среднеквадратичной ошибки Δ от логарифма радиуса спирали $\ln R$. Остальные параметры: координата нижней точки траектории -1.0 , шаг спирали 0.4, количество витков 5. Расстояние между источником и центром детектора $D = R + 1$. Число проекций 400. Кривая 1 на рис. 8 соответствует алгоритму FBP_SL, кривая 2 — алгоритму FBP_2DF, кривая 3 — алгоритму ART. Из рис. 8 видно, что в целом влияние радиуса спирали на среднеквадратичную ошибку реконструкции не очень велико. То, что качество восстановления не улучшается значительно при увеличении радиуса спирали (для алгоритма FBP_2DF оно даже несколько падает), можно объяснить, по-видимому, уменьшением эффективного разрешения на проекции. Отметим также, что для больших R , когда проекции становятся практически параллельными, алгоритмы FBP_SL и FBP_2DF дают приблизительно одинаковую ошибку.

В работе рассматривается реконструкция по усеченным проекциям. Под этим подразумевается, что высота детектора меньше высоты объекта. В описанных выше вычислительных экспериментах отношение этих величин было 1:2. Ниже приводятся результаты исследования зависимости точности восстановления от высоты детектора. Расчеты производились при следующих условиях: координата нижней точки траектории -1.0 , ее шаг 0.4, $N = 5$, $M = 400$, $R = 2.0$ (напомним, что высота реконструируемого объекта составляет 1.6). На рис. 9 даны зависимости ошибки Δ от высоты детектора d . При этом шаг на проекциях по обеим координатам остается постоянным, т.е. при увеличении d увеличивается число узлов в

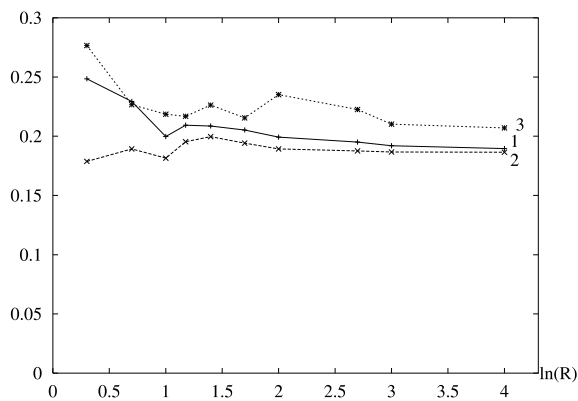


Рис. 8. Зависимости ошибки реконструкции от логарифма радиуса траектории источника. Шаг спирали 0.4, число витков 5, число проекций 400, высота детектора 0.8. Кривая 1 — алгоритм FBP_SL, 2 — FBP_2DF, 3 — ART

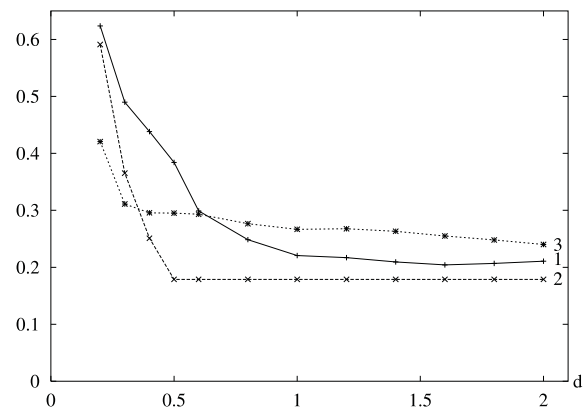


Рис. 9. Зависимости ошибки реконструкции от высоты детектора. Шаг спирали 0.4, число витков 5, число проекций 400, высота объекта 1.6. Кривая 1 — алгоритм FBP_SL, 2 — FBP_2DF, 3 — ART

вертикальном направлении. Кривая 1 на рис. 9 соответствует алгоритму FBP_SL, кривая 2 — алгоритму FBP_2DF, кривая 3 — алгоритму ART. Рис. 9, в частности, показывает, что для алгоритма FBP_2DF существует относительно небольшая предельная величина высоты детектора d_{lim} , при переходе через которую ошибка реконструкции перестает меняться, т.е. решение перестает зависеть от d . В проведенном вычислительном эксперименте было получено $d_{lim} = 0.4$.

