

## Экономичные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на графических процессорах

**Е. Н. Акимова**

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия  
ORCID: 0000-0002-4462-5817, e-mail: aen15@yandex.ru

**В. Е. Мисилов**

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия  
ORCID: 0000-0002-5565-0583, e-mail: v.e.misilov@urfu.ru

**А. И. Третьяков**

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия  
ORCID: 0009-0005-3389-317X, e-mail: fr1z2rt@gmail.com

**Аннотация:** Работа посвящена алгоритмам решения обратной задачи гравиметрии о восстановлении поверхности раздела сред по гравитационным данным и задачи магнитометрии для случая произвольно направленной намагниченности по магнитным данным и их реализации на графических процессорах. Построены экономичные модифицированные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на основе метода сопряженных градиентов с использованием теплицево-блочной-теплицевой структуры матрицы производных интегрального оператора. Построен новый покомпонентный метод для решения обратной задачи магнитометрии в случае произвольно направленного вектора намагниченности. Проведены численные эксперименты на GPU для исследования применимости и производительности разработанных алгоритмов.

**Ключевые слова:** обратная задача гравиметрии, обратная задача магнитометрии, методы градиентного типа, теплицевы матрицы, графические процессоры, CUDA.

**Для цитирования:** Акимова Е.Н., Мисилов В.Е., Третьяков А.И. Экономичные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на графических процессорах // Вычислительные методы и программирование. 2023. 24, № 4. 368–385. doi 10.26089/NumMet.v24r426.



## Efficient algorithms for solving inverse gravimetry and magnetometry problem on graphics processors

**Elena N. Akimova**

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia  
Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia  
ORCID: 0000-0002-4462-5817, e-mail: aen15@yandex.ru

**Vladimir E. Misilov**

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia  
Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia  
ORCID: 0000-0002-5565-0583, e-mail: v.e.misilov@urfu.ru

**Andrey I. Tretyakov**

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia  
Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia  
ORCID: 0009-0005-3389-317X, e-mail: fr1z2rt@gmail.com

**Abstract:** The work is devoted to algorithms for solving the inverse gravimetry problem of finding an interface between media from gravity data and the magnetometry problem for the case of an arbitrarily directed magnetization from magnetic data and their implementation on graphics processors. Based on the conjugate gradient method using the Toeplitz-block-Toeplitz structure of the matrix of integral operator derivatives, we construct the efficient modified algorithms for solving inverse gravimetry and magnetometry problems. A new componentwise method is elaborated for solving the inverse magnetometry problem for the case of an arbitrarily directed magnetization vector. Numerical experiments are carried out on the GPU to study the applicability and performance of the developed algorithms.

**Keywords:** inverse gravimetry problem, inverse magnetometry problem, gradient methods, Toeplitz matrices, GPU, CUDA.

**For citation:** E. N. Akimova, V. E. Misilov, and A. I. Tretyakov, “Efficient algorithms for solving inverse gravimetry and magnetometry problem on graphics processors,” *Numerical Methods and Programming*, 24 (4), 368–385 (2023). doi 10.26089/NumMet.v24r426.

**1. Введение.** Важнейшими геофизическими задачами исследования структуры земной коры являются обратная задача гравиметрии [1] о нахождении поверхностей раздела между слоями кусочно-однородной среды постоянной плотности по известным скачкам плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности, и обратная задача магнитометрии [2] о нахождении поверхностей раздела сред по известным скачкам намагниченности и магнитному полю.

Задачи описываются нелинейными интегральными уравнениями первого рода и являются некорректными задачами [3]. При разработке методов решения задач используются идеи итеративной регуляризации [4]. После дискретизации эти задачи сводятся к системам нелинейных уравнений большой размерности.

В работе П. С. Мартышко и И. Л. Пруткина [5] предложена предварительная обработка гравитационных данных методом разделения суммарного поля на составляющие с помощью технологии повысотных трансформаций. Основная идея технологии заключается в аналитическом продолжении поля вверх или вниз. В работах [6, 7] на основе сеточных алгоритмов разработан метод интерпретации гравитационных (и магнитных) полей: по выделенным аномалиям от источников, разделенных по горизонтальным слоям, строится трехмерное распределение плотности (намагниченности).

В работе [8] представлены алгоритмы и вычислительные схемы интерполяции профильных данных в объемные плотностные модели для случая сложнопостроенных сред, применяемых при решении прямых и обратных задач гравиразведки, и описаны способы восстановления объемной среды по системе профилей, которые позволяют учитывать априорную информацию о геолого-геофизических параметрах среды.

Алгоритмы решения обратных геофизических задач на основе итеративно регуляризованных методов типа Ньютона и Левенберга–Марквардта разрабатывались в Институте математики и механики УрО РАН [9–12], на основе экономичного метода локальных поправок — в Институте геофизики УрО РАН [13]. Метод локальных поправок основан на положении, что значение поля в точке земной поверхности определяется глубиной залегания ближайшей точки поверхности раздела и состоит в итеративном уточнении глубины поверхности в узле сетки за счет невязки правой части в том же узле.

В работе В. В. Васина [14] предложен модифицированный регуляризованный метод наискорейшего спуска для решения нелинейных нерегулярных операторных уравнений. Основная идея модификации состоит в вычислении матрицы производных интегрального оператора в начальной точке без пересчета в последующем итерационном процессе. В результате метод является более экономичным по числу действий на каждой итерации. В работе [15] предложен модифицированный регуляризованный метод сопряженных градиентов для решения систем нелинейных уравнений.

В работах [16, 17] предложен экономичный покомпонентный градиентный метод для решения систем нелинейных уравнений в задачах гравиметрии и магнитометрии. Идея метода состоит в возможности минимизировать невязку по правой части в узле только за счет изменения значения глубины поверхности в том же узле с использованием градиентного метода.

Целью данной работы является разработка быстрых и экономичных по памяти итерационных алгоритмов решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред на основе градиентных методов и их реализация на графических ускорителях. Приводится построение модифицированного метода сопряженных градиентов с использованием теплоцево-блочной структуры матрицы производных интегрального оператора. Построен новый покомпонентный метод для решения обратной задачи магнитометрии в случае произвольно направленного вектора намагниченности. Проведены численные эксперименты на GPU для исследования применимости и производительности разработанных алгоритмов.

В разделе 2 приводится постановка обратной задачи гравиметрии для нахождения поверхности раздела сред. Описаны методы решения задачи: регуляризованный линейризованный метод сопряженных градиентов, модифицированный метод сопряженных градиентов и гибридный метод сопряженных градиентов. Приводится построение модифицированного регуляризованного метода сопряженных градиентов. В разделе 3 приводится постановка обратной задачи магнитометрии для случая произвольно направленной намагниченности. Описан покомпонентный градиентный метод решения этой задачи. Приводится построение модифицированного покомпонентного градиентного метода для решения этой задачи. В разделе 4 описываются оптимизации разработанных модифицированных методов с использованием теплоцево-блочной структуры матрицы производных интегрального оператора. В разделе 5 описываются проведенные вычислительные эксперименты.

## 2. Задача гравиметрии.

**2.1. Постановка обратной задачи гравиметрии для одной поверхности раздела.** Введем трехмерную декартову систему координат, в которой плоскость  $xOy$  совпадает с земной поверхностью, а ось  $z$  направлена вертикально вниз. Предполагается, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной плотности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , разделенных искомой поверхностью  $S$  (рис. 1).

Пусть поверхность раздела  $S$  задается уравнением  $z = \zeta(x, y)$ , скачок плотности на ней равен  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ , поверхность имеет горизонтальную асимптотическую плоскость  $z = h$ , т.е.

$$\lim_{x,y \rightarrow \pm\infty} |\zeta(x, y) - h| = 0.$$

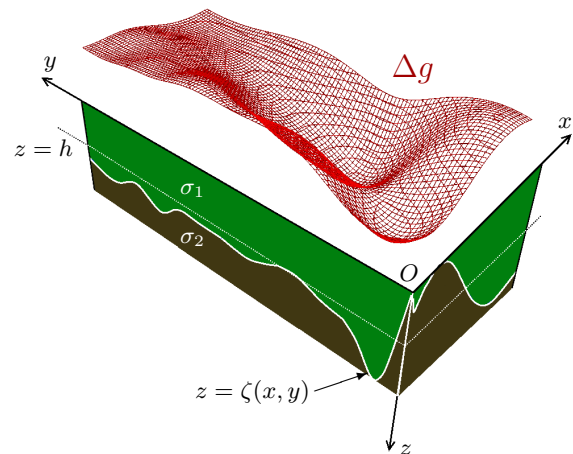


Рис. 1. Модель двухслойной среды в задаче гравиметрии

Fig. 1. Model of a two-layer medium in a gravimetry problem



Поле от полупространства с точностью до постоянного слагаемого равно [1]

$$f\Delta\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + \zeta^2(x,y)}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2}} \right] dx dy = \Delta g(x', y', 0), \quad (1)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,  $\Delta\sigma$  — скачок плотности на границе,  $\zeta(x, y)$  — искомая поверхность.

