

Численное моделирование двухфазных течений в рамках релаксационной модели Баера–Нунциато

М. В. Алексеев

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-0231-6095, e-mail: mikhail.alekseev@phystech.edu

Аннотация: В работе рассматриваются вопросы численного моделирования двухфазных течений с применением эйлеровой многоскоростной модели типа Баера–Нунциато. Представлено описание математической модели, подробно рассмотрен численный алгоритм решения задачи на основе разрывного метода Галеркина. Представлено описание разработанного программного комплекса, основное назначение которого — математическое моделирование двухфазных течений с прямым разрешением динамики границ раздела фаз. Особенностью предложенных алгоритмов является лимитирование простых и консервативных переменных, гарантирующее как отсутствие нефизических осцилляций, так и допустимые значения физических полей с применением лимитера WENO-S. Основная цель работы — дать исчерпывающее описание предложенного комплекса алгоритмов для решения задач рассматриваемого класса и пригодного для решения задач в реалистичных постановках. На примере модельной задачи демонстрируется возможность его применения для решения задач на сетках больших размеров.

Ключевые слова: модель Баера–Нунциато, разрывный метод Галеркина, взаимодействие газового пузырька с ударной волной.

Для цитирования: Алексеев М.В. Численное моделирование двухфазных течений в рамках релаксационной модели Баера–Нунциато // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 2. 182–194. doi 10.26089/NumMet.v24r214.

Numerical algorithms for solving two-phase flows based on relaxation Baer–Nunziato model

Mikhail V. Alekseev

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0003-0231-6095, e-mail: mikhail.alekseev@phystech.edu

Abstract: The paper considers numerical simulation techniques for two-phase flows based on the Eulerian multivelocety model of the Baer–Nunziato type. A description of the mathematical model is presented. Numerical algorithm for solving the problem based on discontinuous Galerkin method is discussed in details. A particular feature of the proposed algorithms is complex limitation procedure of primitive and conservative variables, guaranteeing both the absence of non-physical oscillations, and admissibility of the physical fields using WENO-S limiter. A description of the developed software package, the main purpose of which is mathematical modeling of two-phase flows with direct resolution of the dynamics of inter-phase boundaries is presented. The main purpose of



the work is to provide an exhaustive description of the proposed set of algorithms for solving problems of the considered class in realistic settings. Numerical results are presented for model problem, which demonstrates the possibility of its application for solving problems of actual grid sizes.

Keywords: Baer–Nunziato model, discontinuous Galerkin method, shock-bubble interaction.

For citation: M. V. Alekseev, “Numerical algorithms for solving two-phase flows based on relaxation Baer–Nunziato model,” Numerical Methods and Programming. 24 (2), 182–194 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r214.

1. Введение. Работа посвящена вопросам создания эффективных численных алгоритмов и программного комплекса для решения двухфазной полностью неравновесной модели Баера–Нунциато с релаксационными слагаемыми [1]. Первоначально модель предназначалась для анализа процесса перехода дефлаграции в детонацию при моделировании динамики горения гранулированных взрывчатых веществ, однако в настоящее время может рассматриваться как базовая модель для целого ряда обобщений с широким спектром прикладных задач [2–6].

Отметим ряд особенностей модели, усложняющих задачу построения вычислительных алгоритмов для ее решения:

- система уравнений Баера–Нунциато является гиперболической системой уравнений первого порядка. При этом существенным является наличие в уравнениях слагаемых, связанных с межфазным взаимодействием. Эти слагаемые записаны в квазилинейной форме и не могут быть сформулированы в дивергентном виде;
- модель включает в себя релаксационные слагаемые, характерное время релаксации может быть значительно меньше характерного времени протекания гидродинамических процессов.

Решению сформулированных выше вопросов посвящено значительное число работ [7–10]. В настоящей работе применяется подход, базирующийся на использовании разрывного метода Галеркина/Рунге–Кутты (RK/DG, Runge–Kutta/Discontinuous Galerkin method [11]), лимитирования консервативных переменных с помощью метода WENO-S [12] и расчета динамики релаксационных процессов с помощью полностью неявного алгоритма с решением соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона. В совокупности указанный набор алгоритмов дает возможность надежного и эффективного решения задач рассмотренного класса. В частности, он позволяет проводить моделирование в постановках, которые предполагают разрешение границ между фазами. Это накладывает ограничения на требуемые свойства вычислительного алгоритма — так, например, в указанном классе задач значения объемных долей могут быть близки к предельным значениям 0 и 1, что существенно осложняет численное решение.

Модель Баера–Нунциато в данной работе выступает в качестве основы для дальнейших обобщений, которые, тем не менее, имеют схожую структуру нелинейных гиперболических уравнений первого порядка с недивергентными слагаемыми [13]. По этой причине выбираются подходы к моделированию, минимально зависящие от особенностей задачи, а именно:

- используются численные потоки, требующие простой оценки структуры волн системы;
- используются алгоритмы лимитирования решения, не требующие знания характеристических переменных;
- параллельный программный комплекс разработан с возможностью простой замены модуля, отвечающего за физическую модель.

Модель Баера–Нунциато учитывает релаксационные процессы, связанные с установлением термодинамического равновесия сред, с помощью источников слагаемых, при наличии которых система уравнений может становиться жесткой. Трудной с вычислительной точки зрения является операция интегрирования таких систем, поскольку характерное время релаксации может быть значительно меньшим, чем шаг интегрирования по времени в вычислительной схеме.

Цель работы является комплексной и заключается в описании деталей модели и предложенных вычислительных алгоритмов с той степенью детализации, которая необходима для программной реализации метода. По этой причине основное внимание уделено непосредственно описанию алгоритмов и деталей реализации, а не их теоретическим свойствам. Возможности и эффективность предложенного комплекса

алгоритмов демонстрируются на примере достаточно сложной задачи — расчете взаимодействия ударной волны с пузырьком газа, расположенном в газовой среде с отличными термодинамическими свойствами. Расчет имеет демонстрационный характер. Расчеты валидационного характера, демонстрирующие корректность предложенных алгоритмов, представлены в работе [14].

2. Модель Баера–Нунциато с релаксацией. Система гиперболических уравнений, соответствующая модели двухфазного течения Баера–Нунциато с релаксационными слагаемыми, имеет вид [5]:

$$\frac{\partial \alpha_p}{\partial t} + \mathbf{u}_{\text{int}} \cdot \nabla \alpha_p = \nu (P_p - P_{\bar{p}}), \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \alpha_p \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p) = 0, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{u}_p) + \nabla (\alpha_p P_p) - P_{\text{int}} \nabla \alpha_p = \mu (\mathbf{u}_{\bar{p}} - \mathbf{u}_p), \tag{1c}$$

$$\frac{\partial \alpha_p \rho_p E_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_p (\rho_p E_p + P_p) \mathbf{u}_p) - P_{\text{int}} \mathbf{u}_{\text{int}} \nabla \alpha_p = \mu (\mathbf{u}_{\bar{p}} - \mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{u}_{\text{int}} + \nu (P_{\bar{p}} - P_p) P_{\text{int}}. \tag{1d}$$

Здесь $\alpha_p, \rho_p, \mathbf{u}_p = (u_p, v_p, w_p), P_p, E_p$ — объемная доля, плотность, поле скоростей, давление и полная энергия фазы p соответственно, $p = 1, 2; \bar{p} = \{1, 2\} \setminus p; \nu, \mu$ — релаксационные параметры. Для объемных долей выполнено условие нормировки $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Полная энергия p -ой фазы определена как $E_p = U_p + \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p / 2$, где U_p — внутренняя энергия фазы.