4.4. Реконструкция при наличии случайных шумов. Важной характеристикой любого алгоритма томографической реконструкции является его устойчивость по отношению к случайным шумам. В связи с этим была произведена серия расчетов, в которых использовались зашумленные проекционные данные. Шум предполагался гауссовским со средним, равным нулю, и постоянной для каждой двумерной проекции дисперсией, составляющей ξ процентов от ее максимального значения. На рис. 10 представлены результаты этого исследования в виде кривых зависимости Δ от ξ . Для рис. 10 а восстановление производилось без предварительной обработки проекций, а для рис. 10 б проекции сглаживались двумерным медианным фильтром в скользящем окне 3×3 . Параметры траектории были следующими: координата нижней точки -1.0 , шаг 0.4 , $N = 5$, $R = 2.0$. Число проекций M равнялось 400. Высота детектора составляла 0.8. Как и всюду выше, на рис. 10 а, б кривые 1, 2 и 3 соответствуют алгоритмам FBP_SL, FBP_2DF и ART. Из сравнения рис. 10 а и рис. 10 б видно, что применение медианной фильтрации проекций существенно повышает качество реконструкции всеми алгоритмами по зашумленным данным. Проведенные расчеты показали, что ART наименее устойчив по отношению к шумам. Устойчивость алгоритмов FBP_SL, FBP_2DF оказалась примерно одинаковой, при этом более высокой, чем у ART.

4.5. Точность восстановления отдельных слоев. Как уже упоминалось в разделе 3.4, предметом интереса может служить не весь трехмерный объект, а лишь некоторые его сечения, перпендикулярные оси спирали. Например, для выбранной модели таковым является сечение плоскостью $z = 0$, которая пересекает все три сферические полости. Поэтому важно знать, как зависит точность реконструкции слоя от его положения относительно концов спирали. На рис. 11 приведены зависимости ошибки восстановления слоя от его номера. Слои берутся перпендикулярно оси Z, которая также является осью спирали, вдоль которой движется источник. Нижняя точка спирали имеет координату -1.0 , ее шаг равен 0.4 , радиус 2.0 , количество витков 5. Число проекций 400. Высота детектора 0.8. Кривые 1, 2 и 3 на рис. 11 соответствуют алгоритмам FBP_SL, FBP_2DF и ART. По рис. 11 можно заключить, что точность послойной реконструкции всеми алгоритмами достаточно однородная, за исключением нескольких верхних и нижних сечений объекта, где ошибка восстановления резко увеличивается.

На рис. 12 представлены сечения плоскостью $z = 0$ результатов реконструкции модели различными алгоритмами. Параметры расчетов были такими же, как для рис. 11. На рис. 12 а, б, в изображены сечения решений, полученных посредством алгоритмов FBP_SL, FBP_2DF и ART соответственно. На рис. 12 г показано сечение, восстановленное двумерным алгоритмом (17), (18), как это было описано в разделе 3.4. Из рис. 12 видно, что лучше всего тонкая структура (сферические полости) проявляется при реконструкции алгоритмами обратного проецирования с фильтрацией FBP_SL и FBP_2DF, причем алгоритм FBP_2DF