Обратная задача состоит в определении формы поверхности  $\zeta(x, y)$  по данным об изменении силы тяжести на поверхности Земли  $\Delta g(x', y', 0)$ . Исходными данными считаются плотности слоев  $\sigma_1, \sigma_2$  и глубина залегания плоскости  $h$ . Задача является двумерной и ее вычислительная сложность уменьшается.

Предположим, что правая часть  $\Delta g(x', y', 0)$  задана на ограниченной области  $[a, b] \times [c, d]$ , вне которой  $\zeta = h$ . Введем расчетную сетку  $n = M \times N$  для переменных  $(x, y)$  и  $(x', y')$  (рис. 2) с шагами  $\Delta x = (b - a)/M$ ,  $\Delta y = (d - c)/N$ . После дискретизации уравнения (1) на сетке и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам двойной интеграл заменяется двойной суммой по узлам сетки  $x_k = a + k \cdot \Delta x$ ;  $y_l = c + l \cdot \Delta y$ , где  $k = 0, \dots, M$ ;  $l = 0, \dots, N$ .

Задача сводится к системе нелинейных уравнений  $A(z) = F$ , где  $A(z)$  — конечномерная аппроксимация интегрального оператора. Вектор правой части  $F$  размерности  $n$  состоит из значений  $\Delta g(x', y')$  в узлах сетки  $(x'_i, y'_j)$ . Вектор решения  $z$  размерности  $n$  состоит из искомым значений  $\zeta(x_k, y_l)$ .

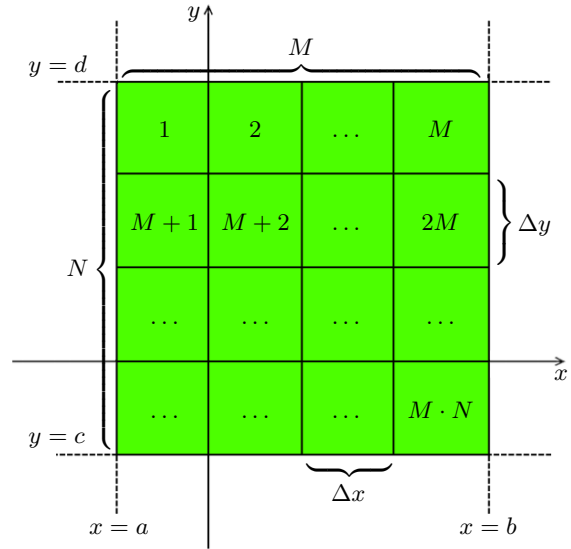


Рис. 2. Распределение индексов по сетке  
 Fig. 2. Distribution of indexes across the grid

**2.2. Методы решения обратной задачи гравиметрии.** В данной работе для решения обратной задачи гравиметрии в случае двухслойной среды используются регуляризованные методы градиентного типа.

Регуляризованный линейризованный метод сопряженных градиентов (РЛМСГ) [10, 15] задается формулами:

$$z^{k+1} = z^k - \psi \frac{\langle p^k, S_\alpha(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)p^k\|^2 + \alpha \|p^k\|^2} p^k, \quad (2)$$

$$p^k = S_\alpha(z^k) + \beta^k p^{k-1},$$

$$p_0 = S_\alpha(z^0),$$

$$\beta_k = \max \left\{ \frac{\langle S_\alpha(z^k), (S_\alpha(z^k) - S_\alpha(z^{k-1})) \rangle}{\|S_\alpha(z^{k-1})\|^2}, 0 \right\},$$

$$S_\alpha(z) = A'(z)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0),$$

где  $z^0$  — начальное приближение,  $z^k$  — приближенное решение на  $k$ -й итерации,  $\alpha$  — параметр регуляризации,  $\psi$  — демпфирующий множитель. В качестве условия останова используется следующее неравенство при достаточно малом  $\varepsilon$ :

$$\frac{\|A(z) - F\|}{\|F\|} < \varepsilon. \quad (3)$$

В работах В. В. Васина [14, 18] предложен и обоснован модифицированный регуляризованный метод наискорейшего спуска для решения нелинейных операторных уравнений, основная идея которого состо-

ит в вычислении матрицы производных интегрального оператора  $A'(z)$  в фиксированной точке  $z^0$ , что сокращает время счета.

В данной работе предлагается использовать эту идею, чтобы получить модифицированный регуляризованный линейаризованный метод сопряженных градиентов (МРЛМСГ)

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k - \psi \frac{\langle p^k, S_\alpha^0(z^k) \rangle}{\|A'(z^0)p^k\|^2 + \alpha \|p^k\|^2} p^k, \\ p^k &= S_\alpha^0(z^k) + \beta^k p^{k-1}, \\ p^0 &= S_\alpha^0(z^0), \\ \beta^k &= \max \left\{ \frac{\langle S_\alpha^0(z^k), (S_\alpha^0(z^k) - S_\alpha^0(z^{k-1})) \rangle}{\|S_\alpha^0(z^{k-1})\|^2}, 0 \right\}, \\ S_\alpha^0(z) &= A'(z^0)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0), \end{aligned} \tag{4}$$

где  $z^0$  — начальное приближение,  $z^k$  — приближенное решение на  $k$ -й итерации,  $\alpha$  — параметр регуляризации,  $\psi$  — демпфирующий множитель. В качестве условия останова используется (3) при достаточно малом  $\varepsilon$ . Построение метода приводится в разделе 2.3.

Гибридный регуляризованный линейаризованный метод сопряженных градиентов (ГРЛМСГ) заключается в том, что матрица производных пересчитывается не на каждой итерации, а один раз за несколько ( $j$ ) итераций. Формулы метода имеют вид

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k - \psi \frac{\langle p^k, S_\alpha^k(z^k) \rangle}{\|\widetilde{A}_k p^k\|^2 + \alpha \|p^k\|^2} p^k, \\ S_\alpha^k(z) &= \widetilde{A}_k^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0), \\ \widetilde{A} &= \underbrace{A'(z^0), A'(z^0), \dots, A'(z^j)}_j, \underbrace{A'(z^j), A'(z^j), \dots, A'(z^{2j})}_j, \underbrace{A'(z^{2j}), A'(z^{2j}), \dots}_j, \dots \end{aligned} \tag{5}$$

**2.3. Построение модифицированного метода сопряженных градиентов.** Построим модифицированный регуляризованный вариант линейаризованного метода сопряженных градиентов (2), используя регуляризацию по методу Тихонова, и зафиксируем матрицу производных в начальной точке:

$$S_\alpha^0(z) = A'(z^0)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0) = 0,$$

где  $z^0$  — начальное приближение,  $\alpha$  — параметр регуляризации.

Построим процесс вида [19]

$$z^{k+1} = z^k + \psi \chi^k p^k,$$

где

$$p^k = S_\alpha^0(z^k) + \beta^k p^{k-1}, \quad p^0 = S_\alpha^0(z^0), \quad \beta^k = \max \left\{ \frac{\langle S_\alpha^0(z^k), (S_\alpha^0(z^k) - S_\alpha^0(z^{k-1})) \rangle}{\|S_\alpha^0(z^{k-1})\|^2}, 0 \right\}.$$

Найдем выражение для приближенного размера шага  $\chi^k$ , используя линейную аппроксимацию  $A$ :

$$\begin{aligned} \chi^k &\approx \arg \min_x \left\{ \|A(z^k) + A'(z^0)(z^k + \chi p^k - z^k) - F\|^2 + \alpha \|z^k + \chi p^k - z^0\|^2 \right\} = \\ &= \arg \min_x \left\{ \|(A(z^k) - F)\|^2 + 2\chi \langle A'(z^0)^T (A(z^k) - F), p^k \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \chi^2 \|A'(z^0)p^k\|^2 + \alpha \|z^k - z^0\|^2 + 2\alpha\chi \langle (z^k - z^0), p^k \rangle + \alpha\chi^2 \|p^k\|^2 \right\} = \\ &= \arg \min_x \left\{ \|(A(z^k) - F)\|^2 + \alpha \|z^k - z^0\|^2 + \chi^2 \|A'(z^0)p^k\|^2 + \alpha\chi^2 \|p^k\|^2 + 2\chi \langle S_\alpha^0, p^k \rangle \right\}. \end{aligned}$$



Используя необходимое условие минимума

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left( \|A(z^k) - F\|^2 + \alpha \|z^k - z^0\|^2 + \chi^2 \|A'(z^0)p^k\|^2 + \alpha \chi^2 \|p^k\|^2 + 2\chi \langle S_\alpha^0, p^k \rangle \right) = 0 \implies$$

$$2\chi \|A'(z^0)p^k\|^2 + 2\alpha \chi \|p^k\|^2 + 2\langle S_\alpha^0, p^k \rangle = 0,$$

получаем

$$\chi^k \approx \widetilde{\chi}^k = -\frac{\langle p^k, S_\alpha^0(z^k) \rangle}{\|A'(z^0)p^k\|^2 + \alpha \|p^k\|^2}.$$

После ввода демпфирующего множителя  $\psi$  модифицированный регуляризованный метод сопряженных градиентов принимает вид (4). Отметим, что при выборе коэффициента  $\beta = 0$  процесс совпадает с модифицированным регуляризованным методом наискорейшего спуска [14].