Уравнения модели включают в себя: уравнение динамики для объемной доли (1a), законы сохранения массы (1b), импульса (1c) и энергии (1d). Величины \mathbf{u}_{int} и P_{int} называются “интерфейсными” скоростью и давлением. Вид “интерфейсных” слагаемых непосредственно влияет на структуру волн и поведение фаз в модели [1, 15–17]. В настоящей работе используется вариант, предложенный в работе [1]:

$$\mathbf{u}_{\text{int}} = \mathbf{u}_1, \quad P_{\text{int}} = P_2.$$

Для конкретизации термодинамических свойств фаз необходимо задать уравнения состояния вида $U_p = U_p(P_p, \rho_p)$. В данной работе

$$U_p = \frac{P_p + \gamma_p P_{\infty, p}}{(\gamma_p - 1) \rho_p},$$

где $P_{\infty, p}$ и γ_p — параметры.

Замыкающими соотношениями модели являются задание вида “интерфейсных” слагаемых и уравнения состояния для каждой из фаз. Система уравнений (1) содержит недивергентные слагаемые, пропорциональные $P_{\text{int}} \nabla \alpha_p$, и не может быть записана в консервативном виде. Эта особенность является типичной для целого ряда многофазных многоскоростных моделей [18].

3. Вычислительные алгоритмы. Для численного решения системы уравнений (1) в настоящей работе используется ряд подходов, которые будут рассмотрены далее:

- 1) расщепление системы уравнений на составляющие по физическим процессам;
- 2) применение разрывного метода Галеркина для решения однородной системы уравнений;
- 3) применение метода Ньютона и неявного метода Рунге–Кутты для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с жесткой правой частью, отвечающих за процесс механической релаксации;
- 4) применение лимитирования WENO-S для монотонизации решения;
- 5) применение явного метода Рунге–Кутты для интегрирования системы уравнений по времени.

Здесь и далее основные вычислительные алгоритмы формулируются на основе работы [14].

3.1. Разрывный метод Галеркина. В данном разделе представлена схема разрывного метода Галеркина [11] для одномерного варианта неоднородной гиперболической системы уравнений (1), имеющей вид:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(x, t)}{\partial t} + B(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}), \tag{2}$$

где $x \in \Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}, t \in [0, T] \subset \mathbb{R}, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x, t) = (Q_1, \dots, Q_M), M = 7$ — общее число компонент вектора $\mathbf{Q}, \mathbf{S}(\mathbf{Q})$ — вектор правых частей, $B(\mathbf{Q})$ — квадратная матрица размера $M \times M$, имеющая вид

$$B(\mathbf{Q}) = \partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}) / \partial \mathbf{Q} + A(\mathbf{Q}). \tag{3}$$



Для неконсервативных систем (в случае, когда $A(\mathbf{Q}) \neq 0$) обобщенное решение не может быть определено так же, как в случае консервативных систем. Для решения этой проблемы в настоящей работе используется распространенный подход, основанный на применении теории DLM (Dal Maso–Le Floch–Murat [19]). В рамках этого подхода для корректного определения “неконсервативного произведения” вида $A(\mathbf{Q})$ вводится путь $\Psi(\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-; s)$, который “соединяет” левое значение решения в точке разрыва с правым,

$$\Psi(\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-; 0) = \mathbf{Q}^-, \quad \Psi(\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-; 1) = \mathbf{Q}^+, \quad \Psi(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}; s) = \mathbf{Q}.$$

Введем разбиение $\{\omega_i\}_{i=0}^{i=N}$ области Ω и обозначим ячейку сетки (конечный элемент) $\omega_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $1 \leq i \leq N$. Обозначим через $\mathcal{V}_h^k(\Omega)$ пространство элементов из гильбертова пространства $L^2(\Omega)$ с проекциями на ячейки ω_i , которые принадлежат векторному пространству $\mathcal{P}^k(\omega_i)$ полиномов степени k :

$$\mathcal{V}_h^k = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\omega_i} \in \mathcal{P}^k(\omega_i); 1 \leq i \leq N\}.$$

Представим решение $\mathbf{Q}(x, t)$ в ячейке ω_i конечномерной аппроксимацией $\mathbf{Q}_h \in \mathcal{V}_h^k$:

$$\mathbf{Q}_h(x, t)|_{\omega_i} = \sum_{l=0}^k \psi_i^{(l)}(x) \mathbf{Q}_i^{(l)}(t), \tag{4}$$

где $\psi_i^{(l)}$ – полином Лежандра степени l . Здесь и в дальнейшем индекс i обозначает принадлежность i -ой ячейке. Для получения полудискретной системы уравнений для $\mathbf{Q}_h(x, t)$ умножим уравнение (2) на пробную функцию $v_h \in \mathcal{V}_h^k$ и проинтегрируем по области ω_i :

$$\int_{\omega_i} \frac{\partial \mathbf{Q}_h(x, t)}{\partial t} v_h(x) dx + \left\langle \left[B(\mathbf{Q}(\cdot, t)) \frac{\partial \mathbf{Q}(\cdot, t)}{\partial x} \right]_{\Psi}, v_h \right\rangle = \int_{\omega_i} \mathbf{S}(\mathbf{Q}_h) v_h(x) dx.$$

Неконсервативное произведение может быть определено в обобщенном смысле следующим образом [20]:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[B(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right]_{\Psi}, v_h \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} & \int_{\omega_i} B(\mathbf{Q}(x, t)) \frac{\partial \mathbf{Q}(x, t)}{\partial x} v_h(x) dx + \\ & + \sum_d \left(\int_0^1 B(\Psi(\mathbf{Q}_d^+, \mathbf{Q}_d^-; s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\mathbf{Q}_d^+, \mathbf{Q}_d^-; s) ds \right) v_h(x_d), \end{aligned} \tag{5}$$

где индекс d соответствует номерам точек разрыва в решении \mathbf{Q} , при этом \mathbf{Q}_d^{\pm} – предельные значения решения справа и слева от разрыва в точке x_d в момент времени t . Заметим, что данное определение существенно зависит от выбранного пути Ψ . В случае $A = 0$ произведение (5) не зависит от выбранного пути и совпадает с классическим определением обобщенного произведения. Следствием определения (5) и системы (2) без релаксационных слагаемых является условие Гюгоньо, которому должно удовлетворять обобщенное решение в точках разрыва x_d :

$$\int_0^1 (\xi_d \mathbb{I} - B(\Psi(\mathbf{Q}_d^-, \mathbf{Q}_d^+; s))) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\mathbf{Q}_d^-, \mathbf{Q}_d^+; s) ds = 0,$$

