



doi 10.26089/NumMet.v24r216

УДК 519.63; 517.956.35

## О численном решении одной продолженной гиперболической системы

**О. С. Розанова**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
механико-математический факультет, Москва, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0002-4912-3680, e-mail: rozanova@mech.math.msu.ru

**Е. В. Чижонков**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
механико-математический факультет, Москва, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0002-7194-8451, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.ru

**Аннотация:** Проведено численное моделирование влияния внешнего постоянного магнитного поля на плоские релятивистские плазменные колебания. С этой целью построен алгоритм в лагранжевых переменных на основе продолженной системы гиперболических уравнений. Важным свойством численного метода является зависимость его точности только от свойств гладкости решения. Кроме того, для фиксации момента опрокидывания колебаний используется контроль за пересечением электронных траекторий. Аналитически получены достаточные условия для существования и несуществования на первом периоде гладкого решения задачи. Выяснено, что внешнее магнитное поле не может предотвратить опрокидывание колебаний принципиально, даже для случая сколь угодно малого начального отклонения от положения равновесия. Численные эксперименты наглядно иллюстрируют релятивистское опрокидывание верхнегибридных колебаний. Показано, что внешнее магнитное поле может как ускорять, так и замедлять процесс опрокидывания в зависимости от выбора начального условия для поперечной компоненты импульса электронов.

**Ключевые слова:** квазилинейные гиперболические уравнения, продолженная система, эффект опрокидывания, градиентная катастрофа, плазменные колебания, метод характеристик, лагранжевы переменные, численное моделирование.

**Благодарности:** Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075–15–2022–284.

**Для цитирования:** Розанова О.С., Чижонков Е.В. О численном решении одной продолженной гиперболической системы // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 2. 213–230. doi 10.26089/NumMet.v24r216.

---

## On the numerical solution of one extended hyperbolic system

**Olga S. Rozanova**

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia  
ORCID: 0000-0002-4912-3680, e-mail: rozanova@mech.math.msu.ru

**Evgenii V. Chizhonkov**

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia  
ORCID: 0000-0002-7194-8451, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.ru

**Abstract:** Numerical simulation of the influence of an external constant magnetic field on plane relativistic plasma oscillations is carried out. For this purpose, an algorithm is constructed in



Lagrangian variables based on an extended system of hyperbolic equations. An important property of the numerical method is the dependence of its accuracy only on the smoothness properties of the solution. In addition, control over the intersection of electronic trajectories is used to fix the moment of breaking of oscillations. Sufficient conditions for the existence and non-existence of a smooth solution of the problem in the first period are analytically obtained. It was found out that the external magnetic field cannot prevent the breaking of oscillations in principle, even for the case of an arbitrarily small initial deviation from the equilibrium position. Numerical experiments clearly illustrate the relativistic breaking of the upper hybrid oscillations. It is shown that an external magnetic field can both accelerate and slow down the breaking process depending on the choice of the initial condition for the transverse component of the electron pulse.

**Keywords:** quasi-linear hyperbolic equations, extended system, breaking effect, gradient catastrophe, plasma oscillations, method of characteristics, Lagrangian variables, numerical modeling.

**Acknowledgements:** The paper was published with the partial financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement No. 075–15–2022–284.

**For citation:** O. S. Rozanova, E. V. Chizhonkov, “On the numerical solution of one extended hyperbolic system,” Numerical Methods and Programming. 24 (2), 213–230 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r216.

**1. Введение.** Понятие *продолженной системы* в теории гиперболических уравнений было введено в работе Р. Куранта и П. Лакса достаточно давно [1]. Однако оно находило свое применение, в основном, в теоретических исследованиях для оценки роста решения систем квазилинейных уравнений и его производных (см., например, [2]). Для получения приближенного решения гиперболических систем продолженные системы практически не использовались в силу доминирующего численного подхода, основанного на решении задачи Римана [3].

В последние годы наблюдается определенный прогресс в области численного моделирования лазер-плазменных взаимодействий, в первую очередь описываемых уравнениями “холодной” плазмы [4]. Напомним, что гидродинамическая модель “холодной” плазмы, в которой температура формально полагается равной нулю, является точным математическим следствием кинетической модели, основанной на системе уравнений Власова–Максвелла (см., например, [5, 6]). При этом полностью ионизованная плазма является сильно нелинейной средой, в которой даже относительно небольшие начальные коллективные смещения частиц могут приводить к колебаниям и волнам большой амплитуды. При отсутствии диссипации их эволюция может приводить к возникновению сингулярности плотности электронов [7]. Этот эффект принято называть *опрокидыванием* колебаний (волн). Как показано в [8], сингулярность, т.е. обращение в бесконечность, электронной плотности при эйлеровом описании движения среды эквивалентна пересечению электронных траекторий при ее лагранжевом описании. С математической точки зрения процесс опрокидывания означает формирование у решения *градиентной катастрофы* [2].

Полезность изучения продолженной системы для уравнений “холодной” плазмы впервые была установлена в работе [9] (подробные доказательства приведены в [10]), посвященной условиям глобального существования, единственности и гладкости решения. Впоследствии продолженная система использовалась для построения и обоснования сходимости численных алгоритмов для различных моделей плазмы (как учитывающих эффект релятивизма, так и без его учета; как учитывающих электрон-ионные соударения, так и без них) [11, 12].

В настоящей работе построен приближенный метод для достаточно сложной задачи, моделирующей так называемые верхнегибридные колебания в холодной релятивистской плазме при наличии внешнего магнитного поля. Для аналогичной постановки, но без учета эффекта релятивизма, вопросы теоретического обоснования существования решения и нахождения его приближенного (численного) аналога рассмотрены в [13]. Следует отметить, что подобные по смыслу постановки ранее рассматривались только в физической литературе (см., например, [7, 14, 15] и цитированную там литературу).

Обратим внимание, что предлагаемый подход к конструированию численного алгоритма является принципиально новым. Как отмечалось выше, использование продолженной гиперболической системы с



целью численного решения уже является настоящей экзотикой. В свою очередь, алгоритмы, использующие вычисления вдоль характеристик продолженной системы, ранее не встречались авторам в научной литературе. По этой причине идейная конструкция численного метода представляет больший интерес, чем его приложение к анализу конкретной математической модели. Однако и сама рассматриваемая постановка о верхнегибридных колебаниях обладает нетривиальными математическими свойствами, иллюстрация которых может быть полезна для практических приложений.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 приведена постановка задачи, описывающая одномерные релятивистские электростатические верхнегибридные колебания холодной плазмы, находящейся в постоянном внешнем магнитном поле. Дополнительно выписана продолженная система для исходных гиперболических уравнений, являющаяся основой для построения численного алгоритма. В разделе 3 в терминах начальных данных аналитически получено достаточное условие существования на первом периоде ее гладкого решения, кроме того, получено достаточное условие опрокидывания (типа градиентной катастрофы) также на первом периоде колебаний. В разделе 4 с целью численного моделирования верхнегибридных релятивистских колебаний построен алгоритм в лагранжевых переменных, который имеет тесное родство с методом характеристик, применяющемся для анализа исходной дифференциальной постановки. Наконец, в разделе 5 приведены результаты численных экспериментов, наглядно иллюстрирующие релятивистское опрокидывание верхнегибридных колебаний. Причем показано, что внешнее магнитное поле может как ускорять, так и замедлять процесс опрокидывания в зависимости от выбора начального условия для поперечной компоненты импульса электронов. В заключении систематизируются результаты проведенных исследований.

**2. Постановка задачи.** Будем считать плазму релятивистской электронной жидкостью, пренебрегая рекомбинационными эффектами и движением ионов. Тогда в векторной форме система описывающих ее гидродинамических уравнений совместно с уравнениями Максвелла будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{P} &= e^- \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \right), \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{P}|^2}{m^2 c^2}}, & \mathbf{V} &= \frac{\mathbf{P}}{m\gamma}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} e^- n \mathbf{V} + \operatorname{rot} \mathbf{B}, & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $e^-$ ,  $m$  — заряд и масса электрона (здесь заряд электрона имеет отрицательный знак:  $e^- < 0$ ),  $c$  — скорость света;  $n$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{V}$  — плотность, импульс и скорость электронов;  $\gamma$  — лоренцевский фактор;  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  — векторы электрического и магнитного полей.

Система уравнений (1) является одной из простейших моделей плазмы, которую часто называют уравнениями гидродинамики “холодной” плазмы; она хорошо известна и достаточно подробно описана в учебниках и монографиях [5, 6]. Будем обозначать независимые переменные в декартовой системе координат обычным образом  $x, y, z$  и примем допущение, что плазма находится во внешнем магнитном поле  $B_0$ , которое направлено вдоль оси  $z$  и не зависит от времени и пространства. В настоящей работе анализируется нелинейная динамика электростатических плазменных колебаний большой амплитуды, распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю. В этом случае при изучении зависимости колебаний только от одной пространственной переменной  $x$  имеем следующую структуру векторов импульса  $\mathbf{P}$  и электрического поля  $\mathbf{E}$  [7]:

$$\mathbf{P}(x, t) = (P_1(x, t), P_2(x, t), 0), \quad \mathbf{E}(x, t) = (E_1(x, t), 0, 0).$$

Отметим, что условие безвихревого электрического поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

т.е. условие электростатичности колебаний тогда выполняется автоматически. Качественная структура исследуемого решения представлена на рис. 1.

