2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

doi 10.26089/NumMet.v24r319

УДК 519.85;
517.912

Об одном критерии выразимости функций системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему

Д. Н. Баротов
Финансовый университет при Правительстве РФ,
департамент анализа данных и машинного обучения,
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-5047-7710, e-mail: DNBarotov@fa.ru

Р. Н. Баротов
Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова,
кафедра математического анализа имени профессора А. Мухсинова,
Худжанд, Таджикистан
ORCID: 0000-0003-3729-6143, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru

Аннотация: Исследуется задача выразимости всех функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, входящих в заданную однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $x'(t) = A \cdot x(t)$, в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему. Найден простой критерий выразимости всех функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных $x_k(t)$ и доказана его корректность. На основе доказанного критерия разработан соответствующий алгоритм и обоснована его корректность.

Ключевые слова: однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высокого порядка, критерий выразимости, алгоритм.

Для цитирования: Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. Об одном критерии выразимости функций системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему // Вычислительные методы и программирование. 2023. **24**, № 3. 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319.

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

On one criterion of expressibility of functions of a system of linear differential equations with constant coefficients in the form of linear combinations of derivatives of one function included in this system

Dostonjon N. Barotov
Financial University under the Government of the Russian Federation,
Department of Data Analysis and Machine Learning,
Moscow, Russia
ORCID: 0000-0001-5047-7710, e-mail: DNBarotov@fa.ru

Ruziboy N. Barotov
Khujand state university named after academician Bobojon Gafurov,
Department of Mathematical Analysis named after Professor A. Mukhsinov,
Khujand, Tajikistan
ORCID: 0000-0003-3729-6143, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru

Abstract: In this paper, we study the problem of expressibility of all functions $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ included in a given homogeneous system of linear differential equations with constant coefficients $x'(t) = A \cdot x(t)$, in the form of linear combinations of derivatives of only one unknown function $x_k(t)$ included in this system. A simple criterion is found for the expressibility of all functions of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$, in the form of linear combinations of derivatives $x_k(t)$, and its correctness is proved. Based on the proven criterion, an appropriate algorithm was developed and its correctness was substantiated.

Keywords: homogeneous system of linear differential equations with constant coefficients, method for reducing a system of linear equations to a single higher-order equation, expressibility criterion, algorithm.

For citation: D. N. Barotov and R. N. Barotov, “On one criterion of expressibility of functions of a system of linear differential equations with constant coefficients in the form of linear combinations of derivatives of one function included in this system,” Numerical Methods and Programming. **24** (3), 260–274 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r319.

1. Введение. Теория дифференциальных уравнений в настоящее время представляет собой исключительно богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с ее приложениями [1]. Системы линейных и нелинейных дифференциальных уравнений применяются для описания многих закономерностей реального мира, они являются мощным инструментом исследования физических, химических, геологических, экономических и других процессов [2]. При изучении конкретных дифференциальных уравнений, которые возникают при решении задач естествознания, создаются методы, обладающие большой общностью и применяющиеся к широкому кругу математических проблем. Задачи интегрирования дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами оказали большое влияние на развитие линейной алгебры [1, 3].

К наиболее известным методам решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно отнести следующие: метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высокого порядка, метод сведения решения системы к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы системы, метод неопределенных коэффициентов [3–6] и метод матрично-алгебраических преобразований [7, 8].

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

В работах [9–14] рассмотрены еще некоторые подходы к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а именно: в [9] предложен простой подход к решению систем, который позволяет получить решение в явном виде и проанализировать его, в [10] изложен операторный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений, который является некоторым аналогом методов Крамера и Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений, в [11] рассмотрен метод интегрируемых комбинаций для систем линейных дифференциальных уравнений, в [12] приведена реализация алгоритма решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с использованием преобразования Лапласа, так как одной из актуальных проблем компьютерной алгебры является задача решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в [13, 14] на примерах системы трех дифференциальных уравнений изложен способ сведения ее к одному дифференциальному уравнению, позволяющий найти общее решение исходной системы в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции.

В данной работе рассматривается уточнение метода приведения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к одному уравнению высокого порядка, позволяющему найти общее решение исходной системы, а именно: изучается задача выразимости всех функций $x_1(t),\ x_2(t),\ \dots,\ x_n(t)$, входящих в заданную однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему. В результате исследования найден простой критерий выразимости всех функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных $x_k(t)$ и доказана его корректность. На основе доказанного критерия разработан соответствующий алгоритм и обоснована его корректность.

2. Используемые обозначения и понятия. Пусть $E(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица n-го порядка, а E_i — i-я строка матрицы $E(n)$.

Пусть $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ и $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ — вещественная матрица n-го порядка.

Пусть $\det(A - \lambda \cdot E(n)) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0)$ такой, что $|\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}| = m$ и $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$.

Пусть v_i — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_i.

Пусть $B(\lambda) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$.

Пусть $A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ — i-я строка матрицы A, $B_j(\lambda) = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ — j-й столбец матрицы $B(\lambda)$.

Пусть $B^{(i)}(\lambda) = [B_1(\lambda), B_2(\lambda), \dots, B_{i-1}(\lambda), B_{i+1}(\lambda), \dots, B_n(\lambda)]$ — матрица, полученная из матрицы $B(\lambda)$ вычеркиванием i-го столбца $B_i(\lambda)$.

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

3. Критерий выразимости всех функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему, и доказательство его корректности. Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t), \\ \ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t). \end{cases} \tag{1}$$

Систему (1) запишем в матричном виде $x'(t) = A \cdot x(t)$.

В данной работе мы исследуем такую задачу: можно ли систему (1) относительно $x_k(t)$ привести к эквивалентной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x_1(t) = d_{11}x_k(t) + d_{12}x_k'(t) + \ldots + d_{1n}x_k^{(n-1)}(t), \\ x_2(t) = d_{21}x_k(t) + d_{22}x_k'(t) + \ldots + d_{2n}x_k^{(n-1)}(t), \\ \ldots \\ x_n(t) = d_{n1}x_k(t) + d_{n2}x_k'(t) + \ldots + d_{nn}x_k^{(n-1)}(t), \end{cases} \tag{2}$$

т.е. можно ли для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ выразить все функции $x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_n(t)$, входящие в систему (1), в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему.

Теорема 1. *Систему* (1) *относительно* $x_k(t)$ *можно привести к эквивалентной системе* (2) *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang}(B(\lambda)) = \operatorname{rang}(B^{(k)}(\lambda)) = n - 1, \quad \forall \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$.