где ξ_d – скорость разрыва, \mathbb{I} – единичная матрица. С учетом (3) получим:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[B(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right]_{\Psi}, v_h \right\rangle = & \int_{\omega_i} \left(A(\mathbf{Q}(x, t)) \frac{\partial \mathbf{Q}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} \right) v_h(x) dx + \\ & + \sum_d \left(\mathbf{F}(\mathbf{Q}_d^+) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_d^-) + \left(\int_0^1 A(\Psi(\mathbf{Q}_d^+, \mathbf{Q}_d^-; s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\mathbf{Q}_d^+, \mathbf{Q}_d^-; s) ds \right) \right) v_h(x_d). \end{aligned}$$

Постановка задачи Римана для соответствующей неконсервативной системы представлена в [20]. На основе сделанных выше построений могут быть выведены соответствующие схемы типа Годунова. В частности, численная схема для разрывного метода Галеркина может быть записана в следующем виде:

$$\int_{\omega_i} \frac{\partial \mathbf{Q}_h}{\partial t} v_h(x) dx + \int_{\omega_i} \left(A(\mathbf{Q}_h) \frac{\partial \mathbf{Q}_h}{\partial x} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}_h) \right) v_h(x) dx + \left(v_h(x_{i+1/2})^- D_{i+1/2}^- + v_h(x_{i+1/2})^+ D_{i-1/2}^+ \right) = \int_{\omega_i} \mathbf{S}(\mathbf{Q}_h) v_h(x) dx;$$

здесь $D_{i\pm 1/2}^\mp$, $v_h(x_{i\pm 1/2})^\mp$ определены на границах соответствующих ячеек,

$$D_{i+1/2}^- = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^-) + \int_0^1 A(\Psi(\mathbf{Q}_{i+1/2}^-, \hat{\mathbf{Q}}_{i+1}; s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^-, \hat{\mathbf{Q}}_{i+1}; s) ds,$$

$$D_{i+1/2}^+ = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^+) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}) + \int_0^1 A(\Psi(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}, \mathbf{Q}_{i+1/2}^+; s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}, \mathbf{Q}_{i+1/2}^+; s) ds,$$

где $\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}$ — решение задачи Римана на границе ячеек.

Пусть выбран линейный путь $\Psi(\mathbf{Q}^-, \mathbf{Q}^+; s) = \mathbf{Q}_d^- + s(\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-)$ и в качестве численного потока используется поток Русанова. Тогда в точках разрыва $x_d = x_{i\pm 1/2}$:

$$D_d^\pm = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_d^+) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_d^-) + A_d^\pm (\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-), \quad A_d^\pm = \frac{1}{2} \int_0^1 (A(\mathbf{Q}_d^- + s(\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-)) \pm \mathbb{I}) ds,$$

где $\Lambda = \max(|\lambda_d^+|, |\lambda_d^-|)$, λ_d^\pm — максимальные собственные значения матрицы $B(\mathbf{Q}_d^- + s(\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-))$. Отметим, что применение более простого потока Лакса–Фридрихса приводит, вообще говоря, к неустойчивой схеме [14].

Рассматривая произвольное $v_h(x) \in \text{span} \{ \psi_i^{(l)} \}$, получаем следующую полудискретную систему уравнений относительно переменных $\{ \mathbf{Q}_i^{(l)} \}$, определенных в (4):

$$J \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}_i}{dt} = \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{Q}}_i) + \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{Q}}_i). \tag{6}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{Q}}_i = (Q_{0,i}^{(0)}, \dots, Q_{0,i}^{(k)}, Q_{1,i}^{(0)}, \dots, Q_{M,i}^{(0)}, \dots, Q_{M,i}^{(k)})$ — вектор неизвестных. Его компоненты $Q_{m,i}^{(l)}$ в дальнейшем будем называть l -ой гармоникой ($l = 0, \dots, k$) m -ой компоненты вектора \mathbf{Q}_i . Матрица $J \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$ является матрицей Грама с компонентами $[J]_{ml} = \int_{\omega_i} \psi_i^{(l)} \psi_i^{(m)} dx$, вектор $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{Q}}_i)$ является аппроксимацией дифференциального оператора в левой части системы уравнений (2), вектор $\mathbf{I}(\tilde{\mathbf{Q}}_i)$ соответствует аппроксимации правой части (2),

$$I_m^{(l)} = \int_{\omega_i} \mathbf{S}_m(\mathbf{Q}_h) \psi_i^{(l)} dx. \tag{7}$$

Одна из наиболее простых стратегий решения системы (6) — расщепление по процессам первого порядка. Разобьем временной интервал на части точками $\{t^n\}$. Далее на каждом шаге по времени $t \in [t^n, t^{n+1}]$ сначала решается задача Коши для системы ОДУ

$$J \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}_i}{dt} = \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{Q}}_i), \quad t \in (t^n, t^{n+1}), \tag{8}$$

с начальными данными $\tilde{\mathbf{Q}}_i^0 = \tilde{\mathbf{Q}}_i(t^n)$ для определения “промежуточного” решения $\tilde{\mathbf{Q}}_{i,H} = \tilde{\mathbf{Q}}_i(t^{n+1})$. Затем решается задача Коши для системы ОДУ

$$J \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}_i}{dt} = \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{Q}}_i), \quad t \in (t^n, t^{n+1}) \tag{9}$$

с начальными данными $\tilde{\mathbf{Q}}_{i,H}$.



Для интегрирования по времени однородной системы (8) далее используется вариант метода Рунге–Кутты TVD/RK3 [11] с лимитированием консервативных переменных на каждом шаге метода. В настоящей работе используется лимитер WENO-S, описанный в разделе 3.3. Для интегрирования по пространству используется метод квадратур Гаусса–Лежандра.

Для интегрирования системы уравнений (9) используется неявный алгоритм Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования.

3.2. Алгоритм расчета релаксационных слагаемых. Задача Коши для системы ОДУ (9) решается неявным методом Рунге–Кутты второго порядка на интервале времени $t \in (t^n, t^{n+1}]$. Разобьем его на части точками $(t_0^n, t_1^n, \dots, t_{M-1}^n)$, где $t_{j+1}^n = t_j^n + \tau_j$, $t_0^n = t_n$, $t_{M-1}^n = t_{n+1}$. Таким образом, $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ — шаг интегрирования газодинамической части задачи, а τ_j — шаг интегрирования релаксационной части. При этом τ_j может быть переменным. Разностная схема решения задачи Коши для (9) имеет следующий вид:

$$\tilde{Q}_i^0 = \tilde{Q}_i(t^n); \quad \tilde{Q}_i^{j+1} = \tilde{Q}_i^j + 0.5\tau_k \left(\mathbf{R}(\tilde{Q}_i^{j+1}) + \mathbf{R}(\tilde{Q}_i^j) \right), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

где $\mathbf{R} = J^{-1}\mathbf{I}$. Аппроксимации релаксационных членов \mathbf{I} , определенные в (7), рассчитываются численно методом квадратур Гаусса–Лежандра.