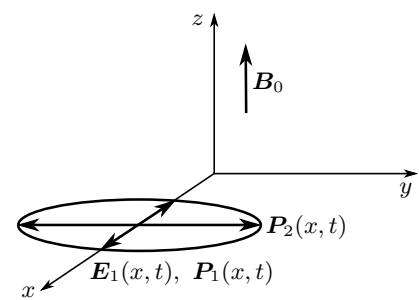


Рис. 1. Компоненты решения и их зависимость от координат

Fig. 1. The solution components and their dependence on coordinates

При сделанных допущениях из системы (1) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n V_1) &= 0, & \frac{\partial P_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} &= e^- \left[ E_1 + \frac{1}{c} V_2 B_0 \right], & V_1 &= \frac{P_1}{m \gamma}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial P_2}{\partial x} &= -\frac{e^-}{c} V_1 B_0, & V_2 &= \frac{P_2}{m \gamma}, & \gamma &= \sqrt{1 + \frac{P_1^2 + P_2^2}{m^2 c^2}}, \\ \frac{\partial E_1}{\partial t} &= -4\pi e^- n V_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \rho &= k_p x, & \theta &= \omega_p t, & \hat{V}_1 &= \frac{V_1}{c}, & \hat{P}_1 &= \frac{P_1}{m c}, & \hat{V}_2 &= \frac{V_2}{c}, & \hat{P}_2 &= \frac{P_2}{m c}, \\ \hat{E}_1 &= -\frac{e^- E_1}{m c \omega_p}, & \hat{N} &= \frac{n}{n_0}, & \hat{B}_0 &= -\frac{e^- B_0}{m c \omega_p}, \end{aligned}$$

где  $\omega_p = (4\pi(e^-)^2 n_0 / m)^{1/2}$  — плазменная частота,  $n_0$  — значение невозмущенной электронной плотности,  $k_p = \omega_p / c$ .

В новых переменных система (2) после некоторых упрощающих преобразований (см. [16]) приводит к уравнениям, описывающим плоские одномерные электростатические верхнегибридные релятивистские плазменные колебания:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + V_1 \frac{\partial P_1}{\partial \rho} &= -E_1 - B_0 V_2, & \frac{\partial P_2}{\partial \theta} + V_1 \frac{\partial P_2}{\partial \rho} &= B_0 V_1, \\ \gamma &= \sqrt{1 + P_1^2 + P_2^2}, & V_1 &= \frac{P_1}{\gamma}, & V_2 &= \frac{P_2}{\gamma}, \\ \frac{\partial E_1}{\partial \theta} + V_1 \frac{\partial E_1}{\partial \rho} &= V_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь для удобства у всех безразмерных искомым функций убран символ “крышка”.

Ниже мы будем изучать в полуплоскости  $\{(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}, \theta > 0\}$  решение задачи Коши для системы (3) с начальными условиями

$$P_1(\rho, 0) = P_1^0(\rho), \quad P_2(\rho, 0) = P_2^0(\rho), \quad E_1(\rho, 0) = E_1^0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Завершая постановку задачи, отметим следующую из (2) безразмерную формулу электронной плотности

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E_1(\rho, \theta)}{\partial \rho}. \quad (5)$$

Формула (5) является частным случаем теоремы Гаусса [7], которая в дифференциальной размерной форме имеет вид  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e^- (n - n_0)$ .

Система (3) относится к гиперболическому типу. Хорошо известно, что для таких систем существует локально по времени единственное решение задачи Коши того же класса, что и начальные данные, в нашем случае это  $C^1$ . Также известно, что для таких систем потеря решением гладкости происходит по одному из следующих сценариев: либо сами компоненты решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность, либо они остаются ограниченными, но в бесконечность обращаются их производные [17]. Последняя возможность реализуется, например, для однородных законов сохранения, к которым относятся уравнения газовой динамики, где возникновение особенности соответствует образованию ударной волны.

Следует отметить, что в нерелятивистском случае систему (3) часто называют (см., например, [7]) описывающей *верхнегибридные* колебания холодной магнитоактивной плазмы. В этот термин вкладывается следующий смысл. Если рассматривать возбуждение пространственно одномерной медленной необыкновенной волны [6, 18], то в [19] показано, что ее закон дисперсии имеет вид

$$\omega(k) = \sqrt{1 + \frac{k^2 + B_0^2}{2}} - \sqrt{B_0^2 + \left(\frac{k^2 - B_0^2}{2}\right)^2}. \quad (6)$$



При отсутствии внешнего магнитного поля из (6) следует закон дисперсии ленгмюровских колебаний в холодной изотропной плазме  $\omega(k) \equiv 1$  (в размерных переменных —  $\omega(k) \equiv \omega_p$ ), т.е. приводит к решению хорошо известной задачи. С другой стороны, при достаточно больших  $k$  из (6) имеем

$$\omega(k) \approx \sqrt{1 + B_0^2}. \quad (7)$$

Это означает, что медленная необыкновенная волна, учитывающая, в том числе, динамику индуцированного магнитного поля (не электростатика!) определяется поведением, в первую очередь, младших фурье-компонент решения. Иными словами, динамику высоких гармоник можно изучать совершенно независимо на основе системы (3), что и предполагается делать в настоящей работе. Под гибридность здесь понимается специальный вид возмущения внешним магнитным полем плазменной частоты (7).

При построении численного решения и предварительного теоретического рассмотрения системы (3) нам потребуется ее вид в характеристической форме

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{d\theta} &= -E_1 - B_0 V_2, & \frac{dP_2}{d\theta} &= B_0 V_1, & \frac{dE_1}{d\theta} &= V_1, \\ \frac{d\rho}{d\theta} &= V_1, & \gamma &= \sqrt{1 + P_1^2 + P_2^2}, & V_i &= \frac{P_i}{\gamma}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

а также — продолженная система, описывающая поведение производных решения по переменной  $\rho$  вдоль характеристик:

$$\frac{dp_1}{d\theta} = -q_1 p_1 - B_0 q_2 - e, \quad \frac{dp_2}{d\theta} = -q_1 p_2 + B_0 q_1, \quad \frac{de}{d\theta} = (1 - e)q_1, \quad (9)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} q_1 &= \partial_\rho V_1, & q_2 &= \partial_\rho V_2, & p_1 &= \partial_\rho P_1, & p_2 &= \partial_\rho P_2, & e &= \partial_\rho E_1, \\ q_i &= \frac{p_i}{\gamma} - \frac{P_i}{\gamma^3} (p_1 P_1 + p_2 P_2), & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Необходимые начальные условия для (8), (9) являются несложными следствиями соотношений (4).

**3. Существование решения на гарантированном интервале.** Прежде чем описывать конструкцию приближенного метода решения системы (8), (9), обсудим вопросы, связанные с существованием ее решения. Начнем с простой ситуации.

**3.1. Нерелятивистский случай.** Для нерелятивистского приближения, когда  $\gamma \equiv 1$  и

$$P_1 = V_1, \quad P_2 = V_2,$$

система (3) и начальные условия для нее принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \rho} &= -E_1 - B_0 V_2, & \frac{\partial V_2}{\partial \theta} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial \rho} &= B_0 V_1, \\ \frac{\partial E_1}{\partial \theta} + V_1 \frac{\partial E_1}{\partial \rho} &= V_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$V_1(\rho, 0) = V_1^0(\rho), \quad V_2(\rho, 0) = V_2^0(\rho), \quad E(\rho, 0) = E^0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Для такой системы в [13] была доказана следующая теорема, представляющая собой критерий образования особенностей гладкого решения в терминах начальных данных.

**Теорема 1.** Для существования  $C^1$ -гладкого  $(2\pi/\sqrt{1 + B_0^2})$ -периодического решения  $V_1(\rho, \theta)$ ,  $V_2(\rho, \theta)$ ,  $E_1(\rho, \theta)$  задачи (10), (11) необходимо и достаточно, чтобы в любой точке  $\rho \in \mathbb{R}$  выполнялось условие

$$\Delta = \left( (V_1^0)' \right)^2 + 2 (E_1^0)' + 2B_0 (V_2^0)' - B_0^2 - 1 < 0. \quad (12)$$

Если хотя бы в одной точке  $\rho_0$  выполнено неравенство, противоположное (12), то производные решения обращаются в бесконечность за конечное время.

Для исходной системы (3) аналогичного критерия получить не удастся, однако можно получить достаточное условие сохранения гладкости в течение некоторого промежутка времени, который возможно оценить снизу.

**3.2. Предварительное рассмотрение.** Первые интегралы системы (8) имеют вид

$$P_2 - B_0 E_1 = K_1, \quad 2\sqrt{1 + P_1^2 + P_2^2} + E_1^2 = K_2. \quad (13)$$

Знание первых интегралов позволяет выразить  $E_1$  и  $P_1$  через  $P_2$  и из второго уравнения (8) получить уравнение для нахождения  $P_2(\theta)$  вдоль характеристики, выходящей из точки  $\rho_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{dP_2}{d\theta} = \pm B_0 \frac{\sqrt{(B_0^2 K_2 - (P_2 - K_1)^2)^2 - 4B_0^4 (P_2^2 + 1)}}{B_0^2 K_2 - (P_2 - K_1)^2}, \quad (14)$$

где  $K_i = K_i(\rho_0, 0)$ ,  $i = 1, 2$ . Соответствующие константы вычисляются согласно (13) и, вообще говоря, зависят от начальной точки характеристики. Уравнение (14) позволяет также вычислить период колебания вдоль конкретной характеристики, а именно:

$$T(\rho_0) = \frac{2}{B_0} \int_{P_2^-}^{P_2^+} \frac{B_0^2 K_2 - (\eta - K_1)^2}{\sqrt{(B_0^2 K_2 - (\eta - K_1)^2)^2 - 4B_0^4 (\eta^2 + 1)}} d\eta, \quad (15)$$

где  $P_2^\pm$  — меньший и больший корень уравнения для  $\eta$

$$(B_0^2 K_2 - (\eta - K_1)^2)^2 - 4B_0^4 (\eta^2 + 1) = 0.$$

Они выбираются такими, что  $P_2(\rho_0, 0) \in (P_2^-, P_2^+)$ . Указанный интеграл может быть выражен в эллиптических функциях. Как и в случае  $B_0 = 0$ , период  $T(\rho_0)$  изменяется от точки к точке. Однако формула для его определения существенно сложнее той, которая получена в [10], так как для этого нужно предварительно выразить  $P_2$  через  $P_1$ .