Доказательство. Достаточность. Из теоремы Гамильтона–Кэли [3] следует, что

$$\begin{aligned} &x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \ldots + a_1x'(t) + a_0x(t) = \\ &\qquad = \big(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \ldots + a_1A + a_0E(n)\big) \cdot x(t) = 0 \cdot x(t) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Действительно, непосредственно дифференцируя систему (1), легко заметить, что

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad x''(t) = A^2 \cdot x(t), \ldots, \quad x^{(n)}(t) = A^n \cdot x(t). \tag{4}$$

Из (3) следует, что $x_k(t)$ определяется выражением

$$x_k^{(n)}(t) + a_{n-1}x_k^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x_k^{(n-2)}(t) + \ldots + a_1x_k'(t) + a_0x_k(t) = 0. \tag{5}$$

Пусть $\operatorname{rang}(B(\lambda)) = \operatorname{rang}(B^{(k)}(\lambda)) = n - 1,\ \forall \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$. Тогда из (4) следует, что

$$\begin{cases} x_k(t) = E_k \cdot E(n) \cdot x(t), \\ x_k'(t) = A_k \cdot E(n) \cdot x(t), \\ x_k''(t) = A_k \cdot A \cdot x(t), \\ \ldots \\ x_k^{(n-1)}(t) = A_k \cdot A^{n-2} \cdot x(t). \end{cases} \tag{6}$$

Докажем, что $\det(M) \neq 0$, где $M = \begin{bmatrix} E_k \cdot E(n) \\ A_k \cdot E(n) \\ A_k \cdot A \\ \ldots \\ A_k \cdot A^{n-2} \end{bmatrix}$. Из $\operatorname{rang}(B(\lambda)) = n - 1,\ \forall \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ следует, что геометрическая кратность всех собственных значений равна 1, следовательно, для любого собственного значения λ_i существует ровно один соответствующий собственный вектор v_i [3]. Из $\operatorname{rang}(B(\lambda)) =$

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

$\operatorname{rang}(B^{(k)}(\lambda))$, $\forall\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ и теоремы Кронекера–Капелли [3] следует, что k-я координата всех собственных векторов (ненулевая) равна 1.

Пусть $v_i(j)$ — присоединенный вектор высоты j, соответствующий собственному значению λ_i. Собственные векторы — присоединенные векторы высоты 1, т.е. $v_i(1) = v_i$. Другими словами, векторы $v_i(j)$ определяются из следующих равенств:

$$A \cdot v_1(1) = \lambda_1 \cdot v_1(1), \quad A \cdot v_1(2) = \lambda_1 \cdot v_1(2) + v_1(1), \quad \ldots, \quad A \cdot v_1(k_1) = \lambda_1 \cdot v_1(k_1) + v_1(k_1 - 1),$$

$$A \cdot v_2(1) = \lambda_2 \cdot v_2(1), \quad A \cdot v_2(2) = \lambda_2 \cdot v_2(2) + v_2(1), \quad \ldots, \quad A \cdot v_2(k_2) = \lambda_2 \cdot v_2(k_2) + v_2(k_2 - 1),$$

$$\ldots$$

$$A \cdot v_m(1) = \lambda_m \cdot v_m(1), \quad A \cdot v_m(2) = \lambda_m \cdot v_m(2) + v_m(1), \quad \ldots, \quad A \cdot v_m(k_m) = \lambda_m \cdot v_m(k_m) + v_m(k_m - 1).$$

Пусть $V(n,n) = [v_1(1), v_1(2), \ldots, v_1(k_1), v_2(1), v_2(2), \ldots, v_2(k_2), \ldots, v_m(1), v_m(2), \ldots, v_m(k_m)]$ — матрица, составленная из координат присоединенных векторов-столбцов матрицы A.

Для доказательства того, что $\det(M) \neq 0$, достаточно показать, что $\det(M \cdot V(n,n)) \neq 0$. Прямым перемножением матриц с учетом присоединенности векторов и единичности k-й координаты всех собственных векторов показываем, что $M \cdot V(n,n) = W = [w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n]$, причем

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \lambda_1^3 \\ \ldots \\ \lambda_1^{n-3} \\ \lambda_1^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} v_{1k}(2) \\ v_{1k}(2)\lambda_1 + 1 \\ v_{1k}(2)\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \\ v_{1k}(2)\lambda_1^3 + 3\lambda_1^2 \\ \ldots \\ v_{1k}(2)\lambda_1^{n-3} + C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} \\ v_{1k}(2)\lambda_1^{n-2} + C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} \\ v_{1k}(2)\lambda_1^{n-1} + C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} v_{1k}(3) \\ v_{1k}(3)\lambda_1 + v_{1k}(2) \\ v_{1k}(3)\lambda_1^2 + v_{1k}(2)2\lambda_1 + 1 \\ v_{1k}(3)\lambda_1^3 + v_{1k}(2)3\lambda_1^2 + 3\lambda_1 \\ \ldots \\ v_{1k}(3)\lambda_1^{n-3} + v_{1k}(2)C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} + C_{n-3}^2\lambda_1^{n-5} \\ v_{1k}(3)\lambda_1^{n-2} + v_{1k}(2)C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} + C_{n-2}^2\lambda_1^{n-4} \\ v_{1k}(3)\lambda_1^{n-1} + v_{1k}(2)C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} + C_{n-1}^2\lambda_1^{n-3} \end{bmatrix},$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} v_{1k}(4) \\ v_{1k}(4)\lambda_1 + v_{1k}(3) \\ v_{1k}(4)\lambda_1^2 + v_{1k}(3)2\lambda_1 + v_{1k}(2) \\ v_{1k}(4)\lambda_1^3 + v_{1k}(3)3\lambda_1^2 + v_{1k}(2)3\lambda_1 + 1 \\ \ldots \\ v_{1k}(4)\lambda_1^{n-3} + v_{1k}(3)C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} + v_{1k}(2)C_{n-3}^2\lambda_1^{n-5} + C_{n-3}^3\lambda_1^{n-6} \\ v_{1k}(4)\lambda_1^{n-2} + v_{1k}(3)C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} + v_{1k}(2)C_{n-2}^2\lambda_1^{n-4} + C_{n-2}^3\lambda_1^{n-5} \\ v_{1k}(4)\lambda_1^{n-1} + v_{1k}(3)C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} + v_{1k}(2)C_{n-1}^2\lambda_1^{n-3} + C_{n-1}^3\lambda_1^{n-4} \end{bmatrix},$$