Нелинейная система уравнений (10) решается численно методом Ньютона:

$$\partial \mathbf{F} \left(\tilde{Q}_i^{j+1} \right) / \partial \tilde{Q}_i^{j+1} \Big|_{\tilde{Q}_i^{j+1,s}} \cdot \left(\tilde{Q}_i^{j+1,s+1} - \tilde{Q}_i^{j+1,s} \right) = -\mathbf{F} \left(\tilde{Q}_i^{j+1,s} \right), \quad (11)$$

где индекс s обозначает номер итерации, $\tilde{Q}_i^{j+1,0} = \tilde{Q}_i^j$ соответствует $s = 0$. Функция \mathbf{F} имеет вид:

$$\mathbf{F} \left(\tilde{Q}_i^{j+1} \right) = \tilde{Q}_i^{j+1} - \tilde{Q}_i^j - 0.5\tau_j \left(\mathbf{R}(\tilde{Q}_i^{j+1}) + \mathbf{R}(\tilde{Q}_i^j) \right).$$

Матрица Якоби $\partial \mathbf{F} \left(\tilde{Q}_i^{j+1} \right) / \partial \tilde{Q}_i^{j+1}$ в (11) вычисляется с применением численного дифференцирования. Итерации метода Ньютона продолжаются до тех пор, пока величина $r = \max_m |r_m|$ не станет меньше заданного значения, где

$$r_m = \begin{cases} \frac{\tilde{Q}_{i,m}^{j+1,s+1} - \tilde{Q}_{i,m}^{j+1,s}}{\tilde{Q}_{i,m}^{j+1,s+1}}, & \text{если } \left| \tilde{Q}_{i,m}^{j+1,s+1} \right| > 1; \\ \tilde{Q}_{i,m}^{j+1,s+1} - \tilde{Q}_{i,m}^{j+1,s}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В реализованном алгоритме предусмотрен автоматический выбор шага интегрирования. В начальный момент $\tau_0 = 0.2\Delta t$. В случае, если превышено максимальное число N_{\max} ньютоновских итераций (далее $N_{\max} = 20$) или если решение сходится к нефизичным результатам (отрицательное давление или объемная доля и т.д.), то шаг интегрирования уменьшается. В случае, когда число итераций меньше минимального значения N_{\min} (далее $N_{\min} = 6$), шаг интегрирования увеличивается.

3.3. Лимитирование переменных. Для рассмотренного метода Рунге–Кутты TVD/RK3 численное решение не будет монотонным в случае разрывных решений. Одним из способов обеспечить монотонность решения является добавление в схему численной диссипации. Искусственная диссипация может быть введена в аппроксимации разрывного метода Галеркина различными способами, среди которых известны методы на основе геометрических ограничителей (лимитеров), явного введения дополнительных диссипативных слагаемых, фильтрации высокочастотных компонент решения и др. [21]. В работах [22, 23] описан способ монотонизации разрывного метода Галеркина путем явного введения в схему искусственной вязкости типа Неймана–Рихтмайера. Помимо этого, существуют лимитеры, основанные на последовательном ограничении степеней свободы, начиная с высшей (например, моментный лимитер Криводоновой) [24]. В настоящей работе использован лимитер WENO-S [12]. С одной стороны, он достаточно легко реализуется на практике, с другой — может быть использован в качестве составной части комплексного алгоритма лимитирования.

Применение ограничителя WENO-S состоит из двух шагов [12]:

1. Идентификация ячеек, в которых решение подлежит лимитированию. В данной работе используется TVB-идентификатор, основанный на функции $\min\text{mod}$.
2. Применение непосредственно ограничителя WENO-S для реконструкции решения в отмеченных ячейках.

Идентификация ячеек, в которых решение подлежит лимитированию. Обозначим усредненное по объему решение в ячейке ω_i как

$$\bar{Q}_{m,i} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\omega_i} \tilde{Q}_m dx. \tag{12}$$

Здесь, как и прежде, индекс i обозначает пространственную ячейку, а индекс m обозначает компоненту вектора \tilde{Q} , $m = 1, \dots, M \cdot k$.

Определим скачки численного решения в ячейках как $\tilde{Q}_{m,i}^+ = \tilde{Q}_{m,i+1/2}^- - \bar{Q}_{m,i}$, $\tilde{Q}_{m,i}^- = \bar{Q}_{m,i} - \tilde{Q}_{m,i-1/2}^+$. Рассмотрим в каждой ячейке функции

$$\begin{aligned} (\tilde{Q}_{m,i}^+)^{(\text{mod})} &= \text{minmod} \left(\tilde{Q}_{m,i}^+, \bar{Q}_{m,i+1} - \bar{Q}_{m,i}, \bar{Q}_{m,i} - \bar{Q}_{m,i-1} \right), \\ (\tilde{Q}_{m,i}^-)^{(\text{mod})} &= \text{minmod} \left(\tilde{Q}_{m,i}^-, \bar{Q}_{m,i+1} - \bar{Q}_{m,i}, \bar{Q}_{m,i} - \bar{Q}_{m,i-1} \right), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\text{minmod} (a_1, \dots, a_N) = \begin{cases} s \min (a_1, \dots, a_N), & \text{если } s = \text{sign} (a_k), \forall k = \overline{1, N}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение в ячейке ω_i подлежит лимитированию, если в (13) $(\tilde{Q}_{m,i}^\pm)^{(\text{mod})} \neq (\tilde{Q}_{m,i}^\pm)$, т.е. какая-либо из функций в (13) возвращает не первый аргумент.

Шаги лимитера WENO-S:

1. Обозначим полиномы в ячейках ω_j , $j = i - 1, i, i + 1$ как $p_{-1}(x)$, $p_0(x)$ и $p_1(x)$ соответственно и модифицируем решения в соседних ячейках следующим образом:

$$p_{-1}^{\text{mod}}(x) = p_{-1} - \bar{p}_{-1} + \bar{p}_0, \quad p_1^{\text{mod}}(x) = p_1 - \bar{p}_1 + \bar{p}_0,$$

где \bar{p} — усредненное по объему решение, представленное в (12).

2. Расчет индикатора гладкости β_i по формуле

$$\beta_i = \sum_{l=1}^k \int_{\omega_j} \Delta x_j^{2l-1} \left(\frac{\partial^l}{\partial x^l} p_j(x) \right)^2 dx,$$

где k — степень полинома $p_j(x)$.

3. Расчет весов κ_j по формуле

$$\kappa_j = \bar{\kappa}_j \left/ \sum_{n=-1,0,+1} \bar{\kappa}_n \right., \quad \bar{\kappa}_n = \frac{\gamma_n}{(\varepsilon + \beta_n)^r}, \quad n = -1, 0, +1.$$

Здесь γ_n — линейный вес, $\varepsilon = 10^{-6}$ и $r = 2$. Линейные веса должны удовлетворять следующим требованиям:

$$\gamma_0 \gg \gamma_{\pm 1}, \quad \gamma_{-1} + \gamma_0 + \gamma_{+1} = 1.$$

В настоящей работе $\gamma_0 = 0.998, \gamma_{\pm 1} = 0.001$.

