

doi 10.26089/NumMet.v25r107

УДК 517.957
539.372

Алгоритмы корректировки решения для численного моделирования динамики упругопластических, сыпучих и пористых сред

В. М. СадовскийИнститут вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск, Российская ФедерацияORCID: 0000-0001-9695-0032, e-mail: sadov@icm.krasn.ru**О. В. Садовская**Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск, Российская ФедерацияORCID: 0000-0001-7222-8088, e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru

Аннотация: На основе математического аппарата вариационных неравенств разработаны оригинальные корректирующие алгоритмы для численного решения динамических задач теории упругопластического течения Прандтля–Рейсса с произвольным условием пластичности. Применяется метод расщепления по физическим процессам. Аналогичные алгоритмы построены для моделирования динамики сыпучей среды и пористой среды с открытыми порами.

Ключевые слова: упругопластическое течение, динамика, корректировка Уилкинса, вариационное неравенство.

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение № 075–02–2023–912).

Для цитирования: Садовский В.М., Садовская О.В. Алгоритмы корректировки решения для численного моделирования динамики упругопластических, сыпучих и пористых сред // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 1. 78–91. doi 10.26089/NumMet.v25r107.

Algorithms of solution correction for numerical simulation of the dynamics of elastic-plastic, granular and porous media

Vladimir M. SadovskiiInstitute of Computational Modelling SB RAS,
Krasnoyarsk, RussiaORCID: 0000-0001-9695-0032, e-mail: sadov@icm.krasn.ru**Oxana V. Sadovskaya**Institute of Computational Modelling SB RAS,
Krasnoyarsk, RussiaORCID: 0000-0001-7222-8088, e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru

Abstract: Based on the mathematical apparatus of variational inequalities, original corrective algorithms are developed for numerical solution of dynamic problems in the theory of elastic-plastic Prandtl–Reuss flow with an arbitrary plasticity condition. The method of splitting into physical



processes is used. Similar algorithms are constructed to simulate the dynamics of a granular medium and a porous medium with open pores.

Keywords: elastic-plastic flow, dynamics, Wilkins correction, variational inequality.

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075–02–2023–912).

For citation: V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, “Algorithms of solution correction for numerical simulation of the dynamics of elastic-plastic, granular and porous media,” Numerical Methods and Programming, 25 (1), 78–91 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r107.

1. Введение. С публикацией статьи М. Л. Уилкинса [1] в 1964 г. наступил поворотный момент в развитии методов расчета элементов конструкций при интенсивном импульсном нагружении и моделирования быстропротекающих процессов в твердых деформируемых средах. Если ранее исследования ограничивались в основном построением узкого класса точных решений в упругопластической постановке и численными расчетами на основе уравнений динамической теории упругости, то после ее публикации появилось простое и эффективное средство для учета необратимой пластической деформации, которое хорошо известно как “корректировка напряжений Уилкинса” и заключается в приведении напряжений, вычисленных на шаг по времени по упругой схеме, на круг текучести Мизеса. Такая процедура соответствует определяющим уравнениям теории упругопластического течения Прандтля–Рейсса. Позже исследования М. Л. Уилкинса были обобщены в его монографии [2].

Публикация статьи способствовала появлению отечественных школ по вычислительной механике, организаторами которых являются В. Г. Баженов [3], С. К. Годунов [4, 5], С. С. Григорян [6, 7], Г. В. Иванов [8], В. Н. Кукуджанов [9, 10], Л. А. Мерзиевский [11], В. Н. Николаевский [12], Т. М. Платова [13], Б. Е. Победря [14], В. М. Фомин [15, 16], В. Е. Фортов [17, 18], А. С. Холодов [19, 20] и др. Направления многолетних исследований этих школ непосредственно связаны с обобщением предложенных Уилкинсом вычислительных алгоритмов для решения упругопластических задач в рамках более точных математических моделей, учитывающих сложные механические характеристики материалов и на более строгом уровне описывающих пластическую деформацию, накопление повреждений и разрушение. Вместе с тем в отечественной и зарубежной литературе, по-видимому, не рассматривались алгоритмы численной реализации моделей с сингулярными условиями пластичности, а также с неклассическими условиями для описания поведения композитных и анизотропных материалов.

Целью настоящей статьи является обобщение корректировки напряжений Уилкинса на случай условия пластичности, которое задается с помощью произвольной системы выпуклых функций. Предлагаемые в работе корректирующие алгоритмы направлены на исследование упругопластических процессов с сингулярными условиями пластичности. Такие алгоритмы имеют перспективную область применения при моделировании пластической деформации композитов и анизотропных тел.