$\ldots$

$$w_{k_1} = \begin{bmatrix} v_{1k}(k_1) \\ v_{1k}(k_1)\lambda_1 + v_{1k}(k_1 - 1) \\ v_{1k}(k_1)\lambda_1^2 + v_{1k}(k_1 - 1)2\lambda_1 + v_{1k}(k_1 - 2) \\ v_{1k}(k_1)\lambda_1^3 + v_{1k}(k_1 - 1)3\lambda_1^2 + v_{1k}(k_1 - 2)3\lambda_1 + v_{1k}(k_1 - 3) \\ \ldots \\ v_{1k}(k_1)\lambda_1^{n-3} + v_{1k}(k_1 - 1)C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} + v_{1k}(k_1 - 2)C_{n-3}^2\lambda_1^{n-5} + \ldots + C_{n-3}^{k_1-1}\lambda_1^{n-2-k_1} \\ v_{1k}(k_1)\lambda_1^{n-2} + v_{1k}(k_1 - 1)C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} + v_{1k}(k_1 - 2)C_{n-2}^2\lambda_1^{n-4} + \ldots + C_{n-2}^{k_1-1}\lambda_1^{n-1-k_1} \\ v_{1k}(k_1)\lambda_1^{n-1} + v_{1k}(k_1 - 1)C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} + v_{1k}(k_1 - 2)C_{n-1}^2\lambda_1^{n-3} + \ldots + C_{n-1}^{k_1-1}\lambda_1^{n-k_1} \end{bmatrix},$$

$$w_{k_1+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_2^3 \\ \dots \\ \lambda_2^{n-3} \\ \lambda_2^{n-2} \\ \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}, \quad w_{k_1+2} = \begin{bmatrix} v_{2k}(2) \\ v_{2k}(2)\lambda_2 + 1 \\ v_{2k}(2)\lambda_2^2 + 2\lambda_2 \\ v_{2k}(2)\lambda_2^3 + 3\lambda_2^2 \\ \dots \\ v_{2k}(2)\lambda_2^{n-3} + C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} \\ v_{2k}(2)\lambda_2^{n-2} + C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} \\ v_{2k}(2)\lambda_2^{n-1} + C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} \end{bmatrix},$$

$$w_{k_1+3} = \begin{bmatrix} v_{2k}(3) \\ v_{2k}(3)\lambda_2 + v_{2k}(2) \\ v_{2k}(3)\lambda_2^2 + v_{2k}(2)2\lambda_2 + 1 \\ v_{2k}(3)\lambda_2^3 + v_{2k}(2)3\lambda_2^2 + 3\lambda_2 \\ \dots \\ v_{2k}(3)\lambda_2^{n-3} + v_{2k}(2)C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} + C_{n-3}^2\lambda_2^{n-5} \\ v_{2k}(3)\lambda_2^{n-2} + v_{2k}(2)C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} + C_{n-2}^2\lambda_2^{n-4} \\ v_{2k}(3)\lambda_2^{n-1} + v_{2k}(2)C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} + C_{n-1}^2\lambda_2^{n-3} \end{bmatrix},$$

$$w_{k_1+4} = \begin{bmatrix} v_{2k}(4) \\ v_{2k}(4)\lambda_2 + v_{2k}(3) \\ v_{2k}(4)\lambda_2^2 + v_{2k}(3)2\lambda_2 + v_{2k}(2) \\ v_{2k}(4)\lambda_2^3 + v_{2k}(3)3\lambda_2^2 + v_{2k}(2)3\lambda_2 + 1 \\ \dots \\ v_{2k}(4)\lambda_2^{n-3} + v_{2k}(3)C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} + v_{2k}(2)C_{n-3}^2\lambda_2^{n-5} + C_{n-3}^3\lambda_2^{n-6} \\ v_{2k}(4)\lambda_2^{n-2} + v_{2k}(3)C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} + v_{2k}(2)C_{n-2}^2\lambda_2^{n-4} + C_{n-2}^3\lambda_2^{n-5} \\ v_{2k}(4)\lambda_2^{n-1} + v_{2k}(3)C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} + v_{2k}(2)C_{n-1}^2\lambda_2^{n-3} + C_{n-1}^3\lambda_2^{n-4} \end{bmatrix},$$

$\dots$

$$w_{k_1+k_2} = \begin{bmatrix} v_{2k}(k_2) \\ v_{2k}(k_2)\lambda_2 + v_{2k}(k_2-1) \\ v_{2k}(k_2)\lambda_2^2 + v_{2k}(k_2-1)2\lambda_2 + v_{2k}(k_2-2) \\ v_{2k}(k_2)\lambda_2^3 + v_{2k}(k_2-1)3\lambda_2^2 + v_{2k}(k_2-2)3\lambda_2 + v_{2k}(k_2-3) \\ \dots \\ v_{2k}(k_2)\lambda_2^{n-3} + v_{2k}(k_2-1)C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} + v_{2k}(k_2-2)C_{n-3}^2\lambda_2^{n-5} + \ldots + C_{n-3}^{k_2-1}\lambda_2^{n-2-k_2} \\ v_{2k}(k_2)\lambda_2^{n-2} + v_{2k}(k_2-1)C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} + v_{2k}(k_2-2)C_{n-2}^2\lambda_2^{n-4} + \ldots + C_{n-2}^{k_2-1}\lambda_2^{n-1-k_2} \\ v_{2k}(k_2)\lambda_2^{n-1} + v_{2k}(k_2-1)C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} + v_{2k}(k_2-2)C_{n-1}^2\lambda_2^{n-3} + \ldots + C_{n-1}^{k_2-1}\lambda_2^{n-k_2} \end{bmatrix},$$

$\dots$

$$w_{k_1+k_2+\ldots+k_{m-1}+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_m \\ \lambda_m^2 \\ \lambda_m^3 \\ \dots \\ \lambda_m^{n-3} \\ \lambda_m^{n-2} \\ \lambda_m^{n-1} \end{bmatrix}, \quad w_{k_1+k_2+\ldots+k_{m-1}+2} = \begin{bmatrix} v_{mk}(2) \\ v_{mk}(2)\lambda_m + 1 \\ v_{mk}(2)\lambda_m^2 + 2\lambda_m \\ v_{mk}(2)\lambda_m^3 + 3\lambda_m^2 \\ \dots \\ v_{mk}(2)\lambda_m^{n-3} + C_{n-3}^1\lambda_m^{n-4} \\ v_{mk}(2)\lambda_m^{n-2} + C_{n-2}^1\lambda_m^{n-3} \\ v_{mk}(2)\lambda_m^{n-1} + C_{n-1}^1\lambda_m^{n-2} \end{bmatrix},$$