4. Реконструкция решения в центральной ячейке ω_0 в соответствии с выражением

$$p_0^{\text{new}}(x) = \kappa_{-1} p_{-1}^{\text{mod}}(x) + \kappa_0 p_0(x) + \kappa_1 p_1^{\text{mod}}(x).$$

Применение ограничителя в одномерном случае может быть записано в операторном виде $p_0^{\text{new}} = \Lambda_\alpha p_0$ для направления \mathcal{O}_{x_α} . Для многомерного случая и декартовых сеток $p_0^{\text{new}} = \Lambda p_0$, где $\Lambda = \Lambda_z \Lambda_y \Lambda_x$.

Для интегрирования по времени системы ОДУ (8) используется TVD/RK3 метод Рунге–Кутты, представленный ниже с лимитированием переменных на k -ой стадии:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i^1 &= \tilde{Q}_i^n + \Delta t \mathbf{P} \left(\tilde{Q}_i^n \right), & \overline{\tilde{Q}_i^1} &= \Lambda \tilde{Q}_i^1, \\ \tilde{Q}_i^2 &= \frac{3}{4} \tilde{Q}_i^n + \frac{1}{4} \tilde{Q}_i^1 + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{P} \left(\overline{\tilde{Q}_i^1} \right), & \overline{\tilde{Q}_i^2} &= \Lambda \tilde{Q}_i^2, \\ \tilde{Q}_i^{n+1} &= \frac{1}{3} \tilde{Q}_i^n + \frac{2}{3} \tilde{Q}_i^2 + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{P} \left(\overline{\tilde{Q}_i^2} \right), & \overline{\tilde{Q}_i^{n+1}} &= \Lambda \tilde{Q}_i^{n+1}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{P} = J^{-1} \mathbf{H}$, см. (6).

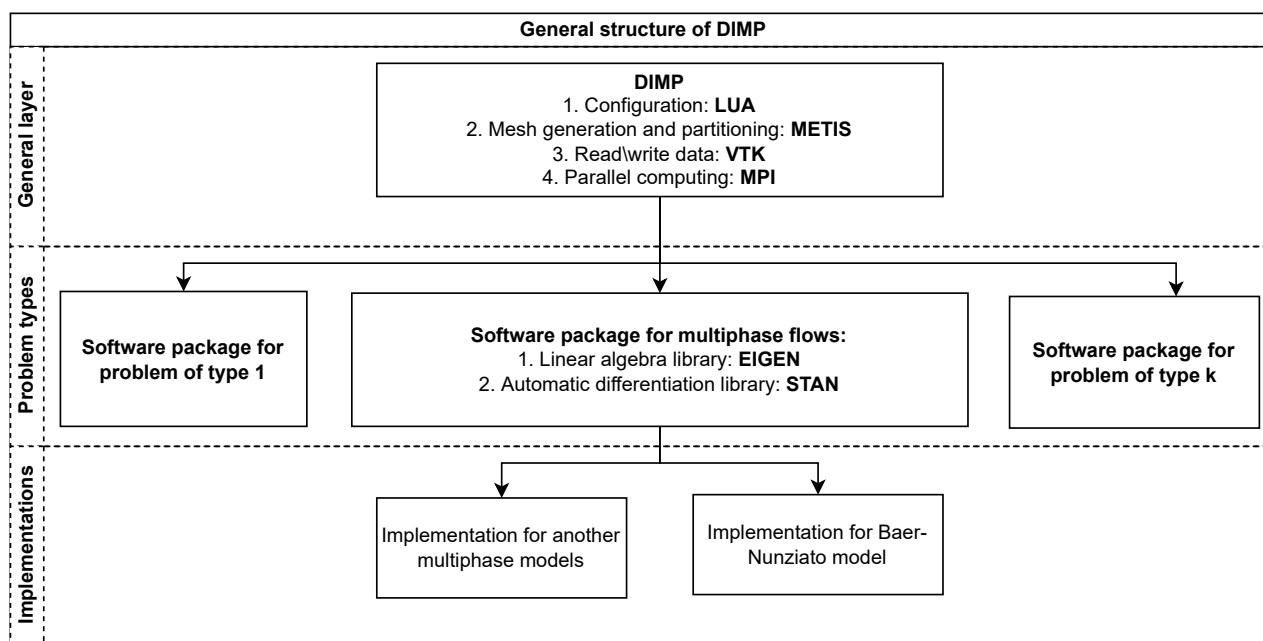


Рис. 1. Структура кода программного комплекса DIMP

Fig. 1. DIMP structure

3.4. Программный комплекс. Программный комплекс основан на платформе DIMP [25], разрабатываемой в ИПМ имени М. В. Келдыша РАН. Данная платформа предоставляет набор средств, обеспечивающих эффективную реализацию явных вычислительных алгоритмов для решения широкого класса задач с применением декартовых ортогональных сеток. Языком реализации является C++ с использованием интерфейса параллельного программирования MPI. Разбиение расчетной сетки для межпроцессорного обмена осуществлено с помощью библиотеки Metis. Для написания конфигурационных файлов используется встраиваемый язык программирования Lua. Результаты расчетов могут быть сохранены в формате VTK.

Часть DIMP, отвечающая за конкретную физико-математическую модель и вычислительные алгоритмы, предоставляет возможность применения программного комплекса на достаточно широком классе задач в рамках воксельной геометрической постановки. Для представленной в данной работе модели был реализован модуль DIMP-BN для решения задач многофазных течений. Структура программного комплекса изображена на рис. 1. Общая база вычислительных алгоритмов реализована на уровне типов задач и предоставляет возможность проведения расчетов с использованием метода RK/DG с восполнением решения до произвольного порядка, а также интегрирования по времени методом Рунге–Кутты, задаваемом с помощью таблицы Бутчера. В качестве вспомогательных библиотек используются библиотеки BOOST и EIGEN.

4. Вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент, представленный в данном разделе, проведен с использованием суперкомпьютерного комплекса К-60 ИПМ имени М. В. Келдыша РАН. Задача решалась на 112 процессорах в течение 10 часов. Полученные результаты были обработаны с помощью свободно распространяемого графического редактора Paraview.

Задача пролета ударной волны в жидкой среде, содержащей пузырек газа, является важной верификационной задачей. Эксперимент представляет собой трехмерный расчет, который демонстрирует возможности предложенного алгоритма и программного комплекса. В тесте рассматривается трехмерная постановка задачи о прохождении ударной волны через среду, содержащую включения из гелия. Схематичное представление задачи изображено на рис. 2. Диаметр пузырька D_0 равен 2.5 см, длина камеры L составляет 26.7 см, поперечные размеры H_y и H_z составляют 8.9 см каждый. Начальное положение ударной волны (УВ) $X_0 = 25.2$ см, начальное положение центра пузырька $x_{\text{bub}} = 18.267$ см. Расчет