2. Вариационные неравенства. Как правило, модели математической теории пластичности наряду с формулировкой в виде систем нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами, меняющими свой вид при переходе через неизвестные границы раздела зон упругой и пластической деформации, допускают формулировку в виде вариационных неравенств, которая служит основой для конструирования вычислительных алгоритмов типа корректировки Уилкинса. Справедливости ради отметим, что такая формулировка имеет фундаментальное значение. Она согласуется с первопринципами термодинамики необратимых процессов, так как представляет собой формулировку принципа максимального производства энтропии.

2.1. Теория упругопластического течения. В теории упругопластического течения идеальных и линейно упрочняющихся сред, а также тонкостенных конструкций (стержней, пластин, оболочек) важную роль играет вариационное неравенство общего вида [21]

$$U \in F, \quad (\tilde{U} - U)'(\mathcal{D}\langle U \rangle - g) \geq 0, \quad \forall \tilde{U} \in F,$$

для гиперболического по Фридрихсу линейного дифференциального оператора

$$\mathcal{D}\langle U \rangle = A \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^n B^i \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Здесь U — m -мерная вектор-функция, составленная из проекций вектора скорости и компонент тензора напряжений относительно декартовой системы координат, F — множество допустимых вариаций решения, \tilde{U} — произвольный элемент этого множества, g — вектор массовых сил. Штрих означает транспонирование, применяется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Матрицы-коэффициенты дифференциального оператора A и B^i размерности $m \times m$ симметричны, матрица A положительно определена.

Для примера приведем в развернутом виде вариационное неравенство теории упругопластического течения Прандтля–Рейсса в специальной форме, согласованной с термодинамическим принципом Мизеса максимальной пластической диссипации энергии:

$$(\tilde{v}_i - v_i) \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) + (\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}) \left(a_{ijkl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \geq 0.$$

Здесь v_i — проекции вектора скорости, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений относительно декартовой системы координат, $\rho > 0$ — плотность среды, $a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}$ — компоненты положительно определенного тензора упругой податливости. В этом примере ограничение в форме условия пластичности $f(\sigma_{ij}) \leq 0$ накладывается только на тензор напряжений. Так как вариация вектора скорости произвольна, то из вариационного неравенства следует система дифференциальных уравнений движения. Применение теоремы Куна–Таккера к остальной части неравенства приводит к широко известному в теории пластичности ассоциированному закону течения.

Более общее вариационное неравенство для гиперболического по Годунову дифференциального оператора, который определяется через производящие потенциалы $\Phi(U)$ и $\Psi_i(U)$

$$\mathcal{D}\langle U \rangle = \frac{\partial \varphi(U)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i(U)}{\partial x_i}, \quad \varphi(U) = \frac{\partial \Phi}{\partial U}, \quad \psi_i(U) = \frac{\partial \Psi_i}{\partial U},$$

возникает в моделях нелинейно упрочняющихся упругопластических сред [22].

При численной реализации моделей производится аппроксимация дифференциального оператора и аппроксимация ограничения, что в итоге приводит к дискретному вариационному неравенству

$$\hat{U} \in F, \quad (\tilde{U} - \hat{U})' A (\hat{U} - \bar{U}) \geq 0, \quad \forall \tilde{U} \in F, \tag{1}$$

где \hat{U} — решение задачи на новом слое по времени, а \bar{U} — решение, полученное на основе разностной схемы

$$A \frac{\bar{U} - U}{\tau} = \sum_{i=0}^n B^i \frac{\partial U}{\partial x_i} + g.$$

Фактически применяется метод расщепления по физическим процессам, на первом этапе которого на шаг по времени численно решается система дифференциальных уравнений динамической теории упругости $\mathcal{D}\langle U \rangle = g$, а на втором этапе производится корректировка полученного решения для учета пластичности.

Вариационное неравенство (1) можно рассматривать в качестве определения проекции вектора \bar{U} на множество F по евклидовой норме $|U|_A = \sqrt{U' A U}$, поскольку оно представляет собой необходимое и достаточное условие минимума на F квадратичной функции $|U - \bar{U}|_A^2$. Таким образом, $\hat{U} = \pi_F(\bar{U})$, где π_F — проектор на выпуклое и замкнутое множество F по заданной норме. Процедура корректировки Уилкинса, как этап вычислительного алгоритма для решения упругопластических задач, реализует вычисление проекции для частного случая, когда F — цилиндр Мизеса в пространстве главных напряжений, а A — матрица коэффициентов упругости изотропной среды. В следующем разделе построим алгоритмы вычисления проекции для сингулярных условий пластичности и для условия пластичности общего вида.

В случае неконсервативной аппроксимации нелинейного дифференциального оператора роль матрицы A играет матрица Гессе вторых производных потенциала $\Phi(U)$. При использовании консервативной аппроксимации процедура корректировки сводится к решению нелинейного вариационного неравенства

$$\hat{U} \in F, \quad (\tilde{U} - \hat{U})' (\varphi(\hat{U}) - \varphi(\bar{U})) \geq 0, \quad \forall \tilde{U} \in F, \tag{2}$$



численное решение которого строится, например, с помощью метода проекции градиента [23, 24]. В этом методе на каждом шаге итерационного процесса также вычисляется проекция вектора на множество F .