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

$$w_{k_1+k_2+\ldots+k_{m-1}+3} = \begin{bmatrix} v_{mk}(3) \\ v_{mk}(3)\lambda_m + v_{mk}(2) \\ v_{mk}(3)\lambda_m^2 + v_{mk}(2)2\lambda_m + 1 \\ v_{mk}(3)\lambda_m^3 + v_{mk}(2)3\lambda_m^2 + 3\lambda_m \\ \ldots \\ v_{mk}(3)\lambda_m^{n-3} + v_{mk}(2)C_{n-3}^1\lambda_m^{n-4} + C_{n-3}^2\lambda_m^{n-5} \\ v_{mk}(3)\lambda_m^{n-2} + v_{mk}(2)C_{n-2}^1\lambda_m^{n-3} + C_{n-2}^2\lambda_m^{n-4} \\ v_{mk}(3)\lambda_m^{n-1} + v_{mk}(2)C_{n-1}^1\lambda_m^{n-2} + C_{n-1}^2\lambda_m^{n-3} \end{bmatrix},$$

$$w_{k_1+k_2+\ldots+k_{m-1}+4} = \begin{bmatrix} v_{mk}(4) \\ v_{mk}(4)\lambda_m + v_{mk}(3) \\ v_{mk}(4)\lambda_m^2 + v_{mk}(3)2\lambda_m + v_{mk}(2) \\ v_{mk}(4)\lambda_m^3 + v_{mk}(3)3\lambda_m^2 + v_{mk}(2)3\lambda_m + 1 \\ \ldots \\ v_{mk}(4)\lambda_m^{n-3} + v_{mk}(3)C_{n-3}^1\lambda_m^{n-4} + v_{mk}(2)C_{n-3}^2\lambda_m^{n-5} + C_{n-3}^3\lambda_m^{n-6} \\ v_{mk}(4)\lambda_m^{n-2} + v_{mk}(3)C_{n-2}^1\lambda_m^{n-3} + v_{mk}(2)C_{n-2}^2\lambda_m^{n-4} + C_{n-2}^3\lambda_m^{n-5} \\ v_{mk}(4)\lambda_m^{n-1} + v_{mk}(3)C_{n-1}^1\lambda_m^{n-2} + v_{mk}(2)C_{n-1}^2\lambda_m^{n-3} + C_{n-1}^3\lambda_m^{n-4} \end{bmatrix},$$

$\ldots$

$$w_n = \begin{bmatrix} v_{mk}(k_m) \\ v_{mk}(k_m)\lambda_m + v_{mk}(k_m-1) \\ v_{mk}(k_m)\lambda_m^2 + v_{mk}(k_m-1)2\lambda_m + v_{mk}(k_m-2) \\ v_{mk}(k_m)\lambda_m^3 + v_{mk}(k_m-1)3\lambda_m^2 + v_{mk}(k_m-2)3\lambda_m + v_{mk}(k_m-3) \\ \ldots \\ v_{mk}(k_m)\lambda_m^{n-3} + v_{mk}(k_m-1)C_{n-3}^1\lambda_m^{n-4} + v_{mk}(k_m-2)C_{n-3}^2\lambda_m^{n-5} + \ldots + C_{n-3}^{k_m-1}\lambda_m^{n-2-k_m} \\ v_{mk}(k_m)\lambda_m^{n-2} + v_{mk}(k_m-1)C_{n-2}^1\lambda_m^{n-3} + v_{mk}(k_m-2)C_{n-2}^2\lambda_m^{n-4} + \ldots + C_{n-2}^{k_m-1}\lambda_m^{n-1-k_m} \\ v_{mk}(k_m)\lambda_m^{n-1} + v_{mk}(k_m-1)C_{n-1}^1\lambda_m^{n-2} + v_{mk}(k_m-2)C_{n-1}^2\lambda_m^{n-3} + \ldots + C_{n-1}^{k_m-1}\lambda_m^{n-k_m} \end{bmatrix}$$

где $v_{ik}(j)$ — k-я координата вектора $v_i(j)$. Действительно, для этого методом математической индукции достаточно доказать, что $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и $\forall j \in \{1, 2, \ldots, k_i\}$ верно следующее равенство:

$$A^p \cdot v_i(j) = \lambda_i^p \cdot v_i(j) + C_p^1\lambda_i^{p-1} \cdot v_i(j-1) + C_p^2\lambda_i^{p-2} \cdot v_i(j-2) + \ldots +$$
$$+ C_p^{j-2}\lambda_i^{p-j+2} \cdot v_i(2) + C_p^{j-1}\lambda_i^{p-j+1} \cdot v_i(1) = \sum_{q=0}^{j-1} C_p^q\lambda_i^{p-q} \cdot v_i(j-q). \qquad (7)$$

Пусть $p = 1$, тогда

$$A \cdot v_i(j) = \lambda_i \cdot v_i(j) + v_i(j-1) = \sum_{q=0}^{j-1} C_1^q\lambda_i^{1-q} \cdot v_i(j-q).$$

Пусть $p = 2$, тогда

$$A^2 \cdot v_i(j) = A \cdot (\lambda_i \cdot v_i(j) + v_i(j-1)) = \lambda_i \cdot A \cdot v_i(j) + A \cdot v_i(j-1) =$$
$$= \lambda_i(\lambda_i \cdot v_i(j) + v_i(j-1)) + \lambda_i \cdot v_i(j-1) + v_i(j-2) = \sum_{q=0}^{j-1} C_2^q\lambda_i^{2-q} \cdot v_i(j-q).$$