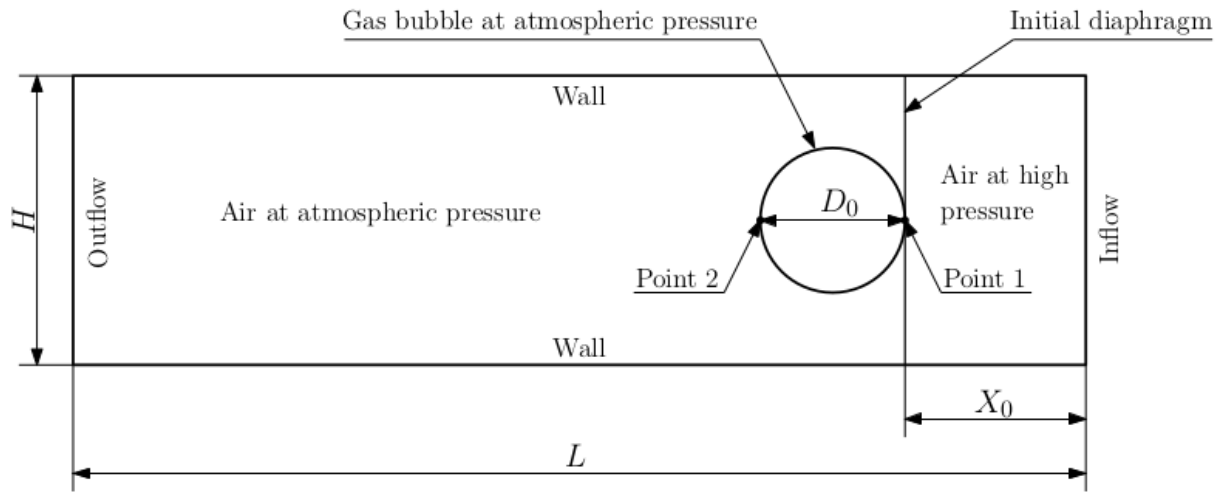


Рис. 2. Схематичное изображение тестовой задачи

Fig. 2. Test configuration

проводился до момента времени $t = 25 \cdot 10^{-5}$ с. Термодинамические свойства пузырька и окружающего воздуха: $\gamma_1 = 1.67$, $\gamma_2 = 1.4$, соответственно. Начальные данные представлены в табл. 1. В расчете использовалась воксельная сетка размерами $600 \times 300 \times 300$. Режим течения зависит от числа Этвуда $A = (\rho_1 - \rho_2) / (\rho_1 + \rho_2)$, где ρ_1 – плотность пузырька, ρ_2 – плотность вмещающей среды. Для случая, когда пузырек наполнен гелием, число Этвуда $A = -0.7708$, что соответствует ситуации взаимодействия “тяжелой” вмещающей среды и “легкого” пузырька. В этом случае ударная волна, проходящая внутри пузырька газа, опережает ударную волну снаружи пузырька. В результате формируется вытянутая по направлению движения структура пузырька.

На рис. 3 представлено распределение давления внутри пузырька гелия и эволюция формы пузырька в ходе расчета, соответственно.

5. Заключение. В работе рассмотрена реализация вычислительного алгоритма для решения уравнений модели типа Баера–Нунциато, которая описывает широкий класс задач, связанных с анализом быстрых волновых процессов в многофазных средах с прямым разрешением границ раздела фаз. Это накладывает определенные ограничения на свойства вычислительного алгоритма – так, например, в ука-

Таблица 1. Начальные данные теста

Table 1. Initial test data

Состояние до УВ IC before shock wave	Состояние после УВ IC after shock wave	Состояние внутри пузырька IC inside bubble
$\alpha_1 = 0.9999$	$\alpha_1 = 0.9999$	$\alpha_1 = 0.0001$
$\alpha_2 = 0.0001$	$\alpha_2 = 0.0001$	$\alpha_2 = 0.9999$
$\rho_1 = 0.167$	$\rho_1 = 0.167$	$\rho_1 = 0.167$
$\rho_2 = 1.29$	$\rho_2 = 1.92691$	$\rho_2 = 1.29$
$\mathbf{u}_1 = (0, 0, 0)$	$\mathbf{u}_1 = (-114.42, 0, 0)$	$\mathbf{u}_1 = (0, 0, 0)$
$\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0)$	$\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0)$	$\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0)$
$P_1 = 10^5$	$P_1 = 10^5$	$P_1 = 10^5$
$P_2 = 10^5$	$P_2 = 156980.0$	$P_2 = 10^5$

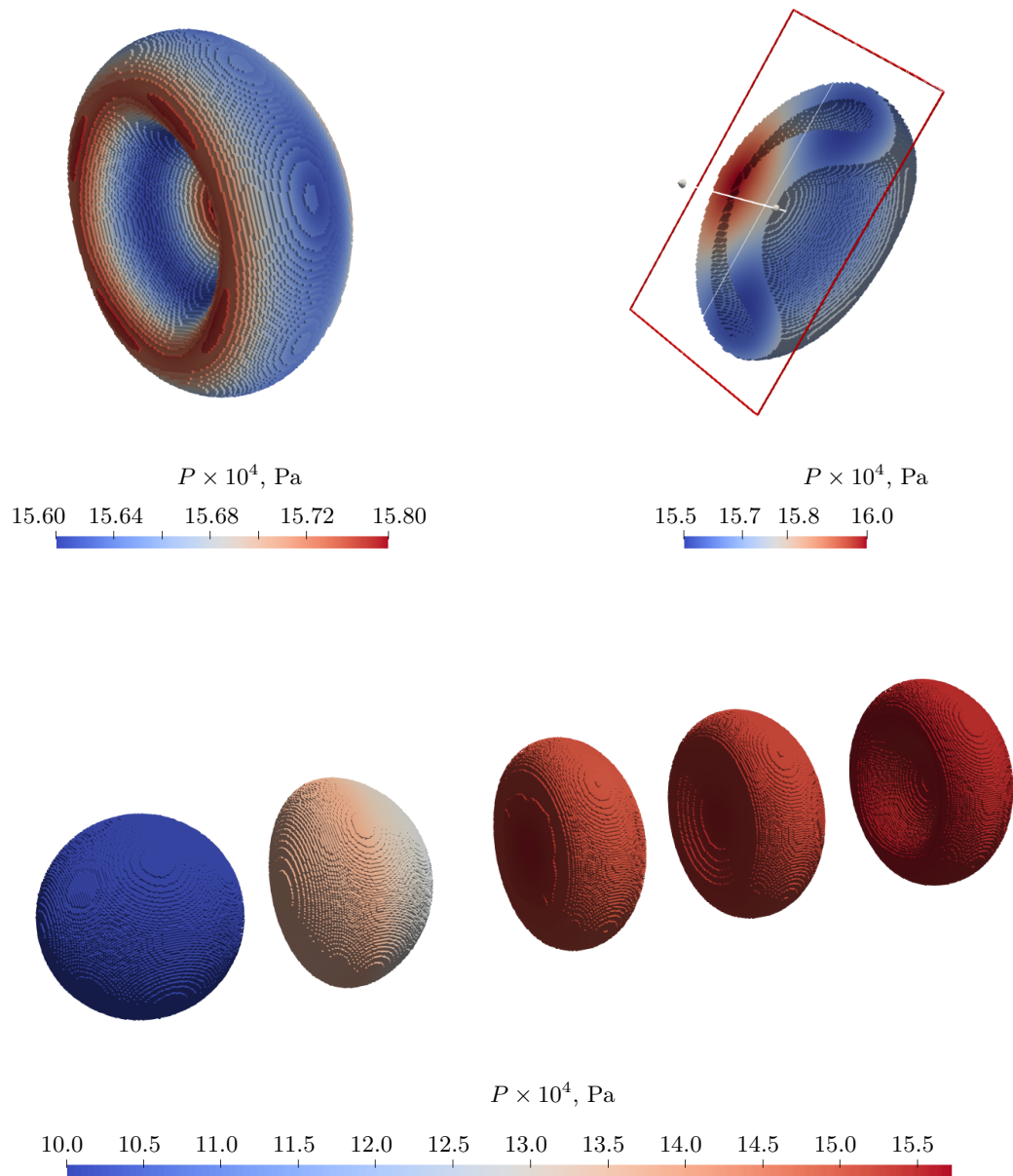


Рис. 3. Давление в пузырьке (слева) и давление в пузырьке в разрезе (справа).
 Эволюция пузырька в моменты времени $t = 0, 30, 60, 90, 120$ мкс (снизу)