### 3. Задача магнитометрии.

**3.1. Постановка обратной задачи магнитометрии для случая произвольно направленной суммарной намагниченности.** Предполагается, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной произвольно направленной намагниченности  $J_1, J_2$ , разделенных искомой поверхностью (рис. 3).

Пусть поверхность раздела задается функцией  $z = \zeta(x, y)$ , разность намагниченности слоев  $\Delta J = J_2 - J_1$ , поверхность имеет горизонтальную асимптотическую плоскость  $z = h$ , т.е.  $\lim_{x, y \rightarrow \pm\infty} |\zeta(x, y) - h| = 0$ . Уравнение имеет вид [20]

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\Delta J_x (x - x') + \Delta J_y (y - y') - \Delta J_z h}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + h^2 \right)^{3/2}} - \frac{\Delta J_x (x - x') + \Delta J_y (y - y') - \Delta J_z \zeta(x, y)}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + \zeta^2(x, y) \right)^{3/2}} \right] dx dy = \Delta Z(x', y', 0), \quad (6)$$

где  $\Delta J = (\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z)$  — разность намагниченности слоев,  $\Delta Z(x', y', 0)$  — вертикальная компонента напряженности магнитного поля (ось  $z$  направлена вертикально вниз).

После дискретизации уравнения (6) на сетке (рис. 2) получаем систему нелинейных уравнений  $A(z) = F$ .

**3.2. Построение модифицированного покомпонентного метода.** В работе [16] предложен экономичный покомпонентный метод для решения обратной задачи гравиметрии и магнитометрии. В случае вертикальной намагниченности (6)  $\Delta J_x = \Delta J_y = 0$ . Основная идея покомпонентного метода состоит в минимизации невязки  $A_i(z) - F_i$  по правой части в отдельно взятом узле сетки  $i$  только за счет изменения значения  $z_i$  в этом же узле. Это допустимое упрощение, поскольку значение гравитационного и магнитного полей в случае вертикально направленной намагниченности обратно зависит от значения  $(x - x')^2 + (y - y')^2$  (см. (1) и (6)).

В случае произвольно направленной намагниченности слоев зависимость более слабая, поэтому данный метод может не сходиться либо давать решение, не имеющее физического содержания. Для такой ситуации предлагается найти нужный узел  $j$ , в котором предполагается минимизировать невязку  $A_j(z) - F_j$ .

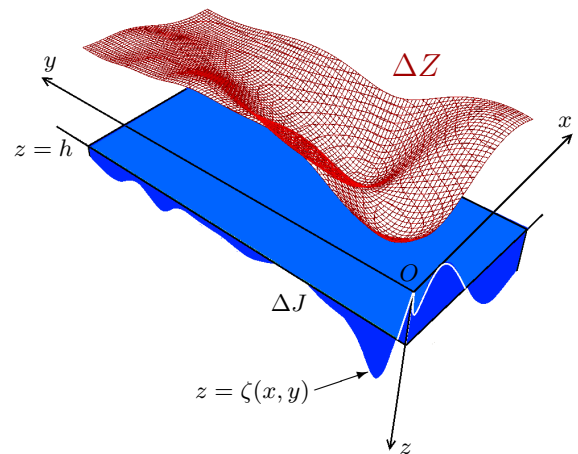


Рис. 3. Модель двухслойной среды в задаче магнитометрии для случая произвольно направленной намагниченности

Fig. 3. Model of a two-layer medium in a magnetometry problem for the case of an arbitrarily directed magnetization

Покомпонентный градиентный метод имеет вид

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \frac{A_i(z^k) - F_i}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2} \left( \frac{\partial A_i(z^k)}{\partial z_i} \right), \quad (7)$$

где  $z_i$  —  $i$ -й компонент приближенного решения,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;  $\psi$  — демпфирующий множитель.

На рис. 4 изображены схемы расположения узла  $j$ , в котором проводится минимизация невязки по правой части, и узла  $i$ , в котором меняется решение, для случаев вертикальной намагниченности ( $i = j$ ) и произвольно направленной намагниченности.

Найдем приближение новой точки  $j$ , в которой наибольшее влияние на значение поля  $F_j$  оказывает значение глубины залегания  $z_i$  для случая произвольно направленной намагниченности. Эта точка смещена относительно точки  $i$  на  $\Delta r = \{\bar{x}, \bar{y}\}$ . Для нахождения  $\bar{x}$  ( $\bar{y}$  находится аналогично), решим задачу:

$$\bar{x} = \arg \max_x \left[ - \frac{\Delta J_x(x) - \Delta J_z h}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \right].$$

Необходимое условие максимума

$$\frac{d}{dx} \left[ - \frac{\Delta J_x(x) - \Delta J_z h}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \right] = 0.$$

Модифицированный покомпонентный метод имеет вид

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \frac{A_j(z^k) - F_j}{\|\nabla A_j(z^k)\|^2} \left( \frac{\partial A_j(z^k)}{\partial z_i} \right), \quad (8)$$

$$j = i + M \frac{\left( -3\Delta J_z + \operatorname{sgn}(\Delta J_z) \sqrt{8\Delta J_y^2 + 9\Delta J_z^2} \right) h}{4\Delta J_y \Delta y} + \frac{\left( -3\Delta J_z + \operatorname{sgn}(\Delta J_z) \sqrt{8\Delta J_x^2 + 9\Delta J_z^2} \right) h}{4\Delta J_x \Delta x},$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — шаги сетки.

В случае, когда смещенные индексы выходят за границы сетки, используем индексы граничных узлов.

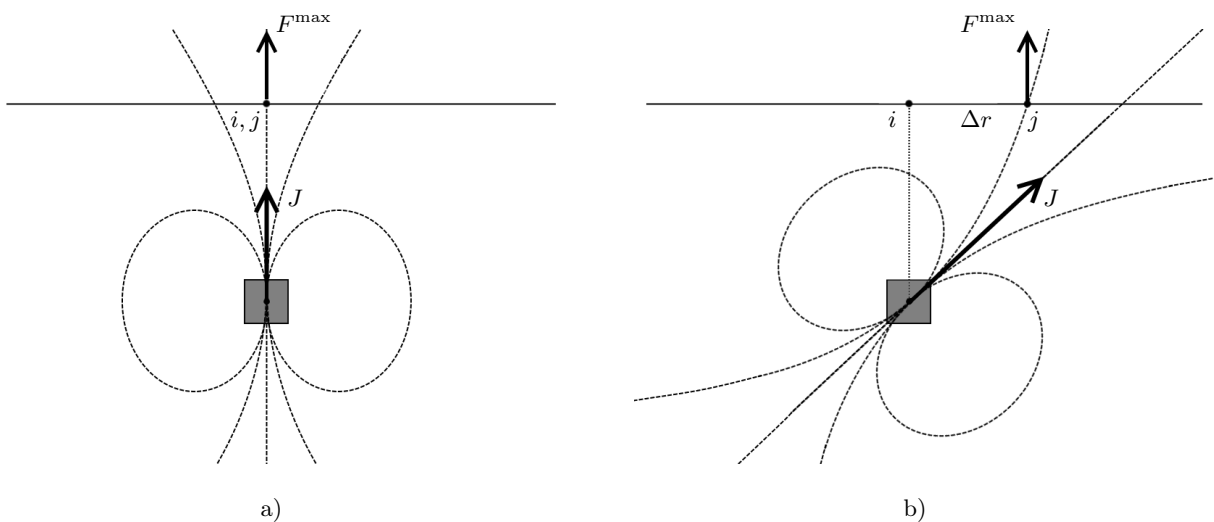


Рис. 4. Схема взаимного положения узлов  $i$  и  $j$ : а) случай вертикальной намагниченности; б) случай произвольно направленной намагниченности

Fig. 4. Diagram of the relative positions of nodes  $i$  and  $j$ : а) the case of a vertical magnetization; б) the case of an arbitrarily directed magnetization





**4. Оптимизация для модифицированных методов и параллельная реализация на GPU.**

При использовании модифицированных градиентных методов, основанных на вычислении матрицы производных в фиксированной точке, при выборе начального приближения  $z^0 = \text{const}$  элементы матрицы зависят только от значения  $(x-x')^2+(y-y')^2$ . Матрица является теплицево-блочно-теплицевой (ТБТ), т.е. на диагоналях, параллельных главной, стоят одинаковые блоки, а внутри каждого блока каждая диагональ состоит из одинаковых элементов. На рис. 5 изображена структура матрицы производных интегрального оператора для случая двухслойной среды, где  $k, i = 1, \dots, M$  — индексы блока,  $l, j = 1, \dots, N$  — индексы внутри блока. Поскольку элементы зависят только от взаимного расположения узлов сетки  $(x_k, y_l)$  и  $(x_i, y_j)$ , то блоки с равными разностями индексов  $(k-i)$  будут совпадать, а значения элементов с равными разностями индексов  $(l-j)$  равны внутри каждого блока. Равные разности индексов соответствуют диагоналям. Матрица  $A'(z^0)$  при  $z^0 = \text{const}$  является теплицево-блочно-теплицевой. В модифицированных градиентных методах данная матрица вычисляется один раз и используется во всем итерационном процессе.