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

Пусть при $p = s$

$$A^s \cdot v_i(j) = \sum_{q=0}^{j-1} C_s^q \lambda_i^{s-q} \cdot v_i(j-q).$$

Умножив это равенство слева на A, получим:

$$A \cdot (A^s \cdot v_i(j)) = A^{s+1} \cdot v_i(j) = A \cdot \left[\sum_{q=0}^{j-1} C_s^q \lambda_i^{s-q} \cdot v_i(j-q) \right] = \sum_{q=0}^{j-1} C_s^q \lambda_i^{s-q} \cdot A \cdot v_i(j-q) =$$

$$= C_s^0 \lambda_i^{s-0} \cdot (\lambda_i \cdot v_i(j) + v_i(j-1)) + C_s^1 \lambda_i^{s-1} \cdot (\lambda_i \cdot v_i(j-1) + v_i(j-2)) +$$

$$+ C_s^2 \lambda_i^{s-2} \cdot (\lambda_i \cdot v_i(j-2) + v_i(j-3)) + \ldots + C_s^{j-1} \lambda_i^{s-j+1} \cdot (\lambda_i \cdot v_i(1)) =$$

$$= \lambda_i^{s+1} v_i(j) + (C_s^0 + C_s^1) \cdot \lambda_i^s v_i(j-1) + (C_s^1 + C_s^2) \cdot \lambda_i^{s-1} v_i(j-2) + (C_s^2 + C_s^3) \cdot \lambda_i^{s-2} v_i(j-3) + \ldots +$$

$$+ (C_s^{j-2} + C_s^{j-1}) \cdot \lambda_i^{s-j+2} v_i(1) = \sum_{q=0}^{j-1} C_{s+1}^q \lambda_i^{s+1-q} \cdot v_i(j-q),$$

откуда следует, что (7) доказано.

Упростим коэффициенты λ_1 в детерминанте $\det(M \cdot V(n,n))$, а именно:

- первый столбец умножаем на $-v_{1k}(2)$ и прибавляем ко второму столбцу, умножаем на $-v_{1k}(3)$ и прибавляем к третьему столбцу, ..., умножаем на $-v_{1k}(k_1)$ и прибавляем к k_1-му столбцу;
- после этого второй столбец умножаем на $-v_{1k}(2)$ и прибавляем к третьему столбцу, умножаем на $-v_{1k}(3)$ и прибавляем к четвертому столбцу, ..., умножаем на $-v_{1k}(k_1 - 1)$ и прибавляем к k_1-му столбцу;
- после этого третий столбец умножаем на $-v_{1k}(2)$ и прибавляем к четвертому столбцу, умножаем на $-v_{1k}(3)$ и прибавляем к пятому столбцу, ..., умножаем на $-v_{1k}(k_1 - 2)$ и прибавляем к k_1-му столбцу;

  ...
- после этого $(k_1 - 1)$-й столбец умножаем на $-v_{1k}(2)$ и прибавляем к k_1-му столбцу.

В результате получаем $\det(M \cdot V(n,n)) = \det(W')$, где $W' = [w'_1, w'_2, \ldots, w'_{k_1}, w_{k_1+1}, w_{k_1+2}, \ldots, w_n]$, причем

$$w'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \lambda_1^3 \\ \ldots \\ \lambda_1^{n-3} \\ \lambda_1^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}, \quad w'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1^2 \\ \ldots \\ C_{n-3}^1 \lambda_1^{n-4} \\ C_{n-2}^1 \lambda_1^{n-3} \\ C_{n-1}^1 \lambda_1^{n-2} \end{bmatrix}, \quad w'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3\lambda_1 \\ \ldots \\ C_{n-3}^2 \lambda_1^{n-5} \\ C_{n-2}^2 \lambda_1^{n-4} \\ C_{n-1}^2 \lambda_1^{n-3} \end{bmatrix}, \ldots, \quad w'_{k_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ C_{n-3}^{k_1-1} \lambda_1^{n-2-k_1} \\ C_{n-2}^{k_1-1} \lambda_1^{n-1-k_1} \\ C_{n-1}^{k_1-1} \lambda_1^{n-k_1} \end{bmatrix},$$

остальные столбцы матрицы W' совпадают со столбцами матрицы W, т.е. j-й столбец матрицы W' равен

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

j-му столбцу матрицы W, $\forall j \in \{k_1+1, k_1+2, \ldots, n\}$. Если аналогично упростим коэффициенты других собственных значений, то получим, что $\det(M \cdot V(n,n))$ равен $\det(V_c^T)$, где

$$V_c = \begin{bmatrix}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \ldots & \lambda_1^{n-3} & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\
0 & 1 & C_2^1\lambda_1 & C_3^1\lambda_1^2 & \ldots & C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} & C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} & C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} \\
0 & 0 & 1 & C_3^2\lambda_1 & \ldots & C_{n-3}^2\lambda_1^{n-5} & C_{n-2}^2\lambda_1^{n-4} & C_{n-1}^2\lambda_1^{n-3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & C_{n-3}^3\lambda_1^{n-6} & C_{n-2}^3\lambda_1^{n-5} & C_{n-1}^3\lambda_1^{n-4} \\
\vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_{n-3}^{k_1-1}\lambda_1^{n-2-k_1} & C_{n-2}^{k_1-1}\lambda_1^{n-1-k_1} & C_{n-1}^{k_1-1}\lambda_1^{n-k_1} \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \ldots & \lambda_2^{n-3} & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\
0 & 1 & C_2^1\lambda_2 & C_3^1\lambda_2^2 & \ldots & C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} & C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} & C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} \\
0 & 0 & 1 & C_3^2\lambda_2 & \ldots & C_{n-3}^2\lambda_2^{n-5} & C_{n-2}^2\lambda_2^{n-4} & C_{n-1}^2\lambda_2^{n-3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & C_{n-3}^3\lambda_2^{n-6} & C_{n-2}^3\lambda_2^{n-5} & C_{n-1}^3\lambda_2^{n-4} \\
\vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_{n-3}^{k_2-1}\lambda_2^{n-2-k_2} & C_{n-2}^{k_2-1}\lambda_2^{n-1-k_2} & C_{n-1}^{k_2-1}\lambda_2^{n-k_2} \\
\vdots \\
\ldots \\
\vdots \\
1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \ldots & \lambda_m^{n-3} & \lambda_m^{n-2} & \lambda_m^{n-1} \\
0 & 1 & C_2^1\lambda_m & C_3^1\lambda_m^2 & \ldots & C_{n-3}^1\lambda_m^{n-4} & C_{n-2}^1\lambda_m^{n-3} & C_{n-1}^1\lambda_m^{n-2} \\
0 & 0 & 1 & C_3^2\lambda_m & \ldots & C_{n-3}^2\lambda_m^{n-5} & C_{n-2}^2\lambda_m^{n-4} & C_{n-1}^2\lambda_m^{n-3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & C_{n-3}^3\lambda_m^{n-6} & C_{n-2}^3\lambda_m^{n-5} & C_{n-1}^3\lambda_m^{n-4} \\
\vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_{n-3}^{k_m-1}\lambda_m^{n-2-k_m} & C_{n-2}^{k_m-1}\lambda_m^{n-1-k_m} & C_{n-1}^{k_m-1}\lambda_m^{n-k_m}
\end{bmatrix},$$

а матрица V_c^T — транспонированная матрица для матрицы V_c.