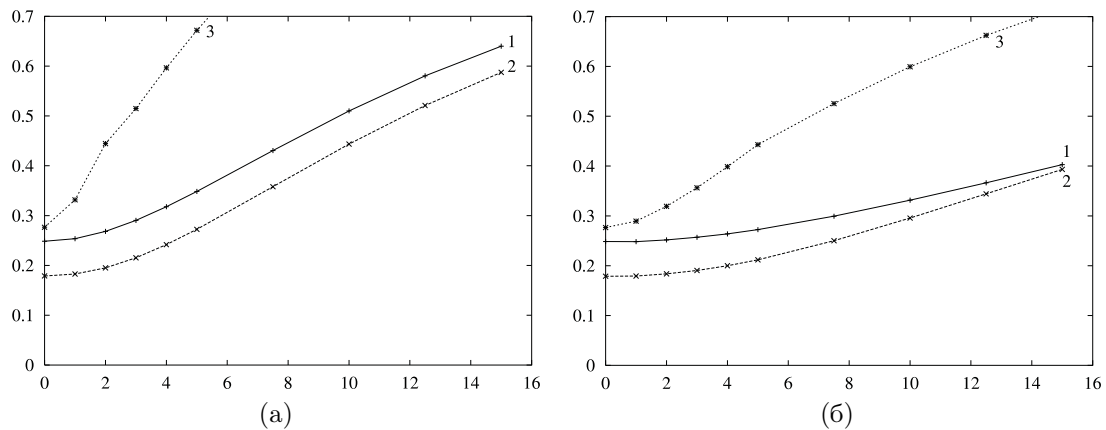


Рис. 10. Зависимости ошибки реконструкции от дисперсии случайного шума. Шаг спирали 0.4, число витков 5, число проекций 400. Кривая 1 — алгоритм FBP_SL, 2 — FBP_2DF, 3 — ART. Для рис. 10 б проекции сглаживались двумерным медианным фильтром в скользящем окне 3×3

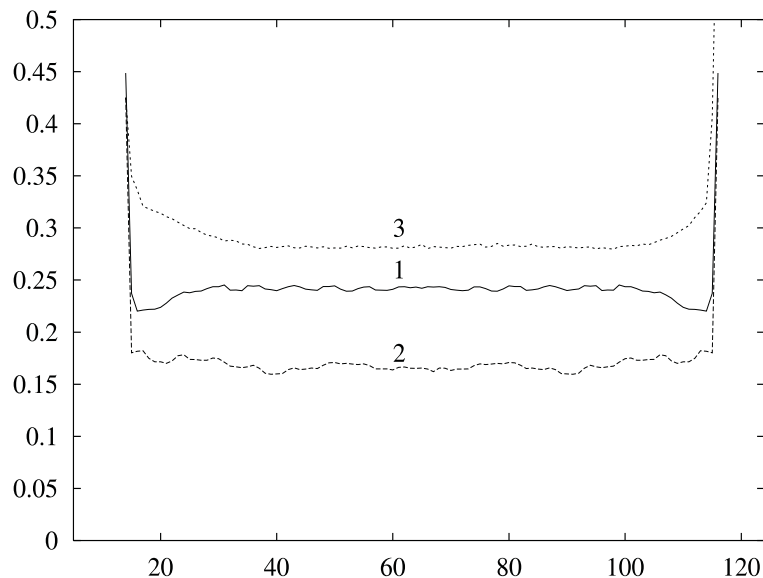


Рис. 11. Зависимости ошибки восстановления слоя от его номера. Шаг спирали 0.4, число витков 5, число проекций 400. Кривая 1 — FBP_SL, 2 — FBP_2DF, 3 — ART

производит меньше артефактов. Решение, полученное посредством ART, сильно искажено характерными для алгебраических алгоритмов осциллирующими артефактами, на их фоне полости плохо различимы. Наконец, двумерный алгоритм дает достаточно гладкое решение, почти свободное от артефактов, однако полости видны на нем слабо.

5. Заключение. В работе выполнено сравнение различных методов реконструкции для задачи трансмиссионной томографии с источником, движущимся вдоль спирали. Рассмотрены два алгоритма обратного проецирования с фильтрацией, названные FBP_SL и FBP_2DF, итерационный алгебраический алгоритм ART и метод двумерного послойного восстановления. По проведенному численному моделированию оказалось, что при относительно небольшом числе проекций (приблизительно до двухсот) ART обеспечивает более высокое качество реконструкции, нежели остальные алгоритмы. Наиболее значительно преимущество ART проявляется, когда число проекций не превосходит ста. Однако с ростом числа ракурсов наблюдения более точное решение получается посредством алгоритмов FBP_SL и FBP_2DF. При этом FBP_2DF, в котором используется двумерная фильтрация проекций, обеспечивает лучший результат.

По геометрическим параметрам траектории источника были сделаны следующие выводы. Для приемлемого качества реконструкции число витков спирали должно быть не менее двух-трех. При постоянном полном числе проекций увеличение количества витков имеет положительный эффект только до определенного предела, при переходе через который ошибка восстановления начинает расти. Это объясняется