2.2. Сыпучие и пористые среды. Более сложный вариант корректировки применяется при решении динамических задач теории сыпучих и пористых сред. Модели таких сред, учитывающие разное сопротивление материала растяжению и сжатию, приводятся к вариационному неравенству [25]

$$U = \pi_K(V) \in F, \quad (\tilde{U} - U)' \left(A \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^n B^i \frac{\partial U}{\partial x_i} - g \right) \geq 0, \quad \forall \tilde{U} \in F.$$

Здесь $\pi_K(V)$ — проектор по норме $|V|_A$ на конус K с вершиной в нуле пространства тензоров напряжений, включающий в себя всевозможные состояния сжатия. Такая среда не сопротивляется растягивающим деформациям, которые образуют сопряженный к K конус в пространстве тензоров деформации.

Аппроксимация неравенства приводит к двум этапам метода расщепления по физическим процессам. На первом этапе решается система нелинейных уравнений упругой среды (в ячейках пространственной сетки вычисляется вектор \hat{V}), на втором — вариационное неравенство относительно решения \hat{U} на новом временном слое

$$\hat{U} = \pi_K(\hat{V}) \in F, \quad (\tilde{U} - \hat{U})' A (\hat{V} - \bar{V}) \geq 0, \quad \forall \tilde{U} \in F. \quad (3)$$

Покажем, что если конус K и множество F оба выпуклы и замкнуты, а матрица A симметрична и положительно определена, то решение вариационного неравенства (3) существует и единственно при любом заданном векторе \bar{V} .

Единственность. От противного: предположим, что $\hat{U} = \pi_K(\hat{V}) \neq U = \pi_K(V)$ — два решения. Тогда

$$(U - \hat{U})' A (\hat{V} - \bar{V}) \geq 0, \quad (\hat{U} - U)' A (V - \bar{V}) \geq 0,$$

откуда следует, что $(U - \hat{U})' A (V - \hat{V}) \leq 0$.

Вариационное неравенство, которое служит эквивалентным определением проекции $U = \pi_K(V)$, принимает вид

$$U \in K, \quad (\tilde{U} - U)' A (U - V) \geq 0, \quad \forall \tilde{U} \in K.$$

Следовательно, $(\hat{U} - U)' A (U - V) \geq 0$. Аналогично $(U - \hat{U})' A (\hat{U} - \hat{V}) \geq 0$. Таким образом,

$$(U - \hat{U})' A (U - \hat{U}) = (U - \hat{U})' A (V - \hat{V}) - (\hat{U} - U)' A (U - V) - (U - \hat{U})' A (\hat{U} - \hat{V}) \leq 0.$$

Отсюда, учитывая положительную определенность A , получим $U = \hat{U}$. Единственность решения доказана. Заметим, что вектор \hat{V} определяется из вариационного неравенства (3), вообще говоря, неоднозначно, и это типично для моделей идеальных сред. Например, в частном случае, когда $K = F$, решениями неравенства являются векторы \bar{V} и $\pi_K(\bar{V})$ одновременно. При $\bar{V} \notin K$ эти векторы не совпадают.

Существование. Произведем регуляризацию задачи (3):

$$\hat{U} = \varepsilon \hat{V} + (1 - \varepsilon) \pi_K(\hat{V}) \in F, \quad (\tilde{U} - \hat{U})' A (\hat{V} - \bar{V}) \geq 0, \quad \forall \tilde{U} \in F.$$

Стремление малого параметра $\varepsilon > 0$ к нулю соответствует переходу к вариационному неравенству (3). Введение этого параметра соответствует учету малого сопротивления среды растягивающим деформациям, что приводит к более корректной модели.

Для проекции на конус выполняется тождество $\pi_K(\hat{V}) = \pi_K(\hat{U})$, которое имеет наглядную геометрическую интерпретацию и может быть строго доказано на основе определения проекции как решения вариационного неравенства. Поэтому регуляризованное неравенство преобразуется к виду

$$\hat{U} \in F, \quad (\tilde{U} - \hat{U})' A \left(\hat{U} - (1 - \varepsilon) \pi_K(\hat{U}) - \varepsilon \bar{V} \right) \geq 0, \quad \forall \tilde{U} \in F. \quad (4)$$

В свою очередь, неравенство (4) представляет собой необходимое и достаточное условие минимума на K выпуклой функции $\Phi(\hat{U}) - \hat{U}' A \bar{V}$, где

$$\Phi(U) = \frac{1}{2\varepsilon} U' A U - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \pi_K(U)' A \pi_K(U), \quad \text{так как} \quad \frac{\partial \Phi(U)}{\partial U} = \frac{1}{\varepsilon} A U - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} A \pi_K(U).$$