В работе [15] доказано, что

$$\det(V_c) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\lambda_j - \lambda_i)^{k_i k_j}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что $\det(M) \neq 0$, так как $M, V(n,n)$ — квадратные матрицы n-го порядка и, следовательно, $\det(M \cdot V(n,n)) = \det(M) \cdot \det(V(n,n))$. Теперь из (6) следует, что

$$x(t) = M^{-1} x_{(k)}(t), \qquad x_{(k)}(t) = \begin{bmatrix} x_k(t) \\ x_k'(t) \\ x_k''(t) \\ \ldots \\ x_k^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что удалось выразить все функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, входящие в систему (1), в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему.

Таким образом, доказано, что равенства (5) и (9) следуют из системы (1). Теперь докажем, что верно и обратное, т.е. из (5) и (9) следует (1).

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

Для этого достаточно показать следующее: $i)$ $A = M^{-1}\cdot F\cdot M$ и $ii)$ $x'_{(k)}(t) = F\cdot x_{(k)}(t)$.

$i)$ С одной стороны, известно [3], что $A = V(n,n)\cdot J(n,n)\cdot V(n,n)^{-1}$, где

$J(n,n) = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_{k_3}(\lambda_3) & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{k_m}(\lambda_m) \end{bmatrix}$ — матрица жордановых блоков, а блочная матрица порядка k_j определяется следующим образом: $J_{k_j}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix}$, $\forall j \in \{1,2,\dots,m\}$.

С другой стороны, непосредственно умножая матрицы, легко видеть, что $F\cdot W = W\cdot J(n,n) = W^*$, где W^* — матрица, i-я строка которой равна $(i+1)$-й строке матрицы W, а

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \text{ — матрица Фробениуса.}$$

Теперь из последних двух матричных равенств имеем:

$$\begin{aligned} W\cdot J(n,n) = F\cdot W \Longrightarrow J(n,n)\cdot W^{-1} = W^{-1}\cdot F \Longrightarrow V(n,n)^{-1}\cdot A\cdot V(n,n)\cdot W^{-1} = W^{-1}\cdot F \\ \Longrightarrow A\cdot V(n,n)\cdot W^{-1} = V(n,n)\cdot W^{-1}\cdot F \Longrightarrow A\cdot M^{-1} = M^{-1}\cdot F \Longrightarrow A = M^{-1}\cdot F\cdot M. \end{aligned}$$

$ii)$. Проверяется непосредственно, т.е.

$$x'_{(k)}(t) = \begin{bmatrix} x'_k(t) \\ x''_k(t) \\ x'''_k(t) \\ \dots \\ x^{(n)}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_k(t) \\ x''_k(t) \\ x'''_k(t) \\ \dots \\ -a_{n-1}x^{(n-1)}_k(t) - a_{n-2}x^{(n-2)}_k(t) - \dots - a_1x'_k(t) - a_0x_k(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k(t) \\ x'_k(t) \\ x''_k(t) \\ \dots \\ x^{(n-1)}_k(t) \end{bmatrix} = F\cdot x_{(k)}(t).$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть неверно, что $\operatorname{rang}(B(\lambda)) = \operatorname{rang}(B^{(k)}(\lambda)) = n-1, \forall\lambda \in \{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\}$. Тогда $\exists r \in \{1,2,\dots,m\}$, для которого либо a) $\operatorname{rang}(B(\lambda_r)) \neq \operatorname{rang}(B^{(k)}(\lambda_r))$, либо b) $\operatorname{rang}(B(\lambda_r)) \neq n-1$.

Пусть $V'(n,n) = [v_{\lambda_1}(1),\dots,v_{\lambda_1}(l_1),v_{\lambda_1}(l_1+1),\dots,v_{\lambda_1}(k_1),\dots,v_{\lambda_m}(1),\dots,v_{\lambda_m}(l_m),v_{\lambda_m}(l_m+1),\dots,$ $v_{\lambda_m}(k_m)]$ — матрица, составленная из координат собственных и присоединенных векторов-столбцов матрицы A, где

$$v_{\lambda_i}(j) = \begin{cases} \text{собственный вектор, соответствующий } \lambda_i, \text{ если } j \in \{1,2,\ \dots\ ,l_i\}, \\ \text{присоединенный вектор, соответствующий } \lambda_i, \text{ если } j \in \{l_i+1,\ \dots\ ,k_i\}. \end{cases}$$

Известно [3], что $\det(V'(n,n)) \neq 0$.

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

a) Если $\operatorname{rang}(B(\lambda_r)) \neq \operatorname{rang}(B^{(k)}(\lambda_r))$, то из теоремы Кронекера–Капелли следует, что k-я координата собственного вектора v_r, соответствующего собственному значению λ_r, равна 0, так как система $B(\lambda_r)\cdot v = 0$ имеет решение v_r, k-я координата которого отлична от нуля тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang}(B(\lambda_r)) = \operatorname{rang}(B^{(k)}(\lambda_r))$. В этом случае покажем, что $\det(M) = 0$. Для этого достаточно показать, что $\det(M \cdot V'(n,n)) = 0$. Последнее справедливо, так как $(k_1 + k_2 + \ldots + k_{r-1} + 1)$-й столбец матрицы $M \cdot V'(n,n)$ равен $M \cdot v_r = 0$.

b) Если $\operatorname{rang}(B(\lambda_r)) \neq n-1$, то $l_r \geqslant 2$, т.е. количество собственных векторов-столбцов матрицы A, соответствующих собственному значению λ_r, больше или равно 2. В этом случае тоже покажем, что $\det(M) = 0$. Для этого достаточно показать, что $\det(M \cdot V'(n,n)) = 0$. Последнее справедливо, так как $(k_1+k_2+\ldots+k_{r-1}+1)$-й и $(k_1+k_2+\ldots+k_{r-1}+2)$-й столбцы матрицы $M \cdot V'(n,n)$ одинаковы. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если систему* (1) *относительно* $x_k(t)$ *можно привести к эквивалентной системе* (2), *то все функции* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ *системы* (1) *периодические тогда и только тогда, когда функция* $x_k(t)$ *периодическая.*

Следствие 2. *Систему* (1) *относительно* $x_k(t)$ *можно привести к эквивалентной системе* (2) *тогда и только тогда, когда геометрическая кратность всех собственных значений равна* 1 *и* k*-я координата всех собственных векторов матрицы* A *отлична от нуля.*

На основе доказательства теоремы 1 легко разработать алгоритм, который находит множество функций, относительно каждой из которых система (1) может быть сведена к эквивалентной системе (2).