Также нам потребуется рассмотрение продолженной системы (9), описывающей поведение производных решения вдоль характеристик. Система (9) имеет первый интеграл

$$p_2 = B_0 + C_1(e - 1), \quad C_1 = \frac{p_2(\rho_0, 0) - B_0}{e(\rho_0, 0) - 1}, \quad (16)$$

и может быть сведена к двум уравнениям

$$\frac{dp_1}{d\theta} = -1 - \frac{p_2 - B_0}{C_1} - \frac{p_1^2}{\gamma} + p_1 P_1 Q - B_0 \left( \frac{p_2}{\gamma} - P_2 Q \right), \quad (17)$$

$$\frac{dp_2}{d\theta} = (B_0 - p_2) \left( \frac{p_1}{\gamma} - P_1 Q \right), \quad Q = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2}{\gamma^3}. \quad (18)$$

Если вспомнить о том, что  $P_1$  может быть выражено через  $P_2$ , а уравнение (14) для определения  $P_2$  известно, то становится понятно, что анализ возможности ухода производных решения задачи (4) в бесконечность за конечное время сводится к анализу автономной неинтегрируемой системы (17), (18), (14), причем уравнение (14) отщепляется. Таким образом, формально ситуация такая же, что была изучена в релятивистском случае при отсутствии магнитного поля [10]. Однако при наличии внешнего магнитного поля система гораздо более громоздкая.

В некоторых случаях система (17), (18) может быть сведена к одному уравнению. Например, это будет при  $p_2 = B_0$ , что отвечает  $C_1 = 0$  в интеграле (16). Действительно, при этом (18) выполняется тождественно, а (17) сводится к уравнению

$$\frac{dp_1}{d\theta} = -1 - \frac{B_0^2}{\gamma^3} - \frac{p_1^2}{\gamma^3} - \frac{(p_1 P_2 - B_0 P_1)^2}{\gamma^3},$$

откуда вытекает, что любое решение с начальными данными (4) с  $P_2^0 = B_0 \rho + \text{const}$  теряет гладкость на конечном промежутке времени.



Более содержательный подкласс решений представляет собой решения, для которых второй из интегралов (13) равен тождественно константе, т.е. решения с постоянной энергией.

Действительно, для таких решений справедливо

$$e = -\frac{p_1 P_1 + p_2 P_2}{E_1(P_1, P_2)\gamma},$$

$$E_1(P_1, P_2) = \pm\sqrt{K_2 - 2\gamma}.$$

А поскольку из (16) вытекает, что  $e = 1 + \frac{p_2 - B_0}{C_1}$  при  $C_1 \neq 0$ , то существует связь между  $p_1$  и  $p_2$ . Если обозначить  $s = p_2 - B_0$ , то (18) сведется к системе

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= -L_1 s^2 - L_2 s, \\ L_1 &= -\frac{(1 + P_2^2)(E_1(P_1, P_2)\gamma + C_1 P_2)}{C_1 \gamma^3 P_1} - \frac{P_1 P_2}{\gamma^3}, \\ L_2 &= -\frac{(1 + P_2^2)(E_1(P_1, P_2)\gamma + P_2)}{\gamma^3 P_1} - \frac{B_0 P_1 P_2}{\gamma^3}. \end{aligned} \tag{19}$$

После замены  $y = s^{-1}$  уравнение (19) линеаризуется:

$$\frac{dy}{d\theta} = L_1 + L_2 y.$$

Теперь можно приступить к анализу существования решения системы (3).

**3.3. Основные рассуждения.** Заметим, что вдоль каждой конкретной характеристики решение имеет период, определяемый формулой (15). Этот период не постоянен, как в нерелятивистском приближении. Рассмотрев проекции фазовых траекторий автономной системы (8), (17), (18) на плоскость  $(p_1, p_2)$ , мы увидим, что они зависят от времени, тогда как проекции этих же траекторий на плоскость  $(P_1, P_2)$  не зависят от времени и представляют собой замкнутые кривые, положение которых зависит только от начальных данных (4). Заметим, что полуплоскости  $p_2 < B_0$  и  $p_2 > B_0$  разделены в том смысле, что если начальная точка траектории находится в одной из полуплоскостей, то в ней она и остается. Заметим также, что обращение траектории в бесконечность может произойти только при  $p_1 \rightarrow -\infty, p_2 \rightarrow -\infty$  при  $p_2 < B_0$  и  $p_1 \rightarrow -\infty, p_2 \rightarrow \infty$  при  $p_2 > B_0$ . Поведение проекции конкретной фазовой траектории на плоскость  $(p_1, p_2)$  может следовать одному из следующих сценариев:

- 1) траектория уходит в бесконечность за конечное время при первом же попадании в область  $p_1 < \frac{P_1 P_2}{1 + P_2^2} p_2, p_2 < B_0$  ( $p_2 > B_0$ ), знаки  $p_1$  и  $p_2$  при этом не меняются;
- 2) траектория покидает область  $p_1 < \frac{P_1 P_2}{1 + P_2^2} p_2, p_2 < B_0$  ( $p_2 > B_0$ ) и оказывается в полуплоскости  $p_1 > 0$ , знаки  $p_1$  и  $p_2$  при этом меняются; прежде чем снова оказаться в области  $p_1 < \frac{P_1 P_2}{1 + P_2^2} p_2, p_2 < B_0$  ( $p_2 > B_0$ ), в которой возможно обращение производных  $p_1, p_2$  в бесконечность, траектория совершает оборот, и таким образом до времени обращения в бесконечность проходит время, большее соответствующего периода.

Рассмотрим характеристику, выходящую из точки  $\rho_0 \in \mathbb{R}$ . Вернемся к обозначениям  $P_2^-$  и  $P_2^+$  из (14) и выразим  $P_1$  из (13):

$$P_1(P_2) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(K_2 - \frac{(P_2 - K_1)^2}{B_0^2}\right)^2 - P_2^2 - 1},$$

$$K_1 = P_2^0(\rho_0) - B_0 E_1^0(\rho_0),$$

$$K_2 = 2\sqrt{1 + (P_1^0(\rho_0))^2 + (P_2^0(\rho_0))^2} + E_1^0(\rho_0)^2.$$

Обозначим

$$A_1(P_2) = -\frac{1 + P_2^2}{(1 + P_1^2(P_2) + P_2^2)^{3/2}}, \quad A_2(P_2) = \frac{P_1^2(P_2)P_2^2}{(1 + P_1^2(P_2) + P_2^2)^{3/2}},$$

$$A_3(P_2) = -\frac{1 + P_1^2(P_2)}{(1 + P_1^2(P_2) + P_2^2)^{3/2}}, \quad k(P_2) = \frac{P_1(P_2)P_2}{1 + P_2^2}.$$

Если рассматривать  $P_2$  в качестве параметра  $\bar{P}_2$ , а не как функцию времени, то можно найти первый интеграл системы (17), (18), который с учетом (16) имеет вид

$$\frac{1}{p_2 - B_0} \left( A_2 p_1 + B_0 A_3 - \frac{1}{C_1} \right) + \frac{1}{2(p_2 - B_0)^2} (A_1 p_1^2 + 2p_1 A_2 B_0 + A_3 B_0^2 - 1) = \text{const.}$$

Это уравнение кривой второго порядка в плоскости  $(p_1, p_2)$ . Обозначим

$$\Delta_{\text{rel}}(\bar{P}_2) = A_1^2 p_1^2(0) + \frac{1}{2} A_2^2 p_2^2(0) + 2A_1 A_2 p_2(0) p_1(0) + \left( A_1 A_3 - \frac{1}{2} A_2^2 \right) (2p_2(0) - B_0) B_0 - 2A_1 e(0) + A_1, \quad (20)$$

где  $p_i(0) = (P_i^0(\rho_0))'$ ,  $e(0) = (E_1^0(\rho_0))'$ . Легко видеть, что при переходе к нерелятивистскому случаю, когда  $A_1 = A_3 = -1$ ,  $A_2 = 0$ , выражение  $\Delta_{\text{rel}}$  совпадает с  $\Delta$ . Требование  $\Delta_{\text{rel}} < 0$  означает, что при любом фиксированном значении параметра  $\bar{P}_2 \in [P_2^-, P_2^+]$  фазовые траектории системы (17), (18) ограничены.