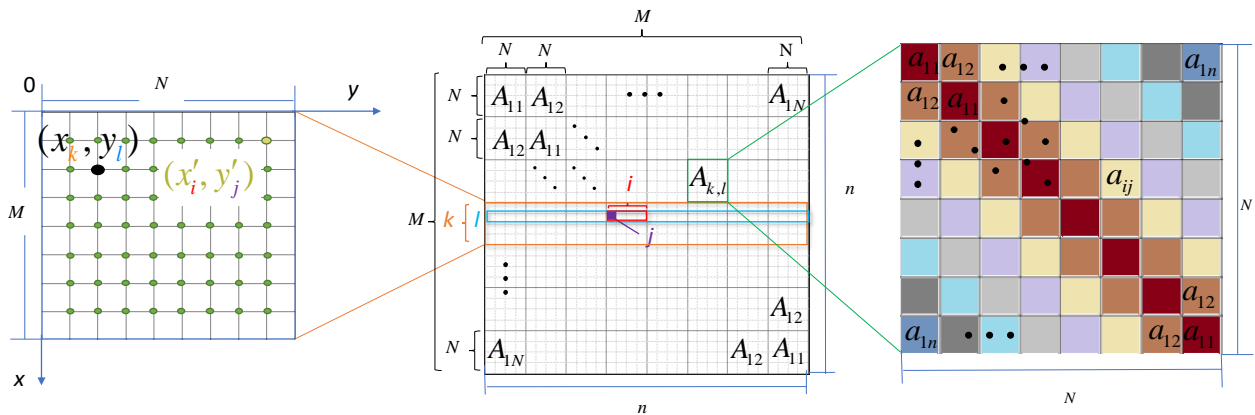


Рис. 5. Структура матрицы производных интегрального оператора для случая двухслойной среды  
 Fig. 5. Structure of the matrix of derivatives of the integral operator for the case of a two-layer medium

Для использования ТБТ матрицы достаточно хранить только уникальные элементы (рис. 6). Для получения нужного элемента матрицы достаточно по индексам нужного элемента вычислить индекс элемента в хранимой строке.

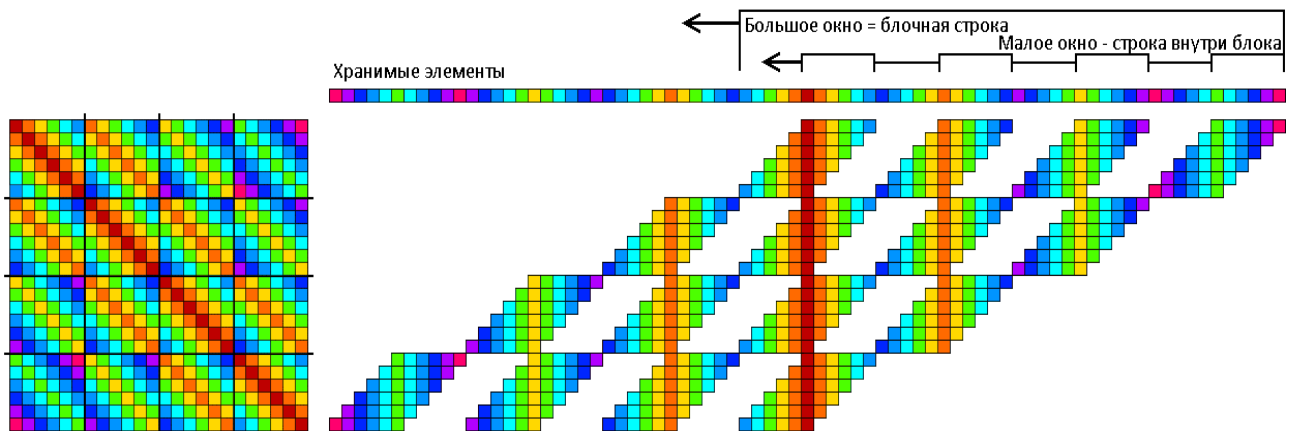


Рис. 6. Способ хранения теплицево-блочно-теплицевой матрицы производных  
 Fig. 6. Method for storing a Toeplitz-block-Toeplitz matrix of derivatives



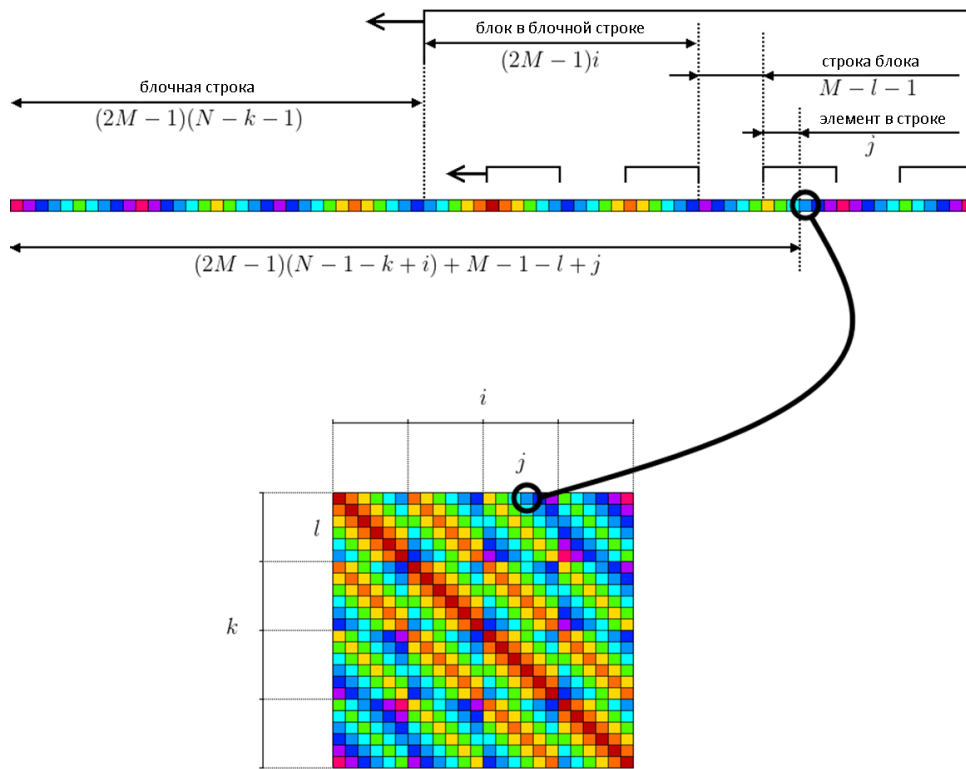


Рис. 7. Алгоритм вычисления индекса элемента матрицы в хранимой строке

Fig. 7. Algorithm for computing the index of a matrix element in the stored row

Пусть нам нужно получить элемент матрицы производных с индексами  $(j + i \cdot M \cdot N, l + k \cdot M \cdot N)$ , соответствующий точке интегрирования  $(x_k, y_l)$  и точке наблюдения  $(x'_i, y'_j)$ . Индекс элемента в хранимой строке определяется путем сложения нескольких компонент (рис. 7).

1. В  $l$ -й строке внутри блока нужно взять элемент с индексом  $j$ .
2.  $l$ -я строка внутри блока получается смещением малого окна ширины  $2M - 1$  элементов (число уникальных элементов в блоке) вправо на  $M - l - 1$  элементов.
3.  $i$ -й блок в  $k$ -й блочной строке начинается с  $(2M - 1) \cdot i$ -го элемента.
4.  $k$ -я блочная строка получается смещением большого окна ширины  $(2M - 1)N$  вправо на  $(2M - 1)(N - k - 1)$  элементов.

Такой подход позволяет сократить время счета и затраты на оперативную память. Вместо вычисления и хранения полной матрицы размерности  $MN \times MN$  достаточно хранить в оперативной памяти только  $(2M - 1)(2N - 1)$  уникальных элементов.

Отметим, что для расчетной сетки  $512 \times 512$  и формата с двойной точностью матрица коэффициентов займет 512 ГБ. Поэтому элементы матрицы производной оператора вычисляются “на лету” в момент выполнения векторно-матричных операций. При использовании модифицированных методов хранение теплового-блочного-теплицевого матрицы для той же сетки требует менее 8 МБ. Использование требуемой памяти уменьшается в 65536 раз.

Вычислительные эксперименты проводились на узлах суперкомпьютера “Уран”, оборудованных двумя процессорами E5-2660 и восемь графическими ускорителями NVIDIA Tesla M2090. Эксперименты были проведены на одном из вычислительных узлов суперкомпьютера с использованием от 1 до 8 графических ускорителей. Результаты экспериментов приведены для одного вычислительного узла, так как распараллеливание вычислений на нескольких вычислительных узлах оказалось неэффективным. Это объясняется тем, что время, затраченное на выполнение вычислений на графических ускорителях, оказалось значительно меньше времени, необходимого для синхронизации и координации всех вычислительных узлов. Использование нескольких графических ускорителей на одном вычислительном узле оказалось



более эффективным для данной задачи, чем распределение вычислений между разными узлами сети. Проведена оценка эффективности и ускорения параллельных алгоритмов.