Сильная выпуклость и дифференцируемость этой функции обоснованы в [22]. Эти свойства гарантируют существование и единственность точки минимума, т.е. решения регуляризованной задачи. Существование и единственность решения регуляризованной задачи можно установить по-другому, переходя от вариационного неравенства (4) к эквивалентной задаче о неподвижной точке:

$$\hat{U} = Q(\hat{U}), \quad \text{где } Q(U) = \pi_F((1 - \varepsilon)\pi_K(U) - \varepsilon\bar{V}).$$

Учитывая тот факт, что оба проектора являются нестягивающими отображениями по норме $|U|_A$, можно получить оценку

$$|Q(U) - Q(\hat{U})|_A \leq (1 - \varepsilon)|U - \hat{U}|_A,$$

которая показывает, что $Q(U)$ — сжатие. Поэтому утверждение о существовании и единственности решения (4) следует из конечномерного варианта теоремы Банаха.

Далее, полагая $\tilde{U} = 0$ в (4), можно установить оценку

$$\hat{U}' A \hat{U} \leq (1 - \varepsilon)\hat{U}' A \pi_K(\hat{U}) + \varepsilon\hat{U}' A \bar{V},$$

из которой после применения неравенства Коши–Буняковского $U'AV \leq |U|_A|V|_A$ к обоим слагаемым в правой части, с учетом того, что проектор является нестягивающим оператором, т.е. что $|\pi_K(\hat{U})|_A \leq |\hat{U}|_A$, следует равномерная по ε ограниченность нормы $|\hat{U}|_A \leq |\bar{V}|_A$. Равномерная ограниченность означает компактность семейства зависящих от ε решений. Таким образом, из этого семейства можно выделить сходящуюся при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательность, предел которой удовлетворяет (3), что и доказывает существование решения.

3. Алгоритмы корректировки напряжений. Для изотропной среды с условием пластичности, которому в пространстве главных напряжений соответствует простая область допустимых вариаций типа цилиндра, кругового или с плоскими гранями, формулы корректировки решения могут быть получены в замкнутом виде. При численном моделировании анизотропных сред или сред с более сложными условиями необходимо применять вычислительные алгоритмы. Общее требование экономичности к таким алгоритмам вытекает из того, что при решении краевых задач они применяются многократно — в каждой ячейке сеточной области и на каждом шаге по времени. Смягчающим фактором является относительно малая размерность вектора, проекция которого определяется. Если не учитывается упрочнение материала, то размерность вектора равна размерности пространства главных напряжений, т.е. трем. В более общем случае в зависимости от рассматриваемой модели добавляется некоторое число дополнительных параметров упрочнения.

3.1. Условия пластичности Мизеса и Треска–Сен-Венана. Приведем явное выражение для операторов проекции на цилиндры в пространстве напряжений, определяемые классическими условиями пластичности.

Для цилиндра Мизеса $F = \{\sigma_{ij} \mid \tau_0 \leq \tau_s\}$, где τ_s — предел текучести, $\tau_0 = \sqrt{s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность касательных напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}$ — компоненты девiatorа тензора напряжений, $\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ — гидростатическое напряжение, δ_{ij} — символ Кронекера. Компоненты проекции тензора напряжений на цилиндр вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_{ij}^\pi = \begin{cases} \sigma_{ij}, & \text{если } \tau_0 \leq \tau_s, \\ \sigma_0 + s_{ij}\tau_s/\tau_0, & \text{если } \tau_0 > \tau_s. \end{cases}$$

При вычислении проекции на призму текучести Треска–Сен-Венана необходимо перейти к системе координат главных направлений тензора напряжений σ_{ij} , перенумеровав главные напряжения в порядке убывания: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. После перенумерации достаточно рассмотреть одну грань призмы: $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s$. Нормальный вектор к этой грани равен $\mathbf{n} = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$. Вспомогательные единичные векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , изображенные на рис. 1, равны

$$\mathbf{a} = (2, -1, 1)/\sqrt{6}, \quad \mathbf{b} = (1, 1, -2)/\sqrt{6}.$$

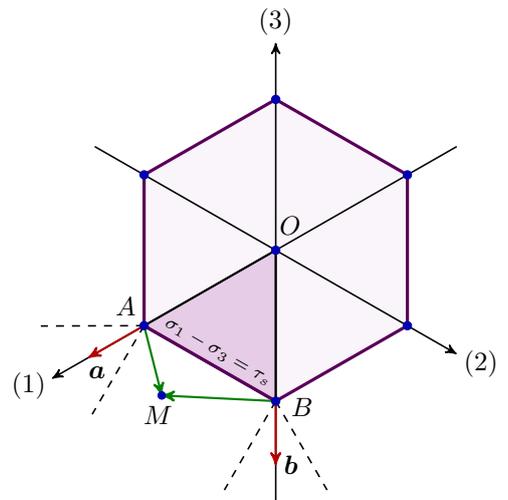


Рис. 1. Призма Треска–Сен-Венана на девiatorной плоскости

Fig. 1. Tresca–Saint-Venant’s prism on the deviatoric plane



Возможны следующие четыре варианта.