Анализ фазового портрета системы (17), (18) при фиксированном значении  $\bar{P}_2$  показывает, что при условии  $p_2(0) < B_0$  (с учетом  $e(0) < 1$ ) в полуплоскости  $p_2 < B_0$  находится особая точка (центр). При условии  $p_2(0) > B_0$  такая особая точка находится в полуплоскости  $p_2 > B_0$ . Для определенности рассмотрим случай  $p_2(0) < B_0$ . Если потребовать, чтобы условия  $\Delta_{\text{rel}} < 0$ ,  $p_1 < k(P_2)p_2$  были выполнены при всех возможных значениях параметра  $\bar{P}_2$ , то проекция фазовой траектории полной системы (8), (17), (18) на плоскость  $(p_1, p_2)$  уходит из области  $p_1 < k(P_2)p_2$ , в которой может произойти обращение в бесконечность. В области  $p_1 > k(P_2)p_2$  обращения в бесконечность произойти не может и проекция траектории опять вернется в  $p_1 < k(P_2)p_2$ , однако при этом условие  $\Delta_{\text{rel}} < 0$  уже может не быть выполненным при всех  $\bar{P}_2$ . Таким образом, для каждой точки, попавшей в область  $\Delta_{\text{rel}} < 0$ ,  $p_1 < k(P_2)p_2$  при всех возможных значениях параметра  $\bar{P}_2$ , реализуется сценарий 2. Для точки, попавшей в область  $p_1 < k(P_2)p_2$ ,  $\Delta_{\text{rel}} > 0$  при всех возможных значениях параметра  $\bar{P}_2$ , реализуется сценарий 1. Для точек, не попавших в указанные области, нельзя на основании такого рассуждения предсказать развитие событий на целом периоде. Таким образом, условия сохранения гладкости на периоде и потери гладкости внутри периода являются только достаточными. Они тем точнее, чем меньше промежуток изменения  $\bar{P}_2$ , т.е. чем меньше отклонение начальных данных от нулевого стационарного состояния  $P_1 = P_2 = E_1 = 0$ . Однако легко видеть, что условие  $\Delta_{\text{rel}} < 0$  гарантирует существование гладкого решения на полупериоде. Действительно, если в некоторые моменты времени реализуется условие  $p_1 < k(P_2)p_2$ , то оно означает, что производная  $p_1$  сменится на положительную либо в силу  $\Delta_{\text{rel}} < 0$ , либо в силу изменения неравенства на  $p_1 > k(P_2)p_2$ . Сформулируем наши выводы в виде теоремы.

**Теорема 2.** Пусть  $\Delta_{\text{rel}}$  задано в (20). Для того чтобы решение  $P_1(\rho, \theta)$ ,  $P_2(\rho, \theta)$ ,  $E_1(\rho, \theta)$  задачи (3), (4) существовало в течение времени  $t \in (0, T_*)$ ,  $T_* = \inf_{\rho_0 \in \mathbb{R}} T(\rho_0)$ , где  $T(\rho_0)$  задано формулой (15), достаточно, чтобы для каждой точки  $\rho_0 \in \mathbb{R}$  и каждого  $\bar{P}_2 \in [P_2^-(\rho_0), P_2^+(\rho_0)]$  было выполнено условие

$$(P_1^0(\rho_0))' < \frac{P_1(\rho_0)\bar{P}_2}{1 + \bar{P}_2^2} (P_2^0(\rho_0))', \quad \Delta_{\text{rel}}(\bar{P}_2) < 0. \quad (21)$$

Если существует такая точка  $\rho_0 \in \mathbb{R}$ , что для каждого  $\bar{P}_2 \in [P_2^-(\rho_0), P_2^+(\rho_0)]$  выполнено условие

$$(P_1^0(\rho_0))' < \frac{P_1(\rho_0)\bar{P}_2}{1 + \bar{P}_2^2} (P_2^0(\rho_0))', \quad \Delta_{\text{rel}}(\bar{P}_2) \geq 0,$$

то гладкость решения теряется в течение времени  $t \in \left(0, \frac{T_*}{2}\right)$ .





Для того чтобы решение сохраняло гладкость в течение времени  $t \in \left(0, \frac{T_*}{2}\right)$ , достаточно, чтобы для каждой точки  $\rho_0 \in \mathbb{R}$  и каждого  $\bar{P}_2 \in [P_2^-(\rho_0), P_2^+(\rho_0)]$  было выполнено условие

$$\Delta_{\text{rel}}(\bar{P}_2) < 0. \quad (22)$$

Отметим, что процедура подсчета гарантированного числа колебаний, реализованная в [20] для случая без магнитного поля, в данном случае весьма затруднительна в силу того, что прямая  $p_1 = \frac{P_1 P_2}{1 + P_2^2} p_2$  на плоскости  $(p_1, p_2)$ , на которой убывание  $p_1$  сменяется возрастанием, также зависит от времени.

**4. Численный алгоритм.** Используемый при получении аналитических результатов подход к анализу характеристик можно трансформировать в высокоточный приближенный метод расчета релятивистских верхнегибридных колебаний магнитоактивной холодной плазмы. Специфика метода заключается в отождествлении функции смещения частиц (электронов) при использовании лагранжевых переменных с функцией, характеризующей электрическое поле при использовании эйлеровых переменных. По сути, излагаемый ниже метод является методом характеристик, однако его конструкцию удобно изложить в терминах лагранжева описания среды, т.е. используя понятия частиц и их траекторий.

Заметим, что моделируемую среду представляют заряженные частицы, находящиеся в фоновом поле, образуемом неподвижными ионами. Поэтому для каждой частицы существует “равновесное” положение, в котором фоновое поле аннулируется и которое удобно принять в качестве значения ее лагранжевой координаты. В этом случае за формирование электрического поля отвечает функция смещения относительно положения равновесия

$$\rho(\rho^L, \theta) = \rho^L + R(\rho^L, \theta), \quad (23)$$

где  $\rho^L$  — “равновесное” положение частицы, когда она не вносит вклад в формирование электрического поля,  $R(\rho^L, \theta)$  — ее функция смещения, порождающая электрическое поле в точке траектории  $\rho(\rho^L, \theta)$ . Согласно [21] (см. также [4]), в плоском одномерном случае между полем и смещением имеется простая связь

$$R(\rho^L, \theta) = E(\rho, \theta) \equiv E(\rho^L + R(\rho^L, \theta), \theta), \quad (24)$$

что делает неразличимыми функции электрического поля и смещения на траектории частицы. Отметим, что такой подход дополнительно позволяет не решать одновременно два одинаковых дифференциальных уравнения с различными начальными условиями (для определения эйлеровой траектории частицы и электрического поля вдоль нее). При этом формальный переход от эйлеровых координат  $(\rho, \theta)$  к лагранжевым координатам  $(\rho^L, \tau)$  осуществляется обычным преобразованием

$$\tau \equiv \theta, \quad \rho^L = \rho - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' V_1(\rho^L, \tau'),$$

но вместо  $\tau$  используется прежнее обозначение  $\theta$ .

Определим для нахождения численного решения на прямой  $\rho \in (-\infty, \infty)$  произвольную сетку в начальный момент времени  $\theta = 0$ :

$$\rho_1(0) < \rho_2(0) < \dots < \rho_M(0),$$

состоящую из  $M$  узлов. В каждый узел  $\rho_k(\theta = 0)$ ,  $1 \leq k \leq M$ , поместим частицу, маркированную лагранжевой координатой  $\rho_k^L$ . При этом для каждой частицы из (3) и (24) следуют уравнения, описывающие динамику частиц в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d P_1(\rho_k^L, \theta)}{d \theta} &= -R(\rho_k^L, \theta) - B_0 V_2(\rho_k^L, \theta), & \frac{d P_2(\rho_k^L, \theta)}{d \theta} &= B_0 V_1(\rho_k^L, \theta), \\ \frac{d R(\rho_k^L, \theta)}{d \theta} &= V_1(\rho_k^L, \theta), & \gamma(\rho_k^L, \theta) &= \sqrt{1 + P_1^2(\rho_k^L, \theta) + P_2^2(\rho_k^L, \theta)}, \\ V_i(\rho_k^L, \theta) &= \frac{P_i(\rho_k^L, \theta)}{\gamma(\rho_k^L, \theta)}, & i &= 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (25)$$

Воспользуемся равенствами (23) и (24) для получения недостающих начальных условий к системам вида (25). В узле  $\rho_k$  при  $\theta = 0$  определено  $E_1^0(\rho_k)$ , т.е. выполнено  $\rho_k = \rho_k^L + E_1^0(\rho_k)$ , откуда для частицы с номером  $k$  следуют начальные условия

$$P_1(\rho_k^L, \theta = 0) = P_1^0(\rho_k), \quad P_2(\rho_k^L, \theta = 0) = P_2^0(\rho_k), \quad R(\rho_k^L, \theta = 0) = E_1^0(\rho_k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (26)$$

а также само равновесное значение лагранжевой координаты  $\rho_k^L$ . Полученные соотношения позволяют вместо задачи (3), (4), записанной в эйлеровых переменных, численно решать задачу (25), (26), сформулированную в лагранжевых переменных.

Определенное таким образом решение задачи (25), (26) не позволяет найти пространственную производную искомой функции  $E_1$ , что делает невозможным определение функции электронной плотности  $N$  в соответствии с (5). Чтобы избежать этого недостатка, достаточно записать уравнения (9) также в лагранжевых переменных, используя рассуждения, изложенные выше. Формальные преобразования дают уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d p_1(\rho_k^L, \theta)}{d \theta} &= -e(\rho_k^L, \theta) - q_1(\rho_k^L, \theta) p_1(\rho_k^L, \theta) - B_0 q_2(\rho_k^L, \theta), \\ \frac{d p_2(\rho_k^L, \theta)}{d \theta} &= -q_1(\rho_k^L, \theta) p_2(\rho_k^L, \theta) + B_0 q_1(\rho_k^L, \theta), \\ \frac{d e(\rho_k^L, \theta)}{d \theta} &= (1 - e(\rho_k^L, \theta)) q_1(\rho_k^L, \theta), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$q_i(\rho_k^L, \theta) = \frac{p_i(\rho_k^L, \theta)}{\gamma(\rho_k^L, \theta)} - \frac{P_i(\rho_k^L, \theta)}{\gamma^3(\rho_k^L, \theta)} [p_1(\rho_k^L, \theta) P_1(\rho_k^L, \theta) + p_2(\rho_k^L, \theta) P_2(\rho_k^L, \theta)],$$

и начальные условия

$$p_1(\rho_k^L, \theta = 0) = (P_1^0)'(\rho_k), \quad p_2(\rho_k^L, \theta = 0) = (P_2^0)'(\rho_k), \quad e(\rho_k^L, \theta = 0) = (E_1^0)'(\rho_k), \quad (28)$$

соответствующие отдельным частицам с номерами  $k = 1, 2, \dots, M$ .