Графические ускорители имеют большое количество вычислительных ядер, работающих параллельно. В задачах гравиметрии и магнитометрии использование градиентных методов требует большого количества матрично-векторных операций, которые можно значительно ускорить, используя вычислительную архитектуру GPU и большую пропускную способность памяти.

В работе [21] показано, что использование графических ускорителей позволило уменьшить время решения задачи градиентными методами в 68 раз по сравнению с многоядерными процессорами. Использование графических ускорителей также может быть более экономически эффективным по сравнению с увеличением числа центральных процессоров (CPU). GPU предоставляют высокую производительность на одном вычислительном узле, что может сэкономить бюджет на оборудование и энергозатраты.

Для эффективного использования нескольких ускорителей параллельные алгоритмы организованы таким образом, чтобы исключить необходимость передачи данных между различными ускорителями [12]. Рассмотрим основную структуру алгоритмов.

1. Первый шаг является подготовительным: на всех графических ускорителях выделяется память под векторы и матрицы, копируется вектор правой части уравнения.
2. На следующем шаге на каждом устройстве запускается один и тот же набор ядерных функций для разных фрагментов матриц и векторов. Данные функции реализованы таким образом, чтобы минимизировать необходимость обмена данными между различными ускорителями. Этот шаг повторяется до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность либо не закончится время, отведенное на расчет задачи.
3. На последнем шаге производится выгрузка результатов с графического ускорителя на центральный процессор. Данные сохраняются на диск, оперативная память видеокарты и хоста освобождается. Работа алгоритма завершается.

Например, в реализации МРЛМСГ матрица  $A'$  и векторы  $S_{\alpha}^0, p^k$  разделены на равные фрагменты, вычисляемые на каждом графическом ускорителе независимо. Работа по вычислению скалярных произведений в коэффициентах  $\beta^k$  и  $\chi^k$  распределяется по графическим ускорителям. При этом вычисление коэффициентов и рассылка по ускорителям проводится на центральном процессоре. Окончательные вычисления фрагментов вектора  $z^k$  на каждой итерации проводятся независимо на графических ускорителях.

При выполнении подпрограмм на GPU используется способ автоматической настройки параметров. Найдены оптимальные настройки для размера сетки  $256 \times 256$ . В случае другого размера сетки параметры пропорционально пересчитываются.

## 5. Вычислительные эксперименты на графических процессорах.

### 5.1. Восстановление поверхности раздела по зашумленным гравитационным данным.

Целью эксперимента является сравнение итерационных методов РЛМСГ (2), МРЛМСГ (4) и ГРЛМСГ (5) решения обратной задачи гравиметрии для одной границы по времени счета с помощью разработанных параллельных алгоритмов. В экспериментах использовалась модель двухслойной среды на сетке размерностью  $2^9 \times 2^9$ . На рис. 8 представлено гравитационное поле, полученное путем решения прямой задачи гравиметрии с добавлением равномерного шума с максимальным отклонением от исходного значения, равным 10%. Асимптотическая плоскость  $H = 6$  км, плотность  $\Delta\sigma = 0.1$  г/см<sup>3</sup>.

На рис. 9 представлено точное решение задачи. На рис. 10 представлено приближенное решение. Для задачи с шумом 10% относительная погрешность решения  $\delta = \|z - \tilde{z}\|/\|z\|$  уменьшилась в три раза по сравнению с погрешностью начального приближения  $z_0 = 6$  км (а именно с 0.206 до 0.06).

В табл. 1 приводится сравнение методов по количеству итераций и времени счета на графическом ускорителе для сетки  $512 \times 512$ . Применение модифицированного метода сокращает общее время вычислений в 1.6 раза по сравнению с немодифицированным вариантом. Гибридный метод показал большее время счета, чем модифицированный вариант при таком же количестве итераций и одинаковой точности.

В табл. 2 приведено сравнение эффективности и ускорения для метода МРЛМСГ при использовании различного числа графических ускорителей. Ускорение для восьми GPU составляет 7.2, эффективность составляет 90%.

**Вывод.** Применение модифицированного метода сопряженных градиентов увеличивает число итераций, но за счет экономии вычислений на каждой итерации (около 40%) сокращает общее время счета. Использование нескольких видеокарт сокращает время счета практически линейно.

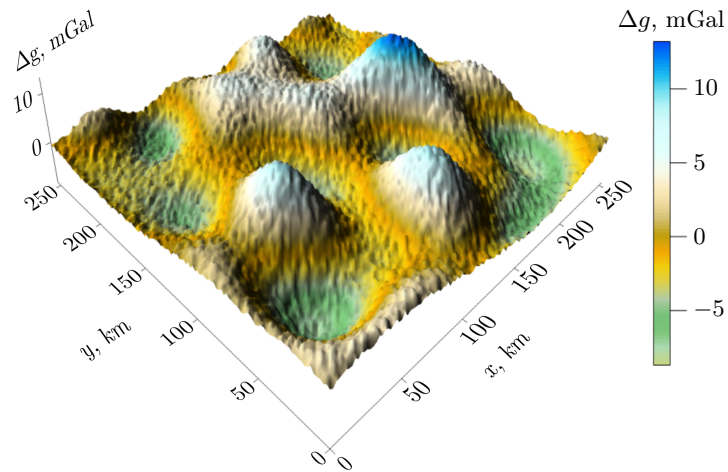


Рис. 8. Модельное гравитационное поле для задачи о восстановлении поверхности раздела по зашумленным гравитационным данным

Fig. 8. Model gravitational field for the problem of interface reconstruction from noisy gravitational data

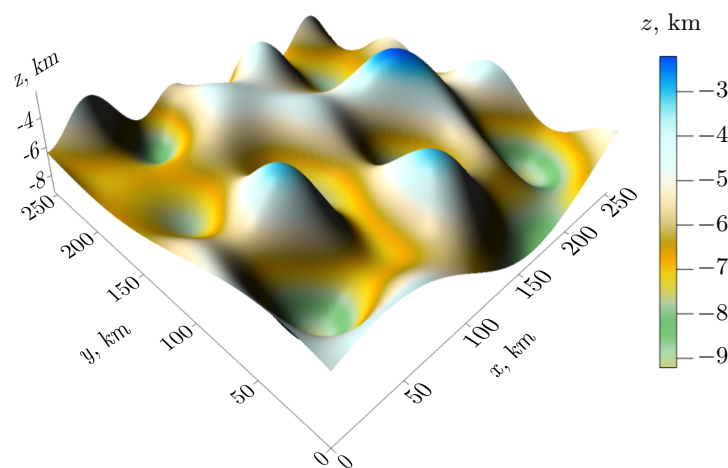


Рис. 9. Точное решение задачи о восстановлении поверхности раздела по зашумленным гравитационным данным

Fig. 9. Exact solution of the problem of interface reconstruction from noisy gravity data

Таблица 1. Результаты численных экспериментов для задачи о восстановлении одной поверхности раздела по зашумленным гравитационным данным

Table 1. Results of numerical experiments for the problem of reconstructing one interface from noisy gravity data

Метод Method	Число итераций $N$ Number of iterations $N$	Время счета $T$ , с Computing time $T$ , s
РЛМСГ	4	115
МРЛМСГ	6	72
ГРЛМСГ	6	114

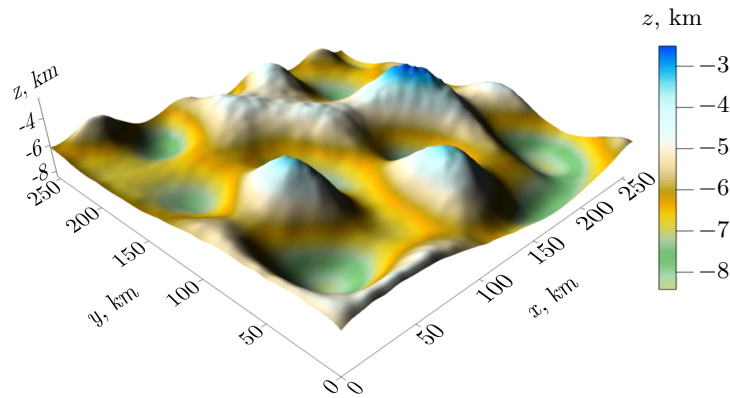


Рис. 10. Приближенное решение задачи о восстановлении поверхности раздела по зашумленным гравитационным данным

Fig. 10. An approximate solution of the problem of interface reconstruction from noisy gravity data

Таблица 2. Результаты экспериментов по распараллеливанию на нескольких видеоускорителях для задачи о восстановлении одной поверхности раздела

Table 2. Results of experiments on parallelization on several video accelerators for the problem of reconstructing one interface

Количество GPU $m$ Number of GPUs $m$	Время счета $T_m$ , с Computing time $T_m$ , s	Ускорение $S_m = T_1/T_m$ Speed up $S_m = T_1/T_m$	Эффективность $E_m = S_m/m$ Efficiency $E_m = S_m/m$
1	72	—	—
2	38	1.9	0.94
4	19	3.8	0.93
8	10	7.2	0.90

**5.2. Восстановление поверхности раздела по магнитным данным для случая произвольно направленного вектора намагниченности.** Целью эксперимента является сравнение методов РЛМСГ (2), ПГМ (7), МПГМ (8) решения обратной задачи магнитометрии для случая произвольно направленного вектора намагниченности по времени счета.