1. Точка M на девиаторной плоскости с координатами $s_1 = \sigma_1 - \sigma_0$, $s_2 = \sigma_2 - \sigma_0$, $s_3 = \sigma_3 - \sigma_0$ принадлежит призме текучести. Тогда $\sigma_1 - \sigma_3 \leq 2\tau_s$, $\sigma_i^\pi = \sigma_i$.
2. Проекция точки M совпадает с точкой A , имеющей координаты $(4, -2, -2)\tau_s/3$. В этом варианте $\sigma_1 - \sigma_3 > 2\tau_s$ и

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{AM}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{AM}}{|\mathbf{AM}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3s_1 - 4\tau_s}{\sqrt{3(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 12s_1\tau_s + 8\tau_s^2}} \geq \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5)$$

Тогда

$$\sigma_1^\pi = \sigma_0 + \frac{4}{3}\tau_s, \quad \sigma_2^\pi = \sigma_3^\pi = \sigma_0 - \frac{2}{3}\tau_s.$$

3. Проекция точки M совпадает с точкой B , имеющей координаты $(2, 2, -4)\tau_s/3$. Такой вариант реализуется, если $\sigma_1 - \sigma_3 > 2\tau_s$ и

$$\cos(\mathbf{b}, \mathbf{BM}) = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{BM}}{|\mathbf{BM}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3s_3 + 4\tau_s}{\sqrt{3(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 12s_3\tau_s + 8\tau_s^2}} \geq \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6)$$

Тогда

$$\sigma_1^\pi = \sigma_2^\pi = \sigma_0 + \frac{2}{3}\tau_s, \quad \sigma_3^\pi = \sigma_0 - \frac{4}{3}\tau_s.$$

4. Проекция точки M принадлежит интервалу (A, B) . Этот вариант реализуется, когда $\sigma_1 - \sigma_3 > 2\tau_s$ и выполняются неравенства, противоположные (5) и (6). Тогда $\sigma_i^\pi = \sigma_i - \gamma n_i$, где γ — параметр, который определяется из условия пластичности. Таким образом,

$$\sigma_1^\pi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \tau_s, \quad \sigma_2^\pi = \sigma_2, \quad \sigma_3^\pi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \tau_s.$$

Так как евклидова норма тензора напряжений, квадрат которой равен $\sigma_{ij}\sigma_{ij}$, инвариантна при смене базиса, то алгоритм вычисления проекции на призму текучести Треска–Сен-Венана в пространстве напряжений σ_{ij} сводится к определению главных напряжений и главных направлений тензора, перенумерованных в порядке убывания главных напряжений, вычислению проекций σ_i^π в соответствии с приведенными формулами и последующему переходу к исходному базису согласно тензорному правилу преобразования $\sigma_{ij}^\pi = a_{ik}\sigma_k^\pi a_{jk}$, где a_{ik} — коэффициенты матрицы перехода от исходного базиса к базису главных направлений: $\sigma_{ij} = a_{ik}\sigma_k a_{jk}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

На рис. 2 показаны проекции точек, лежащих на окружности радиуса R с центром в точке O , на призму текучести Треска–Сен-Венана в пространстве главных напряжений. Точки на рисунках обозначены розовым цветом, а их проекции на множество F — зеленым цветом. Расчет проекций точек выполнен