Алгоритм 1. Функция SoV для нахождения множества функций, относительно каждой из которых система (1) может быть сведена к эквивалентной системе (2)

Algorithm 1. Function SoV for finding the set of functions, with respect to each of which the system (1) can be reduced to the equivalent system (2)

function $SoV(A, \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\})$
  $SoV := \varnothing$
  $B(\lambda) := A - \lambda \cdot E(n)$
  for $k = 1 \ldots n$ **do**
    $B(\lambda, k) := B^{(k)}(\lambda)$
    $chek := 1$
    for $i = 1 \ldots m$ **do**
      if $|\operatorname{rang}(B(\lambda_i) - \operatorname{rang}(B(\lambda_i, k)))| + |\operatorname{rang}(B(\lambda_i) - n + 1| \neq 0$
        $chek := 0$
        break
      end if
    end for
    if $chek = 1$
      $SoV := SoV \cup \{x_k(t)\}$
    end if
  end for
  return SoV
end function

Корректность алгоритма 1 следует непосредственно из доказанной теоремы 1.

4. Применение. Рассмотрим конкретную однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad \text{где} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Находим характеристический многочлен матрицы A:

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E(5)) = -\lambda^5 - 2 \cdot \lambda - 2.$$

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

Известно [16, 17], что корни характеристического уравнения $\chi(\lambda) = 0$ нельзя выразить в радикалах, т.е. точно их найти невозможно.

Одно из приложений полученного результата заключается в том, что, несмотря на то что не известны точные значения корней характеристического уравнения, конструктивно докажем, что функции $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)$ могут быть выражены в виде линейных комбинаций производных функции $x_5(t)$, а сама функция $x_5(t)$ будет удовлетворять одному скалярному уравнению, для которого разработан метод решения, не требующий нахождения корней характеристического уравнения.

Покажем, что $\mathrm{rang}(B(\lambda)) = \mathrm{rang}(B^{(5)}(\lambda)) = 4, \quad \forall\lambda \in \{\lambda : \det(A - \lambda \cdot E(5)) = 0\}$. Действительно, пусть λ — любой элемент множества $\{\lambda : \det(A - \lambda \cdot E(5)) = 0\}$. Тогда

$$\mathrm{rang}(B(\lambda)) = \mathrm{rang}(A - \lambda \cdot E(5)) = \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -\lambda & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -\lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -1 & -\lambda & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda+2 & 4\lambda+4 & 2\lambda+2 \\ 0 & 0 & -3 & -\lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -1 & -\lambda & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+2 & 4\lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda^2+2\lambda+2 \\ 0 & 0 & -3 & -\lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -1 & -\lambda & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -\lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4\lambda-1 & -3\lambda-2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+4 & 2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+2 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -1 & -\lambda & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -\lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4\lambda-1 & -3\lambda-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\lambda^5+6\lambda+6 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -1 & -\lambda & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -\lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4\lambda-1 & -3\lambda-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 = \mathrm{rang}(B^{(5)}(\lambda)) = \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -1 & -\lambda & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -\lambda-4 \\ 0 & 0 & 0 & -4\lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2023, **24** (3), 260–274. doi 10.26089/NumMet.v24r319

Теперь в силу теоремы 1, на основе равенства (9), система (10) относительно $x_5(t)$ может быть сведена к эквивалентной системе

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{307} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 & -24 & 96 & -77 \\ -6 & 18 & -72 & -19 & 76 \\ -26 & 78 & -5 & 20 & -80 \\ -102 & -1 & 4 & -16 & 64 \\ 307 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_5(t) \\ x_5'(t) \\ x_5''(t) \\ x_5'''(t) \\ x_5^{(4)}(t) \end{bmatrix},$$

где функция $x_5(t)$ удовлетворяет уравнению

$$-x_5^{(5)}(t) - 2 \cdot x_5'(t) - 2 \cdot x_5(t) = 0, \tag{11}$$

а решение уравнения (11) может быть найдено методом, предложенным в [18], который не требует нахождения корней характеристического уравнения.

5. Заключение. В исследовании получен и теоретически обоснован важный результат, позволяющий в некоторых случаях заменять систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами одним уравнением высокого порядка. Фактически получены условия, при которых прямое преобразование (одного ОДУ высокого порядка в систему ОДУ первого порядка) и обратное преобразование (системы ОДУ первого порядка в одно ОДУ высокого порядка) приводят к одному и тому же решению задачи Коши.

Список литературы

1. *Олейник О.А.* Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 4. 114–121.
2. *Калинин В.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Рос. гос. унив. нефти и газа имени И.М. Губкина, 2017.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
4. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум. М.: Инфра-М, 2016.
5. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.
6. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.
7. *Мухамеджанова У.М.* Жорданова форма матрицы и решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. 2017. № 1. 20–26. `https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29217659`. Дата обращения 27 июня 2023.
8. *Балоев А.А.* Матрично-алгебраическая форма решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. **17**, № 3. 3–12. `https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21956533`. Дата обращения 27 июня 2023.
9. *Щитов И.Н., Бегун Е.Н.* Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Актуальные проблемы радио- и кинотехнологий: Материалы VI Международной научно-технической конференции, посвященной 125-летию со дня рождения выдающегося русского ученого в области электроники и вакуумной техники С.А. Векшинского, 16–17 ноября 2021 г., Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный институт кино и телевидения, 2022. 172–176. `https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49540472`. Дата обращения 27 июня 2023.
10. *Малышев Ю.В., Атаманов П.С.* О решении системы линейных дифференциальных уравнений операторным методом // Вестник Чувашского университета. 2011. № 3. 155–159. `https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16771870`. Дата обращения 27 июня 2023.
11. *Ивлев В.В., Кривошей Е.А.* Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение) // Математическое образование. 2018. № 1. 47–51. `https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32834675`. Дата обращения 27 июня 2023.
12. *Рыбаков М.А.* Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа // Вестник Тамбов. гос. унив. 2009. **14**, № 4. 791–792. `https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13035501`. Дата обращения 27 июня 2023.