В экспериментах использовалась модель двухслойной среды на сетке размера  $2^9 \times 2^9$ .

На рис. 11 представлено точное решение задачи

$$z = 20 - 5.21e^{-(x/6.13)^4 - (y/9.59)^4} + 6.11e^{-(x/4.11 + 8.12)^4 - (y/7.5 - 3.65)^4} + 8.27e^{-(x/6.13 - 4.9)^4 - (y/6.72 - 3.65)^4}.$$

На рис. 12 представлены модельные поля  $\Delta Z_i(x, y, 0)$  для различных углов отклонения от вертикали векторов намагниченности. Эти поля получены путем решения прямой задачи магнитометрии с асимптотической плоскостью  $H = 20$  км и следующими разностями намагниченности слоев:

$$\begin{aligned} \Delta J_0 &= (0, 0, 1) \text{ А/м}, & \Delta J_{15} &= (0.19, 0.19, 1) \text{ А/м}, \\ \Delta J_{30} &= (0.41, 0.41, 1) \text{ А/м}, & \Delta J_{45} &= (0.71, 0.71, 1) \text{ А/м}, \\ \Delta J_{60} &= (1.23, 1.23, 1) \text{ А/м}, & \Delta J_{70} &= (1.94, 1.94, 1) \text{ А/м}, \\ \Delta J_{80} &= (4.01, 4.01, 1) \text{ А/м}. \end{aligned}$$

Эти намагниченности соответствуют углам отклонения намагниченности от вертикали  $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ .

В качестве условия останова использовалось  $\|A(z) - F\|/\|F\| < \varepsilon, \varepsilon = 0.01$  для всех методов. Параметр  $\psi = 0.85$  был использован в РЛМСГ для  $60^\circ$ , в ПГМ и МПГМ для  $45^\circ$ .

Параметр  $\psi = 0.75$  был использован в ПГМ и МПГМ для  $60^\circ$ . Значение параметра  $\psi = 0.35$  использовалось для всех методов для углов  $70^\circ$  и  $80^\circ$ . В остальных случаях был использован  $\psi = 1$ . РЛМСГ выполнялся с параметром регуляризации  $\alpha = 0$ .

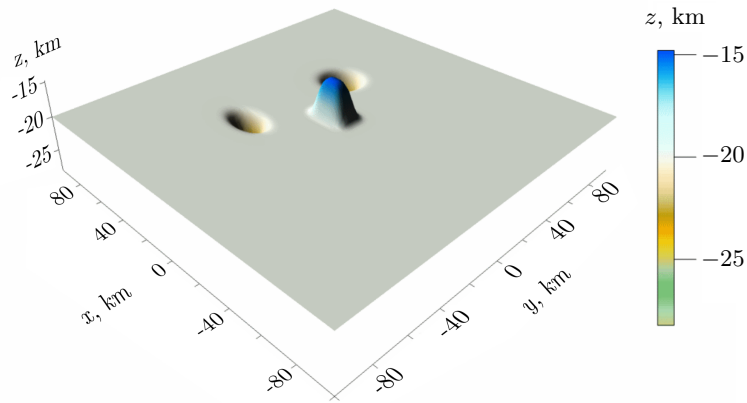


Рис. 11. Точное решение задачи о восстановлении поверхности раздела для случая произвольно направленного вектора намагниченности

Fig. 11. Exact solution of the problem of interface reconstruction for the case of an arbitrarily directed magnetization vector

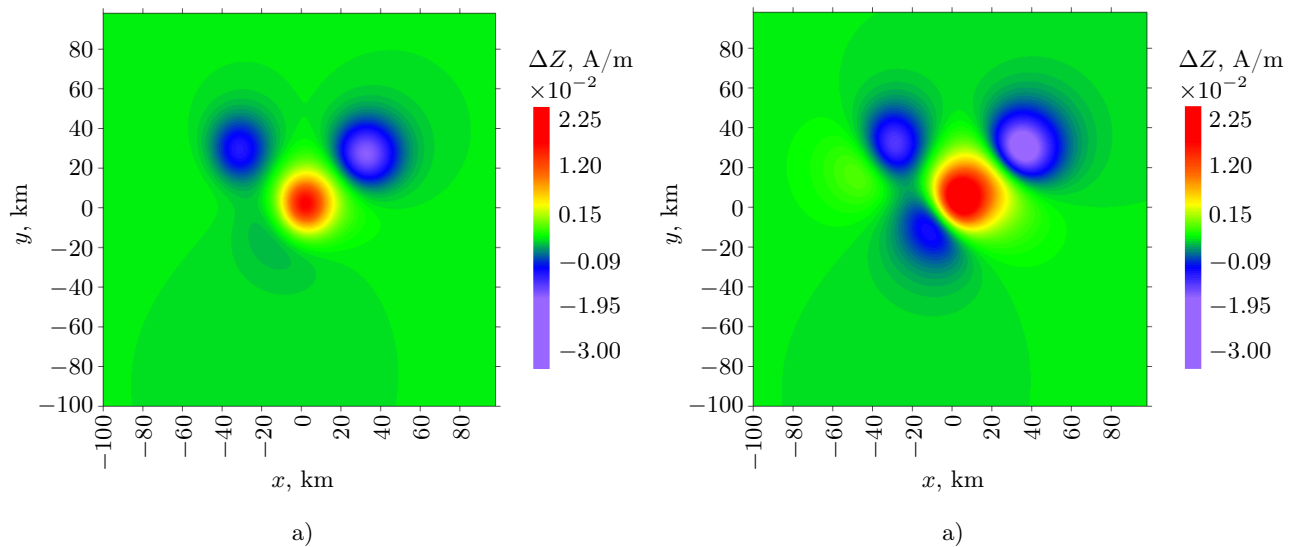


Рис. 12. Модельные магнитные поля для задачи о восстановлении поверхности раздела по магнитным данным для углов отклонения намагниченности от вертикали: а) угол 30°; б) угол 60°

Fig. 12. Model magnetic fields for the problem of interface reconstruction from magnetic data for deviation angles of magnetization from the vertical: a) 30° angle; b) 60° angle

На рис. 13 изображено приближенное решение обратной задачи для угла 60°.

Эксперименты проводились на суперкомпьютере “Уран” на узлах с 8 видеоускорителями NVIDIA Tesla M2090.

В табл. 3 приводится сравнение методов по количеству итераций и среднему времени счета для 10 запусков на узле с использованием одного графического ускорителя для сетки 512 × 512.

На рис. 14, 15 изображены графики изменение невязки по правой части и погрешности решения в зависимости от числа итераций для углов 70° и 80°.

При значениях углов от 0° до 60° относительная погрешность решения для трех рассмотренных методов составила  $\delta = \|z - z^*\|/\|z^*\| < 0.01$ . При значении угла 70° ПГМ расходится: невязка по правой части увеличивается с ростом числа итераций (рис. 14 а). При использовании методов РЛМСГ и МПГМ

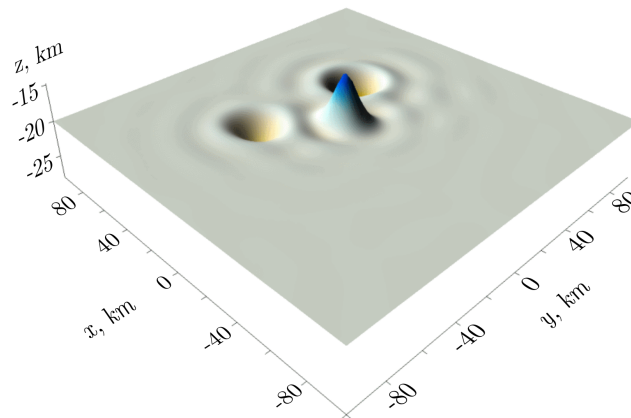


Рис. 13. Приближенное решение задачи о восстановлении поверхности раздела по магнитным данным для случая произвольно направленного вектора намагниченности для угла  $60^\circ$

Fig. 13. Approximate solution of the problem of interface reconstruction from magnetic data for the case of an arbitrarily directed magnetization vector for the angle of  $60^\circ$

Таблица 3. Сравнение методов для задачи о восстановлении поверхности раздела для случая произвольно направленного вектора намагниченности

Table 3. Comparison of methods for the problem of interface reconstruction for the case of an arbitrarily directed magnetization vector

Угол отклонения от $Oz$ вектора намагниченности Angle of deviation from $Oz$ of the magnetization vector	Метод Method					
	РЛМСГ		ПГМ		МПГМ	
	$N$	$T$ , мин $T$ , min	$N$	$T$ , мин $T$ , min	$N$	$T$ , мин $T$ , min
$0^\circ$	20	22	6	7.6	6	7.6
$15^\circ$	20	22	6	7.6	6	7.6
$30^\circ$	20	22	8	8.3	7	8
$45^\circ$	25	28	10	10.8	9	10.3
$60^\circ$	26	29	16	17.7	14	17
$70^\circ$	64	70	расходится diverges	расходится diverges	19	22
$80^\circ$	расходится diverges	расходится diverges	расходится diverges	расходится diverges	100	10

относительная норма невязки уменьшается до  $\varepsilon = 0.01$ . При этом время счета МПГМ в три раза меньше, чем РЛМСГ. Погрешности решений, полученных методами РЛМСГ и МПГМ, составили 0.015.