Теперь с помощью решения задачи (27), (28) и соотношения (23) для каждой частицы

$$\rho_k(\theta) = \rho_k^L + R(\rho_k^L, \theta), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (29)$$

можно в эйлеровой точке пространства  $(\rho_k(\theta), \theta)$  определить значение электронной плотности

$$N(\rho_k, \theta) = 1 - e(\rho_k^L, \theta).$$

Таким образом, предлагаемый численный алгоритм заключается в нахождении в узлах переменной эйлеровой сетки (29) решений уравнений (25) с условиями (26), а также уравнений (27) с условиями (28) для каждой из частиц с номерами  $k = 1, 2, \dots, M$ .

Обратим внимание, что поиск приближенного решения предполагает существование, единственность и гладкость точного решения задачи, обусловленные теоремой 2 и, как уже отмечалось в разделе 2, общими теоремами о существовании и единственности локально гладкого по времени решения задачи Коши для систем гиперболических уравнений [17]. При наличии у решения достаточной гладкости по переменной  $\theta$  весьма удобным представляется использование классического метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности [22], в противном случае (меньшей гладкости) следует применять схемы меньшего порядка точности вплоть до метода Эйлера. Необходимо отметить, что в данной ситуации точность получаемого приближения определяется исключительно гладкостью решения.

Отметим также, что устойчивость интегрирования по времени уравнений (25) для компонент скорости и электрического поля, а также для их пространственных производных (27), полностью определяется условием (21). Кроме того, это условие обеспечивает отсутствие пересечений лагранжевых траекторий, т.е. сохранение стартового порядка частиц, или иными словами, выполнение неравенства

$$\rho_{k+1}(\theta) - \rho_k(\theta) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, M - 1.$$

Суммируя приведенное описание численного алгоритма, подчеркнем, что для решения исходной задачи (3)–(5), записанной в эйлеровых переменных, удобно перейти в лагранжевы переменные и использовать для продолженной системы уравнений приближенные методы интегрирования по времени



для вычисления искомым функций в точках  $\rho_k(\theta^n), k = 1, 2, \dots, M, \theta^n = \theta^{n-1} + \tau_n, n = 1, 2, \dots$ , принадлежащих траекториям частиц. Шаг по времени в общем случае может быть переменным, тогда для характеристики точности удобно использовать величину  $\tau = \max_n \tau_n$ .

Для вычисления функций вдоль характеристик этой части алгоритма вполне достаточно в большинстве постановок. Однако вполне возможно возникновение ситуаций, когда требуется определить решение в заданных эйлеровых точках  $(\rho, \theta)$ , которые не обязаны принадлежать рассчитываемым траекториям частиц. В этом случае в момент времени  $\theta^n$  необходимо определить сначала отрезок  $[\rho_k(\theta^n), \rho_{k+1}(\theta^n)]$ , которому принадлежит заданное значение  $\rho$ , а затем с помощью процедуры интерполяции найти приближенное значение. Учитывая, что в узлах эйлеровой сетки  $\rho_k(\theta^n), k = 1, 2, \dots, M$ , имеются не только значения функций

$$P_i(\rho, \theta), \quad i = 1, 2, \quad V_i(\rho, \theta), \quad i = 1, 2, \quad E_1(\rho, \theta),$$

но и значения их пространственных производных

$$p_i(\rho, \theta), \quad i = 1, 2, \quad q_i(\rho, \theta), \quad i = 1, 2, \quad e(\rho, \theta),$$

представляется весьма удобным применение в этих целях эрмитовой кубической интерполяции. Вывод необходимых формул и оценок погрешностей приведен в [23], практические детали использования, включая необходимые программы, хорошо описаны в [22]. Примеры обоснования подобных алгоритмов: для задачи о влиянии электрон–ионных соударений на ленгмюровские колебания холодной плазмы приведены в [12], а в случае отсутствия соударений, но при учете релятивистского эффекта — в [11].

Проведенные выше рассуждения и комментарии можно формализовать, а именно — справедлива

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и гладкость решения задачи (3)–(5) достаточна, чтобы погрешность ее приближенного решения имела вид  $O(\tau^p), p > 0$ , тогда при достаточно малом  $\tau$  в произвольный момент времени  $\theta^n$  в узлах эйлеровой сетки (29) справедлива оценка

$$|F_k(\theta^n) - F(\rho_k, \theta^n)| = O(\tau^p), \quad p > 0, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

где под  $F(\rho, \theta)$  понимается любая из функций  $P_1(\rho, \theta), P_2(\rho, \theta), E_1(\rho, \theta), N(\rho, \theta)$ , а под  $F(\theta)$  — ее приближение.

Если начальные данные (4) принадлежат классу  $C^5(\mathbb{R})$ , то в произвольный момент времени  $\theta^n$  и в произвольной точке пространства  $\rho \in [\rho_1(\theta^n), \rho_M(\theta^n)]$  значения функций  $P_1(\rho, \theta), P_2(\rho, \theta), E_1(\rho, \theta), N(\rho, \theta)$  можно восстановить с точностью  $O(h^4 + \tau^p), p > 0$ , где  $h = \max_k (\rho_{k+1}(\theta) - \rho_k(\theta))$ . При этом приближенные значения электронной плотности при достаточно малых  $h$  и  $\tau$  будут удовлетворять оценке  $N(\rho, \theta) \geq 1/2$ .

Доказательство теоремы весьма громоздко, при этом оно не содержит новых идей и приемов, отличных от аналогичных доказательств в [11, 12], поэтому может быть опущено без потери содержательности.

Следует заметить, что численное решение рассматриваемой задачи вполне доступно и для алгоритмов в эйлеровых переменных [24]. Однако в окрестности сингулярности электронной плотности при моделировании эффекта опрокидывания здесь требуется очень сильное измельчение шагов пространственной сетки. В предлагаемом методе указанная трудность отсутствует по причине автоматического сближения узлов сетки в процессе расчета эйлеровых траекторий частиц по формуле (29).

**5. Результаты расчетов.** Без учета релятивистских эффектов опрокидывание верхнегибридных колебаний аналитически и численно исследовано в работе [13]. В частности, продемонстрировано стабилизирующее влияние внешнего магнитного поля в случае, когда опрокидывание происходит в течение первого периода колебаний. Уточним, что нерелятивистское опрокидывание возникает при нарушении необходимого и достаточного условия (12). В противном случае наблюдается глобальное во времени гладкое решение.

В настоящей работе получены достаточные условия как для существования гладкого решения, так и для его опрокидывания на одном периоде колебаний. Однако больший интерес представляет процесс опрокидывания многопериодных колебаний. Этот эффект является важным свойством решения релятивистских уравнений, который имеет место, в силу теоремы 2 из [16], даже для сколь угодно малых отклонений от положения равновесия.

Чтобы сохранить преемственность с результатами расчетов [4, 11, 12, 19, 24, 25], в качестве начальных условий выберем функции

$$E_1^0(\rho) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp\left\{-2\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\}, \quad P_1^0(\rho) = 0, \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Начальное условие  $P_2^0(\rho)$  обсудим позже.

Согласно (5) и (30), первоначально минимум плотности находится в начале координат, а отклонения плотности от равновесного значения, равного единице, экспоненциально затухают. Этот выбор является самым естественным с точки зрения физики, так как моделирует воздействие на разреженную плазму короткого мощного лазерного импульса при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы), см. детали в [26]. Здесь  $a_*$  характеризует мощность импульса, а  $\rho_*$  — его пространственный размер. Эти величины в расчетах полагались равными 3.105 и 4.5 соответственно.

Краткое изложение эффекта опрокидывания многопериодных колебаний в рамках релятивистской гидродинамической модели холодной плазмы (без внешнего магнитного поля [4]) состоит в следующем. Начальное пространственное распределение электронной плотности  $N$ , как следствие формул (5) и (30), приводит к избытку положительного заряда в начале координат (при  $\rho = 0$ ). По этой причине начинается движение электронов в направлении центра области, что через половину периода колебаний порождает распределение плотности с глобальным максимумом также при  $\rho = 0$ .

Если бы нелинейные плазменные колебания сохраняли во времени свою пространственную форму, то описанные распределения плотности электронов регулярно меняли бы друг друга через каждую половину периода, порождая в центре области строго периодическую последовательность экстремумов с неизменными амплитудами. Однако с течением времени происходит постепенное формирование абсолютного максимума плотности, расположенного вне оси и сравнимого по величине с осевыми. После возникновения этого внеосевого максимума наблюдается резкое возрастание его по величине, и достаточно быстро (часто через один-два периода) на его месте возникает сингулярность электронной плотности. Численному моделированию этого процесса посвящена монография [4], физическое обоснование представлено в [27].

В качестве рабочей области локализации колебаний выберем отрезок  $[-d, d]$  при  $d = 4.5 \rho_*$ . В этом случае амплитуды колебаний частиц на границах будут по порядку величины совпадать с машинной точностью, в силу  $\exp\{-2d^2/\rho_*^2\} \approx 2.58 \cdot 10^{-18}$ , т.е. приграничные характеристики с большой степенью точности будут совпадать с прямыми  $\rho \approx \pm d$ . Начальную сетку удобно выбрать равномерной  $\rho_k(\theta = 0) = kh - d$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ ,  $h = 2d/M$ . При этом характерное значение параметра дискретизации по пространственной переменной, использовавшееся в расчетах, равно  $h = 10^{-3}$ . Шаг интегрирования по времени из соображений устойчивости выбирался равным  $h$ , а в целях контроля точности регулярно проводились расчеты с сеточными параметрами в два раза меньшими, чем основные (рабочие).