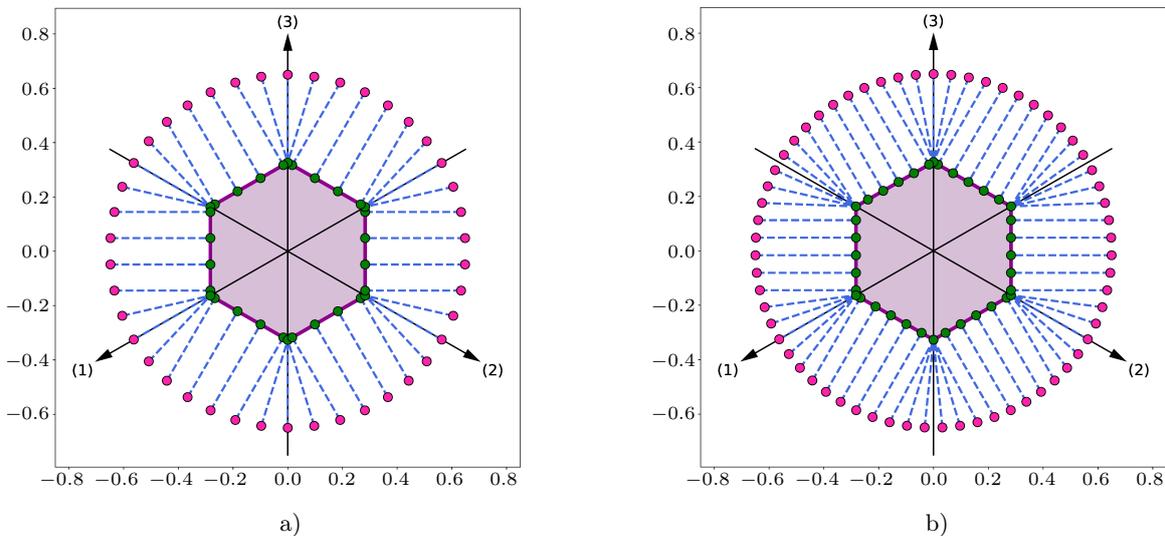


Рис. 2. Проекция точек на призму текучести Треска–Сен-Венана при $\tau_s = 0.2$: а) $N = 42$; б) $N = 63$
 Fig. 2. Projections of points onto the Tresca–Saint-Venant yield prism at $\tau_s = 0.2$: а) $N = 42$; б) $N = 63$

по формулам для четырех вариантов, приведенным выше. Количество точек N на рис. 2 а равно 42, а на рис. 2 б – 63; радиус $R = 0.65$; предел текучести $\tau_s = 0.2$.

3.2. Условие пластичности Ишлинского–Ивлева. Условию максимального приведенного напряжения Ишлинского–Ивлева $\max_{k=1,2,3} |\sigma_k - \sigma_0| = \tau_s$ в пространстве главных напряжений соответствует шестигранная призма, которая получается поворотом призмы Треска–Сен-Венана вокруг главного октаэдрического направления на угол 30° . Перед вычислением проекции тензора напряжений на призму текучести необходимо перейти к главным осям тензора и переименовать модули девиаторных компонент в порядке убывания: $|s_1| \geq |s_2| \geq |s_3|$. Это позволит существенно сократить объем формул.

На девиаторной плоскости (рис. 3) рассматриваются точки A, B, A', B' с координатами

$$(1, -1, 0)\tau_s, \quad (1, 0, -1)\tau_s, \quad (-1, 1, 0)\tau_s, \quad (-1, 0, 1)\tau_s,$$

соответственно, и единичные векторы

$$\mathbf{a} = (1, -1, 0)/\sqrt{2}, \quad \mathbf{b} = (1, 0, -1)/\sqrt{2},$$

$$\mathbf{a}' = (-1, 1, 0)/\sqrt{2}, \quad \mathbf{b}' = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}$$

($\mathbf{a}' = -\mathbf{a}, \mathbf{b}' = -\mathbf{b}$). Реализуется один из следующих семи вариантов проекции точки $M(s_1, s_2, s_3)$ на призму.

1. $|s_1| \leq \tau_s$ (точка M принадлежит призме Ишлинского–Ивлева), тогда $\sigma_i^\pi = \sigma_i$. Этот вариант соответствует упругому состоянию элемента среды.

2. $s_1 \geq \tau_s$ и

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{AM}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s_1 - s_2 - 2\tau_s}{\sqrt{(s_1 - \tau_s)^2 + (s_2 + \tau_s)^2 + s_3^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (7)$$

$$\text{тогда } \sigma_1^\pi = \sigma_0 + \tau_s, \quad \sigma_2^\pi = \sigma_0 - \tau_s, \quad \sigma_3^\pi = \sigma_0.$$

3. $s_1 \geq \tau_s$ и

$$\cos(\mathbf{b}, \mathbf{BM}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s_1 - s_3 - 2\tau_s}{\sqrt{(s_1 - \tau_s)^2 + s_2^2 + (s_3 + \tau_s)^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (8)$$

$$\text{тогда } \sigma_1^\pi = \sigma_0 + \tau_s, \quad \sigma_2^\pi = \sigma_0, \quad \sigma_3^\pi = \sigma_0 - \tau_s.$$

4. $s_1 \geq \tau_s$ и нарушаются оба неравенства (7) и (8), тогда

$$\sigma_1^\pi = \sigma_0 + \tau_s, \quad \sigma_2^\pi = \sigma_0 + \frac{2s_2 + s_1 - \tau_s}{2}, \quad \sigma_3^\pi = \sigma_0 + \frac{2s_3 + s_1 - \tau_s}{2}.$$

5. $s_1 \leq -\tau_s$ и

$$\cos(\mathbf{a}', \mathbf{A'M'}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s_1 - s_2 + 2\tau_s}{\sqrt{(s_1 + \tau_s)^2 + (s_2 - \tau_s)^2 + s_3^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (9)$$

$$\text{тогда } \sigma_1^\pi = \sigma_0 - \tau_s, \quad \sigma_2^\pi = \sigma_0 + \tau_s, \quad \sigma_3^\pi = \sigma_0.$$