Fig. 3. Pressure inside bubble (left), bubble slice (right).
 Bubble shape evolution at $t = 0, 30, 60, 90, 120 \mu\text{s}$ (bottom)

занным классе задач значения объемных долей могут быть близки к их предельным значениям 0 и 1, что существенно осложняет численное решение. Приведено детальное описание соответствующего вычислительного алгоритма на основе разрывного метода Галеркина с геометрическим лимитированием консервативных и простых переменных. В качестве примера рассмотрена задача о прохождении ударной волны через пузырек с газом в пространственно-трехмерной постановке.

Список литературы

1. Baer M.R., Nunziato J.W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. Multiph. Flow. 1986. **12**, N 6. 861–889. doi 10.1016/0301-9322(86)90033-9.
2. Drew D.A., Passman S.L. Theory of multicomponent fluids. New York: Springer, 1999. doi 10.1007/b97678.
3. Favrie N., Gavriluk S.L., Saurel R. Solid–fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations // J. Comput. Phys. 2009. **228**, N 16. 6037–6077. doi 10.1016/j.jcp.2009.05.015.
4. Kapila A.K., Son S.F., Bdzil J.B., Menikoff R., Stewart D.S., Two-phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone // Phys. Fluids. 1997. **9**, N 12. 3885–3897. doi 10.1063/1.869488.
5. Kapila A.K., Menikoff R., Bdzil J.B., et al. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: reduced equations // Phys. Fluids. 2001. **13**, N 10. 3002–3024. doi 10.1063/1.1398042.
6. Murrone A., Guillard H. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems // J. Comput. Phys. 2005. **202**, N 2. 664–698. doi 10.1016/j.jcp.2004.07.019.
7. Tokareva S.A., Toro E.F. HLLC-type Riemann solver for the Baer–Nunziato equations of compressible two-phase flow // J. Comput. Phys. 2010. **229**, N 10. 3573–3604. doi 10.1016/j.jcp.2010.01.016.
8. Dumbser M., Toro E.F. A simple extension of the Osher Riemann solver to non-conservative hyperbolic systems // J. Sci. Comput. 2011. **48**, N 1–3. 70–88. doi 10.1007/s10915-010-9400-3.
9. Franquet E., Perrier V. Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for the approximation of Baer and Nunziato type multiphase models // J. Comput. Phys. 2012. **231**, N 11. 4096–4141. doi 10.1016/j.jcp.2012.02.002.
10. de Frahan M.T.H., Varadan S., Johnsen E. A new limiting procedure for discontinuous Galerkin methods applied to compressible multiphase flows with shocks and interfaces // J. Comput. Phys. 2015. **280**. 489–509. doi 10.1016/j.jcp.2014.09.030.
11. Cockburn B., Shu C.-W. The Runge–Kutta local projection P^1 -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 1991. **25**, N 3, 337–361. http://www.numdam.org/item/M2AN_1991__25_3_337_0.pdf. Cited April 9, 2023.
12. Zhong X., Shu C.-W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods // J. Comput. Phys. 2013. **232**, N 1. 397–415. doi 10.1016/j.jcp.2012.08.028.
13. Алексеев М.В., Савенков Е.Б. Математическая модель двухфазной гиперупругой среды. “Скалярный” случай. Препринт ИПМ № 40. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. doi 10.20948/prepr-2022-40.
14. Полехина Р.Р., Алексеев М.В., Савенков Е.Б. Валидация вычислительного алгоритма на основе разрывного метода Галёркина для релаксационной модели Баера–Нунциато // Дифференциальные уравнения. 2022. **58**, № 7. 977–994. doi 10.31857/S0374064122070093.
15. Andrianov N., Warnecke G. The Riemann problem for the Baer–Nunziato two-phase flow model // J. Comput. Phys. 2004. **195**, N 2. 434–464. doi 10.1016/j.jcp.2003.10.006.
16. Daude F., Berry R.A., Galon P. A finite-volume method for compressible non-equilibrium two-phase flows in networks of elastic pipelines using the Baer–Nunziato model // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2019. **354**. 820–849. doi 10.1016/j.cma.2019.06.010.
17. Saurel R., Abgrall R. A simple method for compressible multifluid flows // SIAM J. Sci. Comput. 1999. **21**, N 3. 1115–1145. doi 10.1137/S1064827597323749.
18. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
19. Dal Maso G., Le Floch P., Murat F. Definition and weak stability of nonconservative products // J. Math. Pures Appl. 1995. **74**, N 6. 483–548.
20. Parés C. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // SIAM J. Numer. Anal. 2006. **44**, N 1. 300–321. doi 10.1137/050628052.
21. Michoski C., Dawson C., Kubatko E.J., et al. A comparison of artificial viscosity, limiters, and filters, for high order discontinuous Galerkin solutions in nonlinear settings // J. Sci. Comput. 2016. **66**, N 1. 406–434. doi 10.1007/s10915-015-0027-2.
22. Persson P.-O., Peraire J. Sub-cell shock capturing for discontinuous Galerkin methods // Proc. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, USA, January 9–12, 2006. doi 10.2514/6.2006-112.
23. Moura R.C., Affonso R.C., de Castro da Silva A.F., Ortega M.A. Diffusion-based limiters for discontinuous Galerkin methods – Part I: one-dimensional equations // Proc. 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013). November 3–7, 2013. Ribeirão Preto, Brazil. https://www.researchgate.net/publication/270273162_Diffusion-Based_Limiters_for_Discontinuous_Galerkin_Methods_-_Part_I_One-Dimensional_Equations/link/54a40bc10cf267bdb9066b22/download. Cited April 9, 2023.



24. Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods // J. Comput. Phys. 2007. **226**, N 1. 879–896. doi 10.1016/j.jcp.2007.05.011.
25. Балашов В.А., Савенков Е.Б., Четверушкин Б.Н. Вычислительные технологии программного комплекса DiMP-Hydro для моделирования микротечений // Математическое моделирование. 2019. **31**, № 7. 21–44. doi 10.1134/S0234087919070025.

Поступила в редакцию
3 марта 2023 г.

Принята к публикации
13 марта 2023 г.