Следует отметить, что основной направленностью численных экспериментов являлось изучение влияния внешнего магнитного поля на опрокидывание колебаний. При этом начальные данные всегда выбирались достаточно гладкими (бесконечно дифференцируемыми!), а гладкость решения задачи во времени при взятых параметрах независимо изменялась вдоль характеристик. Это означает, что для применения теоремы 3 в расчетах можно было использовать любой известный алгоритм интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, порождающий точность  $O(\tau^p)$  на конечном интервале времени, длительность которого определяется условиями теоремы 2. В представленных ниже численных экспериментах применялся классический метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом  $\tau$ . Эрмитова интерполяция вне узлов, расположенных на характеристиках, не использовалась по причине достаточно большого количества наблюдаемых траекторий частиц.

Напомним выражения для первых интегралов системы (8):

$$P_2 - B_0 E_1 = K_1, \quad 2\sqrt{1 + P_1^2 + P_2^2 + E_1^2} = K_2;$$

они будут полезны для обсуждения результатов вычислений.

**5.1. Расчеты для подкласса  $K_1 = 0$ ,  $K_2 \neq \text{const}$ .** Выберем недостающее начальное условие в виде

$$P_2^0(\rho) = B_0 E_1^0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad (31)$$

соответствующем выбранному подклассу и проведем расчеты времени опрокидывания  $\theta_{\text{break}}$  в зависимости от величины  $B_0$ .



Отметим, что условие (22), обеспечивающее гладкость решения на полупериоде колебаний, здесь выполнено.

На рис. 2 приведен график этой зависимости, полученный на основании расчетов с шагом 0.01 по параметру  $B_0$ . Здесь следует отметить монотонное убывание времени опрокидывания, которое носит явно выраженный ступенчатый характер. Приведем иллюстрации влияния небольшого по интенсивности внешнего магнитного поля  $B_0 = 0.5$  на эффект опрокидывания. В качестве примера на рис. 3 пунктиром изображено для электронной плотности изменение во времени в начале координат, а сплошной линией — динамика максимального по области значения. Сначала колебания носят регулярный характер, т.е. глобальные по области максимумы и минимумы плотности сменяют друг друга через половину периода и располагаются в начале координат. После третьего регулярного (центрального) максимума в момент времени  $\theta \approx 15.6$  возникает новая структура — внеосевой максимум электронной плотности, по величине примерно в два раза больше ближайшего регулярного. А уже на следующем периоде (в  $\theta_{\text{break}} \approx 20.6$ ) на его месте возникает сингулярность электронной плотности.

Распределения  $x$ -компонент импульса  $P_1$  и электрического поля  $E_1$  в момент опрокидывания изображены на рис. 4. Отметим, что в окрестности сингулярности плотности функция импульса имеет скачок производной, а функция электрического поля принимает ступенчатый характер. Именно такие качественные характеристики и обеспечивают опрокидывание колебаний в момент  $\theta_{\text{break}}$ . Важно отметить, что опрокидывание носит характер “градиентной катастрофы”, т.е. сами функции  $P_1$  и  $E_1$  при этом остаются ограниченными. Для внеосевого опрокидывания многопериодных колебаний подобные распределения являются характерными и в большом количестве представлены в [4]. Пространственное распределение  $y$ -компоненты импульса  $P_2$  изображено на рис. 5. В окрестности сингулярности плотности оно качественно сходно с  $E_1$ , т.е. становится ступенчатой функцией. Более того, оно полностью соответствует выбранному подклассу, т.е. при  $B_0 = 0.5$  функция  $P_2$  ровно в два раза меньше функции  $E_1$ .

Подчеркнем главную особенность подкласса  $K_1 = 0, K_2 \neq \text{const}$ : если зафиксировать некоторые начальные условия из него, то при увеличении внешнего магнитного поля  $B_0$  не наблюдается эффекта стабилизации решения, т.е. время опрокидывания колебаний  $\theta_{\text{break}}$  не только не увеличивается (что было бы желательно), а наоборот — монотонно уменьшается. Другими словами, для начальных условий из отмеченного подкласса внешнее магнитное поле носит разрушительный, а не стабилизирующий характер.

**5.2. Расчеты со стабилизирующим начальным условием.** В работе [13] было показано, что опрокидывание нерелятивистских колебаний в течение первого периода можно заблокировать увеличением внешнего магнитного поля  $B_0$ , т.е. сделать решение гладким на бесконечном временном интервале. Рассматриваемый релятивистский случай не позволяет реализовать подобное в принципе, в силу теоре-

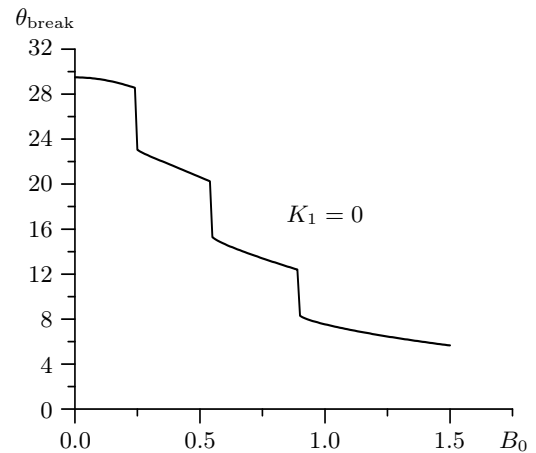


Рис. 2. Зависимость времени опрокидывания колебаний  $\theta_{\text{break}}$  от внешнего поля  $B_0$  при  $K_1 = 0$

Fig. 2. Dependence of the breaking time of oscillations  $\theta_{\text{break}}$  on the external field  $B_0$  at  $K_1 = 0$

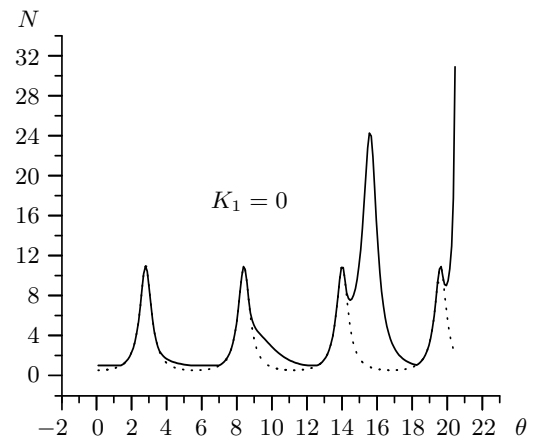


Рис. 3. Динамика плотности плазмы  $N$  при  $K_1 = 0$ : сплошная линия — максимум по области, пунктирная линия — на прямой  $\rho = 0$

Fig. 3. Dynamics of plasma density  $N$  at  $K_1 = 0$ : solid line — maximum in the region, dotted line — on a straight line  $\rho = 0$

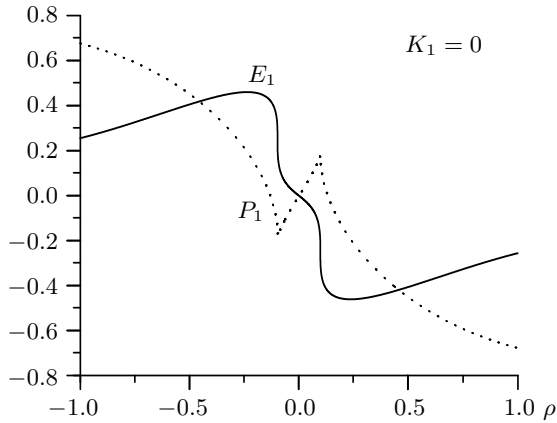


Рис. 4. Пространственные распределения  $x$ -компонент импульса и электрического поля в момент опрокидывания для  $K_1 = 0$ : сплошная линия —  $E_1$ , пунктирная линия —  $P_1$

Fig. 4. Spatial distributions of the  $x$ -components of the pulse and electric field at the breaking moment for  $K_1 = 0$ : solid line —  $E_1$ , dotted line —  $P_1$

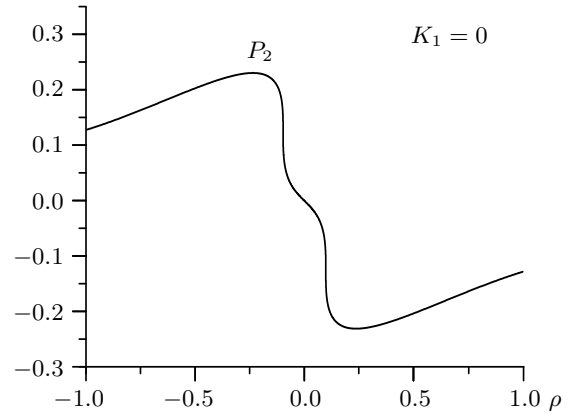


Рис. 5. Пространственное распределение  $y$ -компоненты импульса  $P_2$  в момент опрокидывания для  $K_1 = 0$

Fig. 5. Spatial distribution of the  $y$ -component of the momentum  $P_2$  at the breaking moment for  $K_1 = 0$

мы 2 из [16]. Однако можно попытаться “отодвинуть” момент опрокидывания  $\theta_{\text{break}}$ . Выберем с этой целью начальное условие, отличное от (31):

$$P_2^0(\rho) \equiv 0, \quad \rho \in \mathbb{R},$$

и проведем расчеты такой же идейной направленности, как в предыдущем разделе. Условие (22), обеспечивающее гладкость решения на полупериоде колебаний, здесь также выполнено.