6. $s_1 \leq -\tau_s$ и

$$\cos(\mathbf{b}', \mathbf{B'M'}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s_1 - s_3 + 2\tau_s}{\sqrt{(s_1 + \tau_s)^2 + s_2^2 + (s_3 - \tau_s)^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (10)$$

$$\text{тогда } \sigma_1^\pi = \sigma_0 - \tau_s, \quad \sigma_2^\pi = \sigma_0, \quad \sigma_3^\pi = \sigma_0 + \tau_s.$$

7. $s_1 \leq -\tau_s$ и нарушаются оба неравенства (9) и (10), тогда

$$\sigma_1^\pi = \sigma_0 + \tau_s, \quad \sigma_2^\pi = \sigma_0 + \frac{2s_2 + s_1 + \tau_s}{2}, \quad \sigma_3^\pi = \sigma_0 + \frac{2s_3 + s_1 + \tau_s}{2}.$$

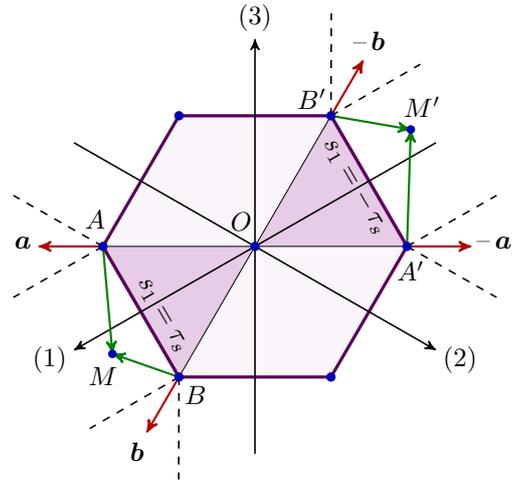


Рис. 3. Призма Ишлинского–Ивлева на девиаторной плоскости

Fig. 3. Ishlinskii–Ivlev's prism on the deviatoric plane

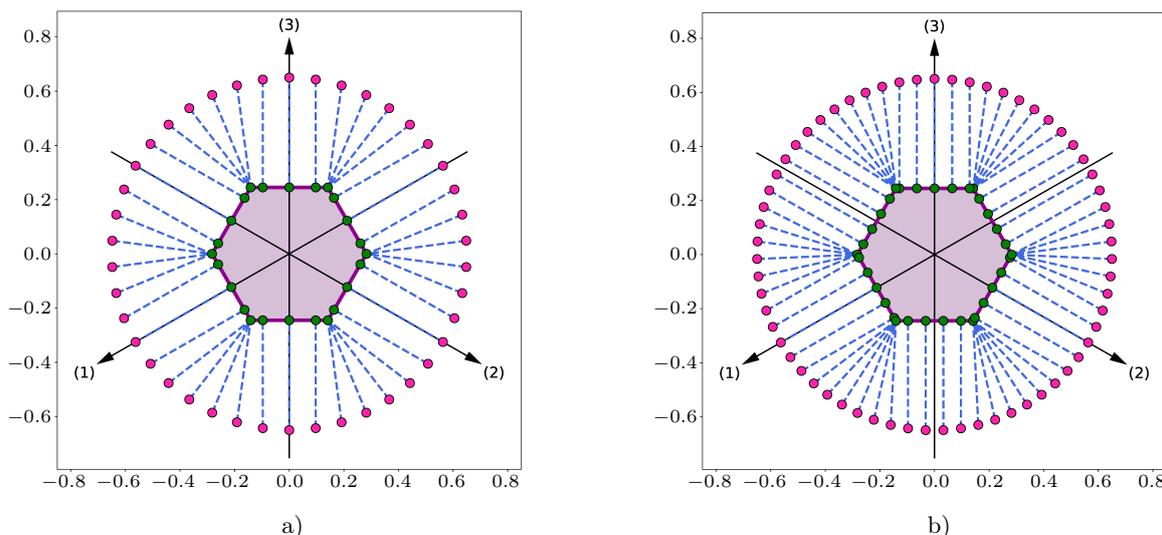


Рис. 4. Проекция точек на призму текучести Ишлинского–Ивлева при $\tau_s = 0.2$: а) $N = 42$; б) $N = 63$

Fig. 4. Projections of points onto the Ishlinskii–Ivlev yield prism at $\tau_s = 0.2$: а) $N = 42$; б) $N = 63$

Чтобы определить компоненты тензора σ_{ij}^{π} относительно исходной системы координат, нужно провести вычисления, описанные в конце предыдущего раздела.

Результаты расчета проекций точек в пространстве напряжений на шестигранную призму текучести Ишлинского–Ивлева по приведенным выше формулам для всех семи вариантов, аналогичным представленным в предыдущем разделе, показаны на рис. 4. По-прежнему сами точки изображены розовым цветом, а их проекции на множество F — зеленым цветом.