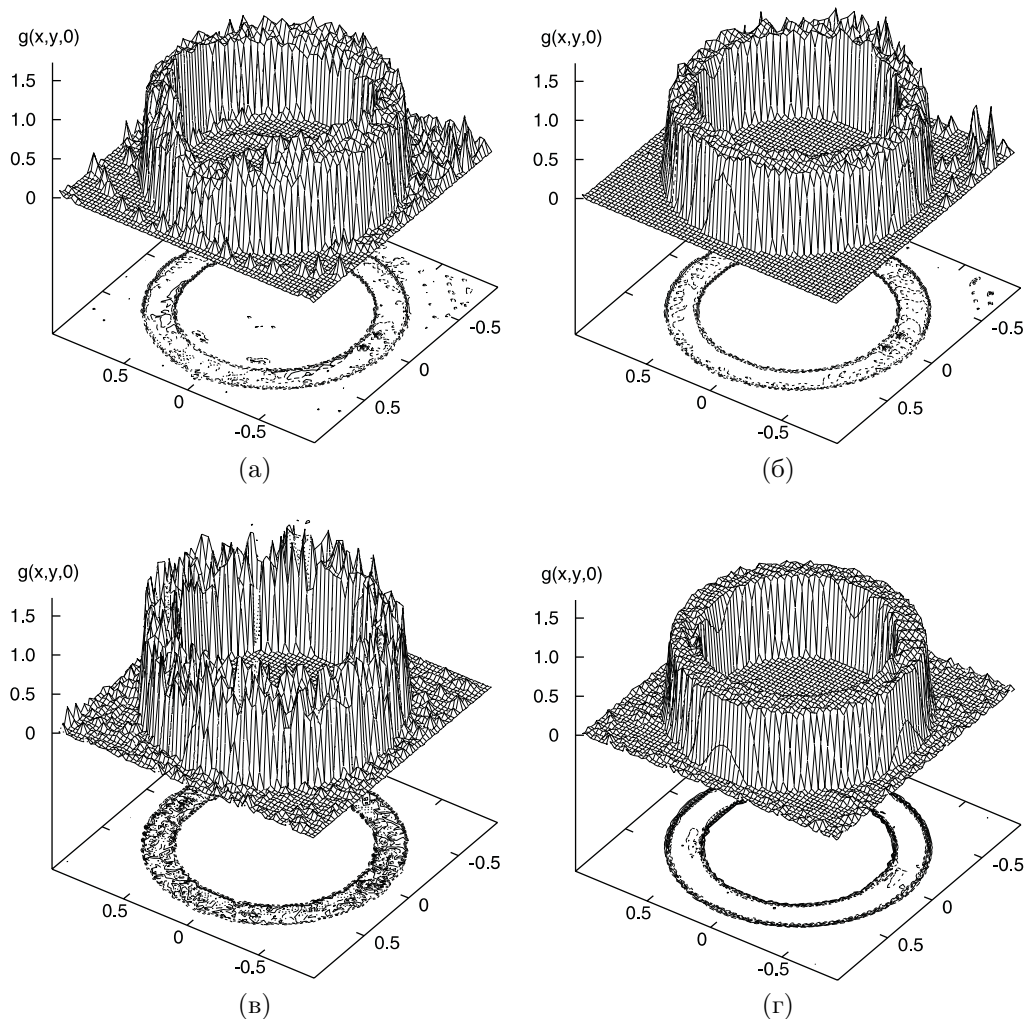


Рис. 12. Результаты реконструкции, сечения плоскостью $z = 0$. Параметры траектории источника: $N = 5$, $R = 2$, шаг 0.4. Высота детектора 0.8; $M = 400$. а) алгоритм FBP_SL; б) FBP_2DF; в) ART; г) двумерный алгоритм (17)

уменьшением количества проекций, приходящихся на один виток. По проведенному моделированию предельное число витков оказалось различным для различных алгоритмов: 3 — для FBP_2DF, 9 — для FBP_SL, для ART — более 12, количество проекций при этом было 600. Кроме того, было выявлено, что для всех алгоритмов зависимость точности реконструкции от радиуса траектории движения источника относительно слабая.

Было исследовано влияние высоты детектора (его размера вдоль оси спирали) на качество восстановления. Наиболее значительным оно оказалось при высоте детектора, меньшей шага спирали. Когда высота детектора становилась порядка размера области реконструкции, решение практически переставало от нее зависеть. Интересный результат был получен для алгоритма FBP_2DF: для него ошибка реконструкции перестала изменяться, как только высота детектора превысила размер витка спирали.

Расчеты, в которых использовались проекционные данные, искаженные случайными шумами, показали, что алгоритмы обратного проецирования с фильтрацией более устойчивы по отношению к шумам, нежели ART. Также было установлено, что устойчивость алгоритмов может быть повышена путем предварительной обработки проекций, в частности, посредством медианной фильтрации.