Информация об авторе

Михаил Владиславович Алексеев — мл. научн. сотр.; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

References

1. M. R. Baer and J. W. Nunziato, “A Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials,” *Int. J. Multiph. Flow* **12** (6), 861–889 (1986). doi 10.1016/0301-9322(86)90033-9.
2. D. A. Drew and S. L. Passman, *Theory of Multicomponent Fluids* (Springer, New York, 1999). doi 10.1007/b97678.
3. N. Favrie, S. L. Gavriluk, and R. Saurel, “Solid–Fluid Diffuse Interface Model in Cases of Extreme Deformations,” *J. Comput. Phys.* **228** (16), 6037–6077 (2009). doi 10.1016/j.jcp.2009.05.015.
4. A. K. Kapila, S. F. Son, J. B. Bdzil, and R. Menikoff, “Two-Phase Modeling of DDT: Structure of the Velocity-Relaxation Zone,” *Phys. Fluids* **9** (12), 3885–3897 (1997). doi 10.1063/1.869488.
5. A. K. Kapila, R. Menikoff, J. B. Bdzil, et al., “Two-Phase Modeling of Deflagration-to-Detonation Transition in Granular Materials: Reduced Equations,” *Phys. Fluids* **13** (10), 3002–3024 (2001). doi 10.1063/1.1398042.
6. A. Murrone and H. Guillard, “A Five-Equation Reduced Model for Compressible Two Phase Flow Problems,” *J. Comput. Phys.* **202** (2), 664–698 (2005). doi 10.1016/j.jcp.2004.07.019.
7. S. A. Tokareva and E. F. Toro, “HLLC-Type Riemann Solver for the Baer–Nunziato Equations of Compressible Two-Phase Flow,” *J. Comput. Phys.* **229** (10), 3573–3604 (2010). doi 10.1016/j.jcp.2010.01.016.
8. M. Dumbser and E. F. Toro, “A Simple Extension of the Osher Riemann Solver to Non-conservative Hyperbolic Systems,” *J. Sci. Comput.* **48** (1–3), 70–88 (2011). doi 10.1007/s10915-010-9400-3.
9. E. Franquet and V. Perrier, “Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Method for the Approximation of Baer and Nunziato Type Multiphase Models,” *J. Comput. Phys.* **231** (11), 4096–4141 (2012). doi 10.1016/j.jcp.2012.02.002.
10. M. T. H. de Frahan, S. Varadan, and E. Johnsen, “A New Limiting Procedure for Discontinuous Galerkin Methods Applied to Compressible Multiphase Flows with Shocks and Interfaces,” *J. Comput. Phys.* **280**, 489–509 (2015). doi 10.1016/j.jcp.2014.09.030.
11. B. Cockburn and C.-W. Shu, “The Runge–Kutta Local Projection P^1 -Discontinuous-Galerkin Finite Element Method for Scalar Conservation Laws,” *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* **25** (3), 337–361 (1991). http://www.numdam.org/item/M2AN_1991__25_3_337_0.pdf. Cited April 9, 2023.
12. X. Zhong and C.-W. Shu, “A Simple Weighted Essentially Nonoscillatory Limiter for Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods,” *J. Comput. Phys.* **232** (1), 397–415 (2013). doi 10.1016/j.jcp.2012.08.028.
13. M. V. Alekseev and E. B. Savenkov, *Two-Phase Hyperelastic Model. “Scalar” Case*, Preprint No. 40 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2022). doi 10.20948/prepr-2022-40.
14. R. R. Polekhina, M. V. Alekseev, and E. B. Savenkov, “Validation of a Computational Algorithm Based on the Discontinuous Galerkin Method for the Baer–Nunziato Relaxation Model,” *Differ. Uravn.* **58** (7), 977–994 (2022) [*Differ. Equ.* **58** (7), 966–984 (2022)]. doi 10.1134/S0012266122070096.
15. N. Andrianov and G. Warnecke, “The Riemann Problem for the Baer–Nunziato Two-Phase Flow Model,” *J. Comput. Phys.* **195** (2), 434–464 (2004). doi 10.1016/j.jcp.2003.10.006.
16. F. Daude, R. A. Berry, and P. Galon, “A Finite-Volume Method for Compressible Non-Equilibrium Two-Phase Flows in Networks of Elastic Pipelines Using the Baer–Nunziato Model,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **354**, 820–849 (2019). doi 10.1016/j.cma.2019.06.010.

17. R. Saurel and R. Abgrall, “A Simple Method for Compressible Multifluid Flows,” *SIAM J. Sci. Comput.* **21** (3), 1115–1145 (1999). doi [10.1137/S1064827597323749](https://doi.org/10.1137/S1064827597323749).
18. R. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media* (Nauka, Moscow, 1987; Hemisphere, New York, 1990).
19. G. Dal Maso, P. Le Floch, and F. Murat, “Definition and Weak Stability of Nonconservative Products,” *J. Math. Pures Appl.* **74** (6), 483–548 (1995).
20. C. Parés, “Numerical Methods for Nonconservative Hyperbolic Systems: A Theoretical Framework,” *SIAM J. Numer. Anal.* **44** (1), 300–321 (2006). doi [10.1137/050628052](https://doi.org/10.1137/050628052).
21. C. Michoski, C. Dawson, E. J. Kubatko, et al., “A Comparison of Artificial Viscosity, Limiters, and Filters, for High Order Discontinuous Galerkin Solutions in Nonlinear Settings,” *J. Sci. Comput.* **66** (1), 406–434 (2016). doi [10.1007/s10915-015-0027-2](https://doi.org/10.1007/s10915-015-0027-2).
22. P.-O. Persson and J. Peraire, “Sub-Cell Shock Capturing for Discontinuous Galerkin Methods,” in *Proc. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, USA, January 9–12, 2006*. doi [10.2514/6.2006-112](https://doi.org/10.2514/6.2006-112).
23. R. C. Moura, R. C. Affonso, A. F. de Castro da Silva, and M. A. Ortega, “Diffusion-Based Limiters for Discontinuous Galerkin Methods – Part I: One-Dimensional Equations,” in *Proc. 22nd Int. Congress of Mechanical Engineering, Ribeirão Preto, Brazil, November 3–7, 2013*. https://www.researchgate.net/publication/270273162_Diffusion-Based_Limiters_for_Discontinuous_Galerkin_Methods_-_Part_I_One-Dimensional_Equations/link/54a40bc10cf267bdb9066b22/download. Cited April 9, 2023.
24. L. Krivodonova, “Limiters for High-Order Discontinuous Galerkin Methods,” *J. Comput. Phys.* **226** (1), 879–896 (2007). doi [10.1016/j.jcp.2007.05.011](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.05.011).
25. V. A. Balashov, E. B. Savenkov, and B. N. Chetverushkin, “DIMP-HYDRO Solver for Direct Numerical Simulation of Fluid Microflows within Pore Space of Core Sample,” *Mat. Model.* **31** (7), 21–44 (2019) [*Math. Models Comput. Simul.* **12** (2), 110–124 (2020)]. doi [10.1134/S2070048220020027](https://doi.org/10.1134/S2070048220020027).

Received
March 3, 2023

Accepted for publication
March 13, 2023

Information about the author

Mikhail V. Alekseev — Junior Scientist; Keldysh Institute of Applied Mathematics, Miusskaya ploshchad' 4, 125047, Moscow, Russia.