Сначала проанализируем время опрокидывания  $\theta_{\text{break}}$  в зависимости от величины  $B_0$ . На рис. 6 приведен график этой зависимости, полученный на основании расчетов с шагом 0.01 по параметру  $B_0$ . Здесь следует отметить качественное отличие от рис. 2: немонотонное поведение времени опрокидывания при

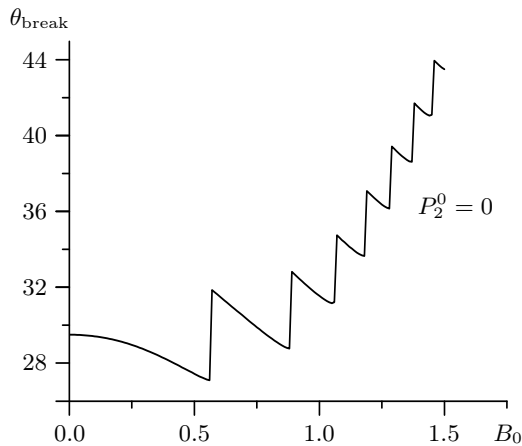


Рис. 6. Зависимость времени опрокидывания колебаний  $\theta_{\text{break}}$  от внешнего поля  $B_0$  при  $P_2^0 = 0$

Fig. 6. Dependence of the breaking time of oscillations  $\theta_{\text{break}}$  on the external field  $B_0$  at  $P_2^0 = 0$

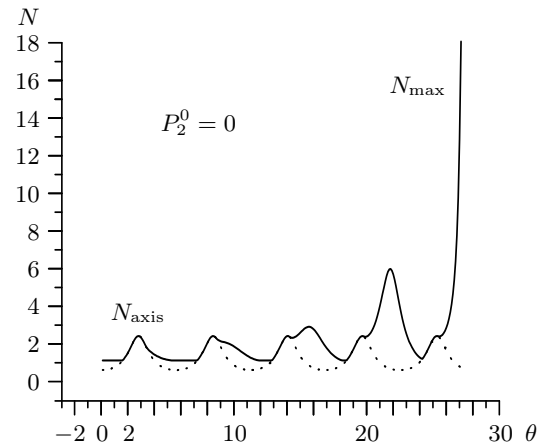


Рис. 7. Динамика плотности плазмы  $N$  при  $P_2^0 = 0$ : сплошная линия — максимум по области, пунктирная линия — на прямой  $\rho = 0$

Fig. 7. Dynamics of plasma density  $N$  at  $P_2^0 = 0$ : solid line — maximum in the region, dotted line — on a straight line  $\rho = 0$



увеличении внешнего поля  $B_0$ . При этом искомый стабилизирующий эффект наблюдается, т.е. величина  $\theta_{\text{break}}$  в среднем заметно увеличивается даже на небольшом рассматриваемом интервале изменения  $B_0$ . Следует отметить, что на рис. 6 не приведены расчеты при значениях  $B_0$ , превышающих 1.5. Это сделано для большей наглядности сравнения с графиком на рис. 2, хотя проведенные численные эксперименты демонстрируют сильный нелинейный рост величины  $\theta_{\text{break}}$  при дальнейшем увеличении  $B_0$ . Например, при  $B_0 = 2; 2.6; 3$  имеем  $\theta_{\text{break}} \approx 67.53; 106.56; 163.69$  соответственно.

Приведем иллюстрации влияния внешнего магнитного поля  $B_0 = 0.5$  на эффект опрокидывания при выборе стабилизирующего начального условия. В качестве примера на рис. 7 пунктиром изображено для электронной плотности изменение во времени в начале координат, а сплошной линией — динамика максимального по области значения. Сначала, как и на рис. 3, колебания носят регулярный характер, т.е. глобальные по области максимумы и минимумы плотности сменяют друг друга через половину периода и располагаются в начале координат. Однако сами абсолютные значения этих максимумов заметно меньше: примерно в 4 раза. После третьего регулярного (центрального) максимума в момент времени  $\theta \approx 15.6$  возникает новая структура — внеосевой максимум электронной плотности, по величине примерно равный ближайшему регулярному. Далее, по прошествии еще двух периодов колебаний (в  $\theta_{\text{break}} \approx 27.4$ ) на его месте возникает сингулярность электронной плотности.

Соответствующие распределения  $x$ -компонент импульса  $P_1$  и электрического поля  $E_1$  в момент опрокидывания изображены на рис. 8. Отметим, что в окрестности сингулярности плотности функция импульса имеет скачок производной, а функция электрического поля принимает ступенчатый характер, т.е. качественное поведение функций сходно с изображенными на рис. 4. Зато пространственное распределение  $y$ -компоненты импульса  $P_2$ , изображенное на рис. 9, только в окрестности сингулярности плотности качественно сходно с  $E_1$ , т.е. становится ступенчатой функцией. В целом же  $P_2$  монотонно убывает на рассматриваемом интервале, тогда как  $E_1$  имеет различные участки: как убывания, так и возрастания.

Подчеркнем особенность численных экспериментов со стабилизирующим начальным условием: структура решения, получаемого в момент опрокидывания, качественно не отличается от решения для подкласса  $K_1 = 0, K_2 \neq \text{const}$ . Однако само опрокидывание колебаний наступает позже, при этом разница увеличивается с ростом внешнего магнитного поля. Кроме того, можно отметить большую гладкость решения (значительно меньшие амплитуды колебаний) при выборе стабилизирующего начального условия.

Обратим также внимание, что опрокидывание в обоих случаях возникает в двух симметричных относительно начала координат точках, однако эти точки по мере увеличения времени опрокидывания удаляются от начала координат все дальше.

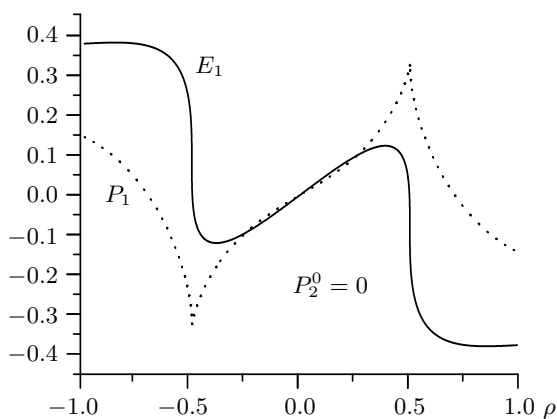


Рис. 8. Пространственные распределения  $x$ -компонент импульса и электрического поля в момент опрокидывания для  $P_2^0 = 0$ : сплошная линия —  $E_1$ , пунктирная линия —  $P_1$

Fig. 8. Spatial distributions of the  $x$ -components of the pulse and electric field at the breaking moment for  $P_2^0 = 0$ : solid line —  $E_1$ , dotted line —  $P_1$

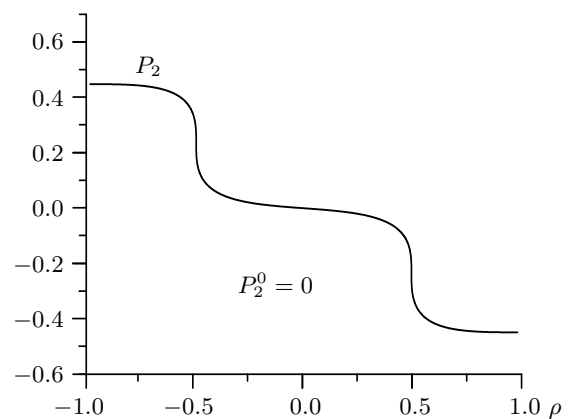


Рис. 9. Пространственное распределение  $y$ -компоненты импульса  $P_2$  в момент опрокидывания для  $P_2^0 = 0$

Fig. 9. Spatial distribution of the  $y$ -component of the momentum  $P_2$  at the breaking moment for  $P_2^0 = 0$

**6. Заключение.** Проведено численное моделирование достаточно сложной задачи — влияния внешнего магнитного поля на плоские релятивистские нелинейные плазменные электростатические верхнегибридные колебания, порождаемые мощным лазерным импульсом. С этой целью построен алгоритм в лагранжевых переменных на основе продолженной системы гиперболических уравнений, полученной для исходной постановки. Важным свойством численного метода является зависимость его точности только от свойств гладкости решения. Например, четвертый порядок точности относительно шага по времени несложно достигается при использовании стандартного метода Рунге–Кутты в сочетании с эрмитовой интерполяцией. Кроме того, для фиксации момента опрокидывания колебаний используется контроль за пересечением электронных траекторий, что позволяет с высокой точностью определять искомые переменные задачи в окрестности сингулярности электронной плотности.

Дополнительно проведено аналитическое исследование свойств решения исходной дифференциальной постановки задачи. Получено достаточное условие существования на первом периоде гладкого решения соответствующей гиперболической системы уравнений, кроме того, получено достаточное условие опрокидывания (типа градиентной катастрофы) также на первом периоде колебаний.

Численные эксперименты наглядно иллюстрируют релятивистское опрокидывание верхнегибридных колебаний. Причем показано, что внешнее магнитное поле может как ускорять, так и замедлять процесс опрокидывания в зависимости от выбора начального условия для поперечной компоненты импульса электронов. Однако внешнее магнитное поле не может предотвратить опрокидывание колебаний принципиально, даже для случая сколь угодно малого начального отклонения от положения равновесия. Полученные результаты можно использовать для детального изучения динамики медленных необыкновенных волн в холодной плазме. Кроме того, возможно обобщение полученных данных на случай учета электрон–ионных столкновений.