При значении угла  $80^\circ$  РЛМС и ПГМ расходятся (рис. 14 б). При использовании метода МПГМ относительная норма невязки уменьшается до  $\varepsilon = 0.012$  за 100 итераций, при этом относительная погрешность полученного решения составляет 0.015.

**Вывод.** Модифицированный покомпонентный метод обладает преимуществом по сравнению с ПГМ и РЛМСГ. Метод позволяет решать задачу магнитометрии при углах отклонения вектора намагниченности до  $80^\circ$ . Применение модифицированного покомпонентного метода сокращает общее время вычислений в два-три раза по сравнению с РЛМСГ.

**6. Заключение.** Предложены экономичные алгоритмы решения обратной задачи гравиметрии для нахождения поверхности раздела сред по гравитационным данным и задачи магнитометрии для случая произвольно направленной намагниченности по магнитным данным, реализованные на графических процессорах. Построены экономичные модифицированные алгоритмы решения обратных задач грави-

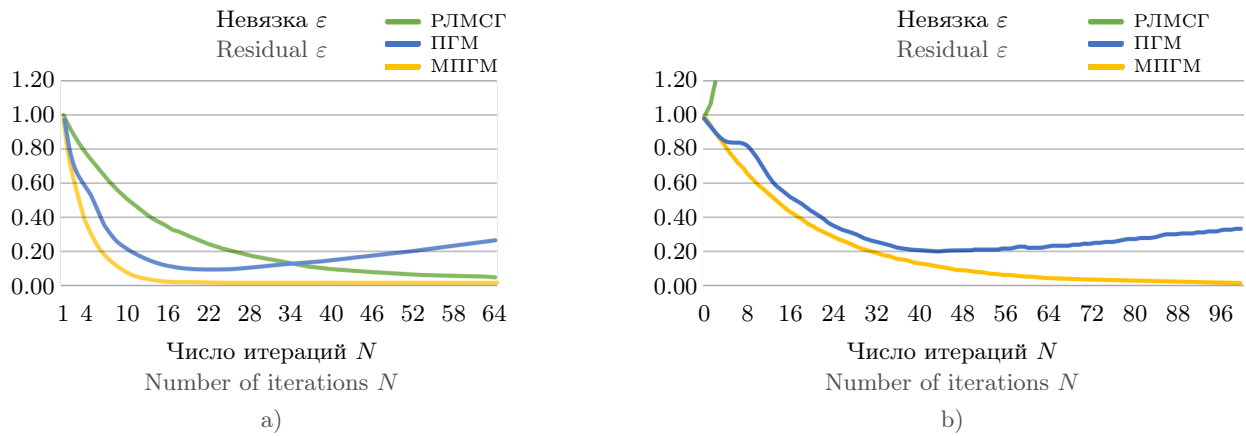


Рис. 14. Изменение невязки по правой части по итерациям: а) угол 70°; б) угол 80°

Fig. 14. Change of the residual on the right side over iterations: a) 70° angle; b) 80° angle

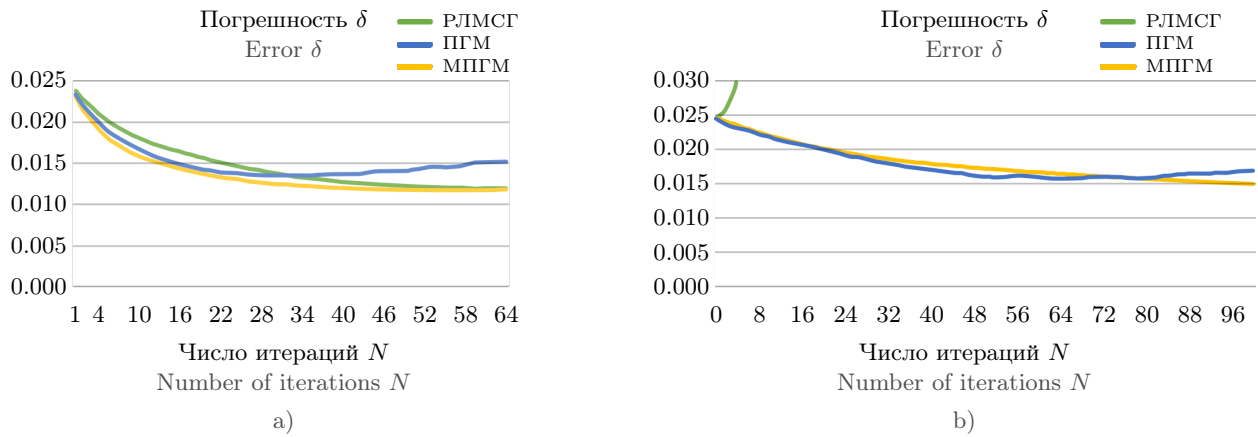


Рис. 15. Изменение погрешности решения по итерациям: а) угол 70°; б) угол 80°

Fig. 15. Change of the solution error over iterations: a) 70° angle; b) 80° angle

метрии и магнитометрии на основе метода сопряженных градиентов с использованием теплицево-блочной-теплицевой структуры матрицы производных интегрального оператора. Построен новый модифицированный покомпонентный метод для решения обратной задачи магнитометрии в случае произвольно направленного вектора намагниченности.

Численные эксперименты проводились на графических ускорителях NVIDIA Tesla M2090, входящих в состав суперкомпьютера “Уран”. Для модельной задачи магнитометрии для больших углов отклонения вектора намагниченности от вертикали новый модифицированный покомпонентный метод позволяет решить обратную задачу, в то время как ранее использованные метод сопряженных градиентов и покомпонентный метод расходятся. Для малых углов новый метод сокращает время вычислений в два-три раза по сравнению с методом сопряженных градиентов. Показано, что применение модифицированного метода сопряженных градиентов сокращает время решения модельной задачи гравиметрии в 1.6 раза. При использовании нескольких видеокарт получена высокая эффективность распараллеливания.

### Список литературы

1. Нумеров Б.В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР. Сер. А. 1930. № 21. 569–574.
2. Малкин Н.Р. О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности (случай пластообразно залегающих масс) // Докл. АН СССР. Сер. А. 1931. № 9. 232–235.





3. Страхов В.Н. Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности // Докл. АН СССР. 1971. **200**, № 4. 817–820.
4. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems: theory and applications. Dordrecht: Springer, 1994. doi 10.1007/978-94-011-1026-6.
5. Мартышко П.С., Пруткин И.Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. **25**, № 3. 159–168.
6. Мартышко П.С., Ладовский И.В., Цидаев А.Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика Земли. 2010. № 11. 23–35.
7. Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН, 2016.
8. Кобрунов А.И., Мотрюк Е.Н., Ломинский Д.О. Метод интерполяции геологической среды в условиях фрагментарно заданных данных // Фундаментальные исследования. 2015. № 2 (часть 24). 5340–5345.
9. *Akimova E.N., Vasin V.V.* Stable parallel algorithms for solving the inverse gravimetry and magnetometry problems // Int. J. Eng. Model. 2004. **17**, N 1–2. 13–19. [http://gradst.unist.hr/Portals/9/docs/EM/EM-2004-N0\\_1-2/ENGMOD\\_2004\\_Vol1-17\\_No\\_1-2\\_AKIMOVA.pdf](http://gradst.unist.hr/Portals/9/docs/EM/EM-2004-N0_1-2/ENGMOD_2004_Vol1-17_No_1-2_AKIMOVA.pdf). Cited October 19, 2023.
10. *Акимова Е.Н., Мисилов В.Е., Скурыдина А.Ф., Третьяков А.И.* Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**, № 1. 155–164. doi 10.26089/NumMet.v16r116.
11. *Васин В.В., Скурыдина А.Ф.* Двухэтапный метод построения регуляризирующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН. 2017. **23**, № 1. 57–74. [http://journal.imm.uran.ru/sites/default/files/archive/trudy\\_imm-2017-1.pdf](http://journal.imm.uran.ru/sites/default/files/archive/trudy_imm-2017-1.pdf). Cited October 19, 2023.
12. *Третьяков А.И.* Разработка комплекса параллельных программ решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии для сеток большой размерности // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2022. **11**, № 1. 57–78. doi 10.14529/cmse220104.
13. *Пруткин И.Л.* О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 1. 67–77.
14. *Васин В.В.* Модифицированный метод наискорейшего спуска для нелинейных нерегулярных операторных уравнений // Доклады Академии наук. 2015. **462**, № 3. 264–267.
15. *Akimova E.N., Misilov V.E., Tretyakov A.I.* Optimized algorithms for solving structural inverse gravimetry and magnetometry problems on GPUs // Communications in Computer and Information Science. Vol. 753. Cham: Springer, 2017. 144–155. doi 10.1007/978-3-319-67035-5\_11.
16. *Akimova E., Misilov V.* A fast componentwise gradient method for solving structural inverse gravity problem // Proc. 15th Int. Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM. Vol. 3. Albena: Bulgarian Acad. Sci., 2015. 775–782.
17. *Akimova E.N., Misilov V.E., Tretyakov A.I.* Modified componentwise gradient method for solving structural magnetic inverse problem // Communications in Computer and Information Science. Vol. 910. Cham: Springer, 2018. 162–173. doi 10.1007/978-3-319-99673-8\_12.
18. *Васин В.В.* Основы теории некорректных задач. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020.
19. *Nocedal J., Wright S.J.* Numerical optimization. New York: Springer, 2006.
20. *Misilov V.E.* On solving the structural inverse magnetic problem of finding a contact surface in the case of arbitrary directed magnetization. <https://www.earthdoc.org/content/papers/10.3997/2214-4609.201600473>. Cited October 19, 2023.
21. *Akimova E.N., Misilov V.E.* Conjugate gradient method for solving the inverse gravimetry problem in multilayered medium: parallel implementation // AIP Conf. Proc. 2019. **2164** (1). Article Number 120001. doi 10.1063/1.5130861. Cited October 19, 2023.