13. *Назимов А.Б., Очилова М.А.* О приведении системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к одному дифференциальному уравнению высокого порядка // Современные проблемы и перспективы обучения математике, физике, информатике в школе и вузе: Межвузовский сборник научно-методических трудов. Вологда: Вологодский гос. унив., 2021. 41–47. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44908296. Дата обращения 27 июня 2023.
14. *Подгаев А.Г., Син А.З.* Простой способ обоснования метода исключения при решении нормальной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Ученые заметки ТОГУ. 2014. **5**, № 4. 1357–1363. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22674856. Дата обращения 27 июня 2023.
15. *Ha T.T., Gibson J.A.* A note on the determinant of a functional confluent Vandermonde matrix and controllability // Linear Algebra and its Applications. 1980. **30**. 69–75. doi 10.1016/0024-3795(80)90182-2.
16. *Антонов Ю.С.* К истории решения уравнений третьей и четвертой степеней // Наука и техника в Якутии. 2015. № 2. 108–110. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37030535. Дата обращения 27 июня 2023.
17. *Постников М.М.* Теория Галуа. М.: Физматгиз, 1963.
18. *Карачик В.В.* Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. **52**, № 2. 237–252. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17353059. Дата обращения 27 июня 2023.

Поступила в редакцию
17 апреля 2023 г.

Принята к публикации
18 мая 2023 г.

Информация об авторах

Достонжон Нумонжонович Баротов — старший преподаватель; Финансовый университет при Правительстве РФ, департамент анализа данных и машинного обучения, 4-й Вешняковский проезд, д. 4, 109456, Москва, Российская Федерация.

Рузибой Нумонжонович Баротов — докторант; Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова, кафедра математического анализа имени профессора А. Мухсинова, пр. Мавлонбекова, д. 1, 735700, Худжанд, Таджикистан.

References

1. O. A. Oleinik, "The Role of the Theory of Differential Equations in Modern Mathematics and Its Applications," Soros Educational Journal, No. 4, 114–121 (1996).
2. V. V. Kalinin, *Ordinary Differential Equations* (Gubkin Univ. Press, Moscow, 2017) [in Russian].
3. F. R. Gantmakher, *The Theory of Matrices* (Nauka, Moscow, 1967; Chelsea, New York, 1959).
4. A. V. Panteleev, A. S. Yakimova, and K. A. Rybakov, *Ordinary Differential Equations. Practical Course* (INFRA-M, Moscow, 2016) [in Russian].
5. L. S. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations* (Fizmatgiz, Moscow, 1961; Addison-Wesley, Reading, 1962).
6. A. F. Filippov, *Collection of Problems on Differential Equations* (Fizmatgiz, Moscow, 1961) [in Russian].
7. O. M. Muhamedjonova, "Jordan Matrix Form and Solutions of Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients," Uchen. Zap. Khujand State Univ. Named after Academician B. Gafurov. Series: Natural and Economic Sci. No. 1, 20–26 (2017). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29217659. Cited June 27, 2023.
8. A. A. Baloev, "The Matrix-Algebraic Form of a Solution to the System of Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients," Sib. Zh. Ind. Mat. **17** (3), 3–12 (2014). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21956533. Cited June 27, 2023.
9. I. N. Shchitov and E. N. Begun, "On One Method for Solving Systems of Linear Differential Equations with Constant Coefficients," in *Proc. Int. Conf. on Actual Problems of Radio and Film Technologies, St. Petersburg, Russia, November 16–17, 2021.* https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49540472. Cited June 27, 2023.
10. Yu. V. Malyshev and P. S. Atamanov, "About Solution of the System of Linear Differential Equations by Symbolic Methods," Vestn. Chuvash Univ., No. 3, 155–159 (2011). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16771870. Cited June 27, 2023.

11. V. V. Ivlev and E. A. Krivoshey, "Systems of Linear Differential Equations. Integrable Combinations (Continued)," Math. Educ., No. 1, 47–51 (2018). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32834675. Cited June 27, 2023.
12. M. A. Rybakov, "Solving Systems of Linear Differential Equations with Constant Coefficients by Means of Laplace Transformation," Vestn. Tambov State Univ. **14** (4), 791–792 (2009). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13035501. Cited June 27, 2023.
13. A. B. Nazimov and M. A. Ochilova, "On the Reduction of a System of Linear Differential Equations with Constant Coefficients to a Single High-Order Differential Equation," in *Modern Problems and Prospects for Teaching Mathematics, Physics, and Computer Science at School and University* (Vologda State University, Vologda, 2021), pp. 41–47. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44908296. Cited June 27, 2023.
14. A. G. Podgaev and A. Z. Sin, "Simple Proof of Elimination Method under the Solution of Normal Linear System of Differential Equations with Constant Coefficients," Uchen. Zap. Pacific National Univ. **5** (4), 1357–1363 (2014). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22674856. Cited June 27, 2023.
15. T. T. Ha and J. A. Gibson, "A Note on the Determinant of a Functional Confluent Vandermonde Matrix and Controllability," Linear Algebra Appl. **30**, 69–75 (1980). doi 10.1016/0024-3795(80)90182-2.
16. Yu. S. Antonov, "On the History of Solving Third and Fourth Degree Equations," Sci. Technol. Yakutia, No. 2, 108–110 (2015). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37030535. Cited June 27, 2023.
17. M. M. Postnikov, *Galois Theory* (Fizmatgiz, Moscow, 1963) [in Russian].
18. V. V. Karachik, "Method for Constructing Solutions of Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **52** (2), 237–252 (2012) [Comput. Math. Math. Phys. **52** (2), 219–234 (2012)]. doi 10.1134/S0965542512020108.

Received
April 17, 2023

Accepted for publication
May 18, 2023

Information about the authors

Dostonjon N. Barotov — Senior Lecturer; Financial University under the Government of the Russian Federation, Department of Data Analysis and Machine Learning, 4-th Veshnyakovsky Passage, 4, 109456, Moscow, Russia.

Ruziboy N. Barotov — Doctoral Student; Khujand state university named after academician Bobojon Gafurov, Department of Mathematical Analysis named after Professor A. Mukhsinov, Mavlonbekov ave., 1, 735700, Khujand, Tajikistan.