По скорости компьютерного счета были получены следующие данные. Полная реконструкция трехмерного изображения алгоритмом FBP_SL в среднем требует в 4.5–5.0 раз меньше времени, чем алгоритмом FBP_2DF. В свою очередь, время, затрачиваемое на одну итерацию ART, приблизительно в 1.2 раза меньше того, которое нужно на полную реконструкцию алгоритмом FBP_SL. Однако для получения хорошего восстановления посредством ART надо сделать от нескольких единиц до нескольких десятков

итераций, в зависимости от числа проекций. На реконструкцию одного слоя двумерным алгоритмом (17) затрачивается примерно в 60 раз меньше времени, чем на полную реконструкцию алгоритмом FBP_SL. Но, как видно из рис. 12 г, при параметрах, использованных для моделирования, этот метод не обеспечивает достаточного разрешения.

В целом по проведенному исследованию сделан следующий вывод. При реконструкции высококонтрастных объектов, встречающихся, в частности, в дефектоскопии, по проекционным данным, снятым при движении источника по спиральной траектории, итерационные алгебраические методы, в том числе ART, могут служить альтернативой алгоритмам обратного проецирования с фильтрацией. При этом главное преимущество алгебраических методов состоит в том, что они обеспечивают приемлемое качество восстановления при относительно небольшом числе проекций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tuy H.K.* An inversion formula for cone-beam reconstruction // *SIAM J. Applied Mathematics*. 1983. **43**, N 3. 546–552.
2. *Defrise M., Kinahan P.E., Townsend D.W., Michel C., Sibomana M., Newport D.F.* Exact and approximate rebinning algorithms for 3-D PET data // *IEEE Trans. Med. Imag.* 1997. **16**, N 2. 145–158.
3. *Hu H.* Multi-slice helical CT: Scan and reconstruction // *Med. Phys.* 1999. **26**, N 1. 5–18.
4. *Noo F., Defrise M., Clackdoyle R.* Single-slice rebinning method for helical cone-beam CT // *Phys. Med. Biol.* 1999. **44**. 561–570.
5. *Defrise M., Noo F., Kudo H.* Improved two-dimensional rebinning of helical cone-beam computerized tomography data Using John's equation // *Inverse Problems*. 2003. **19**. 41–54.
6. *Smith B.D.* Cone-beam tomography: recent advances and tutorial review // *J. Optical Engineering*. 1990. **29**, N 5. 524–534.
7. *Feldkamp L.A., Davis L.C., Kress J.W.* Practical cone-beam algorithm // *J. Opt. Soc. Am (A)*. 1984. **1**, N 6. 612–619.
8. *Yan X., Leahy R.M.* Cone beam tomography with circular, elliptical and spiral orbits // *Phys. Med. Biol.* 1992. **37**, N 3. 493–506.
9. *Grangeat P.* Mathematical framework of cone-beam 3D-reconstruction via the first derivative of the Radon transform // *Proc. of a Conf. On Mathematical Methods in Tomography. Oberwolfach, Germany*. 1990. 66–97.
10. *Tam K.C., Samarasekera S., Sauer F.* Exact cone beam CT with spiral scan // *Phys. Med. Biol.* 1998. **43**. 1015–1024.
11. *Kudo H., Noo F., Defrise M.* Cone-beam filtered-backprojection algorithm for truncated helical data // *Phys. Med. Biol.* 1998. **43**. 2885–2909.
12. *Defrise M., Noo F., Kudo H.* A solution to the long-object problem in helical cone-beam tomography // *Phys. Med. Biol.* 2000. **45**. 623–643.
13. *Katsevich A.* Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone-beam CT // *Phys. Med. Biol.* 2002. **47**. 2583–2598.
14. *Katsevich A.* On two Versions of a 3π algorithm for spiral CT // *Phys. Med. Biol.* 2004. **49**. 2129–2143.
15. *Хермен Г.Т.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
16. *Shepp L.A., Logan B.F.* The Fourier reconstruction of a head section // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1974. **21**, N 3. 21–43.
17. *Намтереф Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М: Мир, 1990.
18. *Kak A.C., Slaney M.* Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988.
19. *Rangayyan R.M., Gordon R.* Streak preventive image reconstruction with ART and adaptive filtering // *IEEE Trans. Med. Imag.* 1982. **1**, N 3. 173–178.

Поступила в редакцию
30.06.2004