Поступила в редакцию  
 28 августа 2023 г.

Принята к публикации  
 12 сентября 2023 г.

### Информация об авторах

Елена Николаевна Акимова — д.ф.-м.н., вед. научн. сотр., профессор кафедры информационных технологий и систем управления; 1) Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО

РАН, ул. С. Ковалевской, 16, 620108, Екатеринбург, Россия; 2) Уральский федеральный университет, ул. Мира, 19, 620002, Екатеринбург, Россия.

*Владимир Евгеньевич Мисилов* — к.ф.-м.н., научн. сотр., доцент кафедры информационных технологий и систем управления; 1) Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, 620108, Екатеринбург, Россия; 2) Уральский федеральный университет, ул. Мира, 19, 620002, Екатеринбург, Россия.

*Андрей Игоревич Третьяков* — ведущий программист, старший преподаватель департамента информационных технологий и автоматизи; 1) Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, 620108, Екатеринбург, Россия; 2) Уральский федеральный университет, ул. Мира, 19, 620002, Екатеринбург, Россия.

## References

1. B. V. Numerov, “Interpretation of Gravity Observations in the Case of a Contact Surface,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR. Ser. A*, No. 21, 569–574 (1930).
2. N. R. Malkin, “On the Solution of the Inverse Magnetic Problem for the Case of a Contact Surface (the Case of Layered Masses),” *Dokl. Akad. Nauk SSSR. Ser. A*, No. 9, 232–235 (1931).
3. V. N. Strakhov, “Inverse Problem of the Logarithmic Potential for a Contact Surface,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **200** (4), 817–820 (1971).
4. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (Springer, Dordrecht, 1994). doi 10.1007/978-94-011-1026-6.
5. P. S. Martyshko and I. L. Prutkin, “Techniques for Separating Gravity Field Sources in Depth,” *Geofyzicheskii Zhurnal* **25** (3), 159–168 (2003).
6. P. S. Martyshko, I. V. Ladovskii, and A. G. Tsidaev, “Construction of Regional Geophysical Models Based on the Joint Interpretation of Gravity and Seismic Data,” *Fiz. Zemli*, No. 11, 23–35 (2010) [*Izv., Phys. Solid Earth* **46** (11), 931–942 (2010)]. doi 10.1134/S1069351310110030.
7. P. S. Martyshko, I. V. Ladovskii, N. V. Fedorova, et al., *Theory and Methods for Complex Interpretation of Geophysical Data* (Ural Branch Russ. Acad. Sci., Ekaterinburg, 2016).
8. A. I. Kobrunov, E. N. Motryuk, and D. O. Lominskiy, “Method of Geological Environment Interpolation in a Fragmented Set of Data,” *Fundamentalnye Issledovaniya*, No. 2 (Part 24), 5340–5345 (2015).
9. E. N. Akimova and V. V. Vasin, “Stable Parallel Algorithms for Solving the Inverse Gravimetry and Magnetometry Problems,” *Int. J. Eng. Model.* **17** (1–2), 13–19 (2004). [http://gradst.unist.hr/Portals/9/docs/EM/EM-2004-N0\\_1-2/ENGMOD\\_2004\\_Vol1-17\\_No\\_1-2\\_AKIMOVA.pdf](http://gradst.unist.hr/Portals/9/docs/EM/EM-2004-N0_1-2/ENGMOD_2004_Vol1-17_No_1-2_AKIMOVA.pdf). Cited October 19, 2023.
10. E. N. Akimova, V. E. Misilov, A. F. Skurydina, and A. I. Tretyakov, “Gradient Methods for Solving Inverse Gravimetry and Magnetometry Problems on the Uran Supercomputer,” *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)*. **16** (1), 155–164 (2015). doi 10.26089/NumMet.v16r116.
11. V. V. Vasin and A. F. Skurydina, “Two-Stage Method of Construction of Regularizing Algorithms for Nonlinear Ill-Posed Problems,” *Tr. Inst. Mat. i Mech. UrO RAN* **23** (1), 57–74 (2017) [*Proc. Steklov Inst. Math.* **301** (Suppl. 1), 173–190 (2018)]. doi 10.1134/S0081543818050152.
12. A. I. Tretyakov, “Development of the Parallel Programs Complex for Solving the Inverse Gravimetric and Magnetometry Problems for Large Grids,” *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Vychisl. Mat. Inf.* **11** (1), 57–78 (2022). doi 10.14529/cmse220104.
13. I. L. Prutkin, “The Solution of Three-Dimensional Inverse Gravimetric Problem in the Class of Contact Surfaces by the Method of Local Corrections,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Zemli*, No. 1, 67–77 (1986) [*Izv., Phys. Solid Earth* **22** (1), 49–60 (1986)].
14. V. V. Vasin, “Modified Steepest Descent Method for Nonlinear Irregular Operator Equations,” *Dokl. Akad. Nauk* **462** (3), 264–267 (2015) [*Dokl. Math.* **91** (3), 300–303 (2015)]. doi 10.1134/S1064562415030187.
15. E. N. Akimova, V. E. Misilov, and A. I. Tretyakov, “Optimized Algorithms for Solving Structural Inverse Gravimetry and Magnetometry Problems on GPUs,” in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2017), Vol. 753, pp. 144–155. doi 10.1007/978-3-319-67035-5\_11.
16. E. Akimova and V. Misilov, “A Fast Componentwise Gradient Method for Solving Structural Inverse Gravity Problem,” in *Proc. 15th Int. Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM, Albena, Bulgaria, June 18–24, 2015* (Bulgarian Acad. Sci., Albena, 2015), Vol. 3, pp. 775–782.



17. E. N. Akimova, V. E. Misilov, and A. I. Tretyakov, “Modified Componentwise Gradient Method for Solving Structural Magnetic Inverse Problem,” in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2018), Vol. 910, pp. 162–173. doi [10.1007/978-3-319-99673-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_12).
18. V. V. Vasin, *Fundamentals of the Theory of Ill-Posed Problems* (Siberian Branch Russ. Acad. Sci., Novosibirsk, 2020) [in Russian].
19. J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization* (Springer, New York, 2006).
20. V. E. Misilov, “On Solving the Structural Inverse Magnetic Problem of Finding a Contact Surface in the Case of Arbitrary Directed Magnetization,” <https://www.earthdoc.org/content/papers/10.3997/2214-4609.201600473>. Cited October 19, 2023.
21. E. N. Akimova and V. E. Misilov, “Conjugate Gradient Method for Solving the Inverse Gravimetry Problem in Multilayered Medium: Parallel Implementation,” *AIP Conf. Proc.* **2164** (1), Article Number 120001 (2019). doi [10.1063/1.5130861](https://doi.org/10.1063/1.5130861). Cited October 19, 2023.

Received  
August 28, 2023

Accepted for publication  
September 12, 2023

### Information about the authors

*Elena N. Akimova* — Dr. Sci., Leading Researcher, Professor of the Department of Information Technologies and Control Systems; 1) Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, ulitsa S. Kovalevskoi, 16, 620108, Ekaterinburg, Russia; 2) Ural Federal University, ulitsa Mira, 19, 620002, Ekaterinburg, Russia.

*Vladimir E. Misilov* — Ph.D., Researcher, Associate Professor of the Department of Information Technologies and Control Systems; 1) Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, ulitsa S. Kovalevskoi, 16, 620108, Ekaterinburg, Russia; 2) Ural Federal University, ulitsa Mira, 19, 620002, Ekaterinburg, Russia.

*Andrey I. Tretyakov* — Leading programmer, Senior Lecturer of the Faculty of Information Technology and Automatics; 1) Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, ulitsa S. Kovalevskoi, 16, 620108, Ekaterinburg, Russia; 2) Ural Federal University, ulitsa Mira, 19, 620002, Ekaterinburg, Russia.