### Список литературы

1. Courant R., Lax P. On nonlinear partial differential equations with two independent variables // Commun. Pure and Appl. Math. 1949. 2, N 2–3. 255–273. doi 10.1002/cpa.3160020206.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд. М.: Физматлит, 2012.
4. Чижонков Е.В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018.
5. Смилн В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
6. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1988.
7. Davidson R.C. Methods in nonlinear plasma theory. New York: Academic Press, 1972.
8. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
9. Розанова О.С., Чижонков Е.В. О существовании глобального решения одной гиперболической задачи // Докл. РАН. 2020. 492, № 1. 97–100. doi 10.31857/S2686954320030169.
10. Rozanova O.S., Chizhonkov E.V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 2021. 72, N 1. Article Number 13. doi 10.1007/s00033-020-01440-3.
11. Розанова О.С., Чижонков Е.В. Об аналитическом и численном решении одномерных уравнений холодной плазмы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. 61, № 9. 1508–1527. doi 10.31857/S0044466921090155.
12. Chizhonkov E.V., Delova M.I., Rozanova O.S. High precision methods for solving a system of cold plasma equations taking into account electron-ion collisions // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2021. 36, N 3. 139–155. doi 10.1515/rnam-2021-0012.
13. Rozanova O.S., Chizhonkov E.V. The influence of an external magnetic field on cold plasma oscillations // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 2022. 73, N 6. Article Number 249. doi 10.1007/s00033-022-01885-8.
14. Karmakar M., Maity Ch., Chakrabarti N. Wave-breaking amplitudes of relativistic upper-hybrid oscillations in a cold magnetized plasma // Physics of Plasmas. 2016. 23, N 6. Article Number 064503. doi 10.1063/1.4953607.





15. *Maity C.* Lagrangian fluid technique to study nonlinear plasma dynamics. PHD Thesis. Kolkata: Saha Institute of Nuclear Physics, 2013.
16. *Розанова О.С.* Исследование малых возмущений стационарного состояния в модели верхнегибридных плазменных колебаний // Теоретическая и математическая физика. 2022. **211**, № 2. 319–332. doi [10.4213/tmf10218](https://doi.org/10.4213/tmf10218).
17. *Dafermos C.M.* Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Berlin: Springer, 2016. doi [10.1007/978-3-662-49451-6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-49451-6).
18. *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
19. *Фролов А.А., Чижонков Е.В.* Об опрокидывании медленной необыкновенной волны в холодной магнитоактивной плазме // Математическое моделирование. 2021. **33**, № 6. 3–16. doi [10.20948/mm-2021-06-01](https://doi.org/10.20948/mm-2021-06-01).
20. *Rozanova O.S., Chizhonkov E.V.* Stabilization and blowup in the relativistic model of cold collisional plasma // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 2021. **72**, N 5. Article Number 184. doi [10.1007/s00033-021-01615-6](https://doi.org/10.1007/s00033-021-01615-6).
21. *Dawson J.M.* Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Physical Review. 1959. **113**, N 2. 383–387. doi [10.1103/PhysRev.113.383](https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.383).
22. *Kahaner D., Moler C., Nash S.* Numerical methods and software. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989.
23. *Schultz M.H.* Spline analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973.
24. *Чижонков Е.В.* О схемах второго порядка точности для моделирования плазменных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 1. 115–128. doi [10.26089/NumMet.v21r110](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r110).
25. *Фролов А.А., Чижонков Е.В.* Влияние соударений электронов на опрокидывание плазменных колебаний // Физика плазмы. 2018. **44**, № 4. 347–354. doi [10.7868/S0367292118040042](https://doi.org/10.7868/S0367292118040042).
26. *Sheppard C.J.R.* Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review [Invited] // Applied Optics. 2013. **52**, N 4. 538–545. doi [10.1364/AO.52.000538](https://doi.org/10.1364/AO.52.000538).
27. *Frolov A.A., Chizhonkov E.V.* On the criteria of the Langmuir oscillations breaking in a plasma // Physica Scripta. 2020. **95**, N 6. Article Number 065604. doi [10.1088/1402-4896/ab85fe](https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab85fe).

Поступила в редакцию  
17 февраля 2023 г.

Принята к публикации  
1 мая 2023 г.

### Информация об авторах

*Ольга Сергеевна Розанова* — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

*Евгений Владимирович Чижонков* — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

### References

1. R. Courant and P. Lax, “On Nonlinear Partial Differential Equations with Two Independent Variables,” *Commun. Pure Appl. Math.* **2** (2–3), 255–273 (1949). doi [10.1002/cpa.3160020206](https://doi.org/10.1002/cpa.3160020206).
2. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1978; Amer. Math. Soc., Providence, 1983).
3. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
4. E. V. Chizhonkov, *Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and Wake Waves in Plasma* (Fizmatlit, Moscow, 2018; CRC Press, Boca Raton, 2019).
5. V. P. Silin, *Introduction to the Kinetic Theory of Gases* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].
6. A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1978; Springer, Berlin, 1984).
7. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic Press, New York, 1972).

8. Ya. B. Zeldovich and A. D. Myshkis, *Elements of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
9. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “On the Existence of a Global Solution of a Hyperbolic Problem,” *Dokl. Akad. Nauk* **492** (1), 97–100 (2020) [*Dokl. Math.* **101** (3), 254–256 (2020)]. doi [10.1134/S1064562420030163](https://doi.org/10.1134/S1064562420030163).
10. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “On the Conditions for the Breaking of Oscillations in a Cold Plasma,” *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)* **72** (1), Article Number 13 (2021). doi [10.1007/s00033-020-01440-3](https://doi.org/10.1007/s00033-020-01440-3).
11. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “Analytical and Numerical Solutions of One-Dimensional Cold Plasma Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **61** (9), 1508–1527 (2021) [*Comput. Math. Math. Phys.* **61** (9), 1485–1503 (2021)]. doi [10.1134/S0965542521090141](https://doi.org/10.1134/S0965542521090141).
12. E. V. Chizhonkov, M. I. Delova, and O. S. Rozanova, “High Precision Methods for Solving a System of Cold Plasma Equations Taking into Account Electron-Ion Collisions,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **36** (3), 139–155 (2021). doi [10.1515/rnam-2021-0012](https://doi.org/10.1515/rnam-2021-0012).
13. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “The Influence of an External Magnetic Field on Cold Plasma Oscillations,” *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)* **73** (6), Article Number 249 (2022). doi [10.1007/s00033-022-01885-8](https://doi.org/10.1007/s00033-022-01885-8).
14. M. Karmakar, Ch. Maity, and N. Chakrabarti, “Wave-Breaking Amplitudes of Relativistic Upper-Hybrid Oscillations in a Cold Magnetized Plasma,” *Phys. Plasmas* **23** (6), Article Number 064503 (2016). doi [10.1063/1.4953607](https://doi.org/10.1063/1.4953607).
15. C. Maity, *Lagrangian Fluid Technique to Study Nonlinear Plasma Dynamics*, PHD Thesis (Saha Institute of Nuclear Physics, Kolkata, 2013).
16. O. S. Rozanova, “Study of Small Perturbations of a Stationary State in a Model of Upper Hybrid Plasma Oscillations,” *Teor. Mat. Fiz.* **211** (2), 319–332 (2022). [*Theor. Math. Phys.* **211** (2), 712–723 (2022)]. doi [10.1134/S0040577922050117](https://doi.org/10.1134/S0040577922050117).
17. C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics* (Springer, Berlin, 2016). doi [10.1007/978-3-662-49451-6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-49451-6).
18. V. L. Ginsburg and A. A. Rukhadze, *Waves in Magnetoactive Plasma* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
19. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “On the Breaking of a Slow Extraordinary Wave in a Cold Magnetoactive Plasma,” *Mat. Model.* **33** (6), 3–16 (2021) [*Math. Models Comput. Simul.* **14** (1), 1–9 (2022)]. doi [10.1134/S2070048222010094](https://doi.org/10.1134/S2070048222010094).
20. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “Stabilization and Blowup in the Relativistic Model of Cold Collisional Plasma,” *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)* **72** (5), Article Number 184 (2021). doi [10.1007/s00033-021-01615-6](https://doi.org/10.1007/s00033-021-01615-6).
21. J. M. Dawson, “Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma,” *Phys. Rev.* **113** (2), 383–387 (1959). doi [10.1103/PhysRev.113.383](https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.383).
22. D. Kahaner, C. Moler, and S. Nash, *Numerical Methods and Software* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989).
23. M. H. Schultz, *Spline Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973).
24. E. V. Chizhonkov, “On Second-Order Accuracy Schemes for Modeling of Plasma Oscillations,” *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)* **21** (1), 115–128 (2020). doi [10.26089/NumMet.v21r110](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r110).
25. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “Influence of Electron Collisions on the Breaking of Plasma Oscillations,” *Fiz. Plazmy* **44** (4), 347–354 (2018). [*Plasma Phys. Rep.* **44** (4), 398–404 (2018)]. doi [10.1134/S1063780X18040049](https://doi.org/10.1134/S1063780X18040049).
26. C. J. R. Sheppard, “Cylindrical Lenses — Focusing and Imaging: a Review [Invited],” *Appl. Opt.* **52** (4), 538–545 (2013). doi [10.1364/AO.52.000538](https://doi.org/10.1364/AO.52.000538).
27. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “On the Criteria of the Langmuir Oscillations Breaking in a Plasma,” *Phys. Scr.* **95** (6), Article Number 065604 (2020). doi [10.1088/1402-4896/ab85fe](https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab85fe).

Received  
February 17, 2023

Accepted for publication  
May 1, 2023

### Information about the authors

*Olga S. Rozanova* — Dr. Sci., Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

*Evgenii V. Chizhonkov* — Dr. Sci., Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.