3.3. Алгоритм Удзавы. В общем случае вычисление проекции тензора напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ на множество F , которое задается с помощью произвольной системы выпуклых функций $f_k(\sigma_{ij}) \leq 0$ ($k = 1, 2, \dots, p$), по энергетической норме, определяемой положительной квадратичной формой $\sigma_{ij} a_{ijkl} \sigma_{kl}$, производится с помощью итерационных процедур. Для понижения размерности возникающей при этом задачи выпуклого программирования целесообразно снова перейти к главным осям тензора $\bar{\sigma}_{ij}$ и после построения проекции сделать обратный переход к исходной координатной системе.

Один из способов решения задачи состоит в применении алгоритма Удзавы поиска седловой точки модифицированного лагранжиана. Основная идея состоит в том, что вместо обычной функции Лагранжа, линейной относительно множителей Лагранжа $\lambda_k \geq 0$, рассматривается модифицированная функция Лагранжа следующего вида:

$$L(\sigma, \lambda) = (\sigma_i - \bar{\sigma}_i) a_{ij} (\sigma_j - \bar{\sigma}_j) + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^p \left([\lambda_k + r f_k(\sigma)]_+^2 - \lambda_k^2 \right).$$

Здесь r — параметр метода, который подбирается экспериментально с целью ускорения сходимости итераций. Квадратные скобки с нижним индексом “+” служат для обозначения положительной части выражения: $[z]_+ = \max\{z, 0\}$.

Модифицированная функция Лагранжа выпукла по $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и вогнута по $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, что и обеспечивает сходимость алгоритма Удзавы к искомой седловой точке за значительно меньшее число итераций при одной и той же погрешности вычислений по сравнению с обычной функцией Лагранжа [26, 27]. Алгоритм включает в себя следующие три этапа.

1. Задается произвольное, вообще говоря, начальное приближение для σ_i и λ_k , которое в данном случае целесообразно взять в виде: $\sigma_i^{(0)} = \bar{\sigma}_i, \lambda_k^{(0)} = 0$.
2. Если приближение с номером n уже известно, то новое приближение для σ_i определяется в результате решения задачи безусловной минимизации функции $L(\sigma, \lambda^{(n)})$. Для этого применяется специаль-

ный вариант метода Ньютона–Рафсона с начальным приближением $\sigma_i^0 = \sigma^{(n)}$, который приводит к системе уравнений

$$a_{ij} \sigma_j^{m+1} = a_{ij} \bar{\sigma}_j - \sum_{k=1}^p \left[\lambda_k^{(n)} + r f_k(\sigma^{(n)}) \right]_+ \left(\frac{\partial f_k(\sigma^m)}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial^2 f_k(\sigma^m)}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} (\sigma_j^{m+1} - \sigma_j^m) \right).$$

Система на каждом шаге $m = 0, 1, \dots$ решается с помощью одной из стандартных библиотечных процедур линейной алгебры. Обычно бывает достаточно одной-двух итераций метода, после чего полагается $\sigma_i^{(n+1)} = \sigma_i^{m+1}$.

3. Полученные значения $\sigma_i^{(n+1)}$ используются при пересчете нового приближения для λ_k по формуле:

$$\lambda_k^{(n+1)} = \left[\lambda_k^{(n)} + r f_k(\sigma^{(n+1)}) \right]_+.$$

Процесс рекуррентного пересчета приближений заканчивается при выполнении системы условий

$$\left(\sigma_i^{(n+1)} - \sigma_i^{(n)} \right) A_{ij} \left(\sigma_j^{(n+1)} - \sigma_j^{(n)} \right) \leq \varepsilon^2 \bar{\sigma}_i a_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad \lambda_k^{(n+1)} \geq -\varepsilon, \quad f_k(\sigma^{(n+1)}) \leq \varepsilon,$$

где ε — заданная погрешность вычислений. Первое из этих условий можно использовать для окончания итераций метода Ньютона–Рафсона.

С помощью алгоритма Удзавы численно получены проекции точек на эллиптический цилиндр текущей

$$a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2 - 2 \tau_s^2 \leq 0.$$

Условию пластичности в данном случае соответствует эллиптический цилиндр в пространстве главных напряжений. На рис. 5 и 6 приведены результаты расчетов при разных коэффициентах a_k , характеризующих анизотропию среды. Здесь и ранее расчеты выполнены на языке Python.

3.4. Проектор на пересечение эллиптических цилиндров. Для демонстрации работоспособности алгоритма Удзавы проводились расчеты проекций точек в пространстве напряжений на пересечение двух эллиптических цилиндров

$$a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2 - 2 \tau_s^2 \leq 0, \quad b_1 s_1^2 + b_2 s_2^2 + b_3 s_3^2 - 2 \tau_s^2 \leq 0,$$

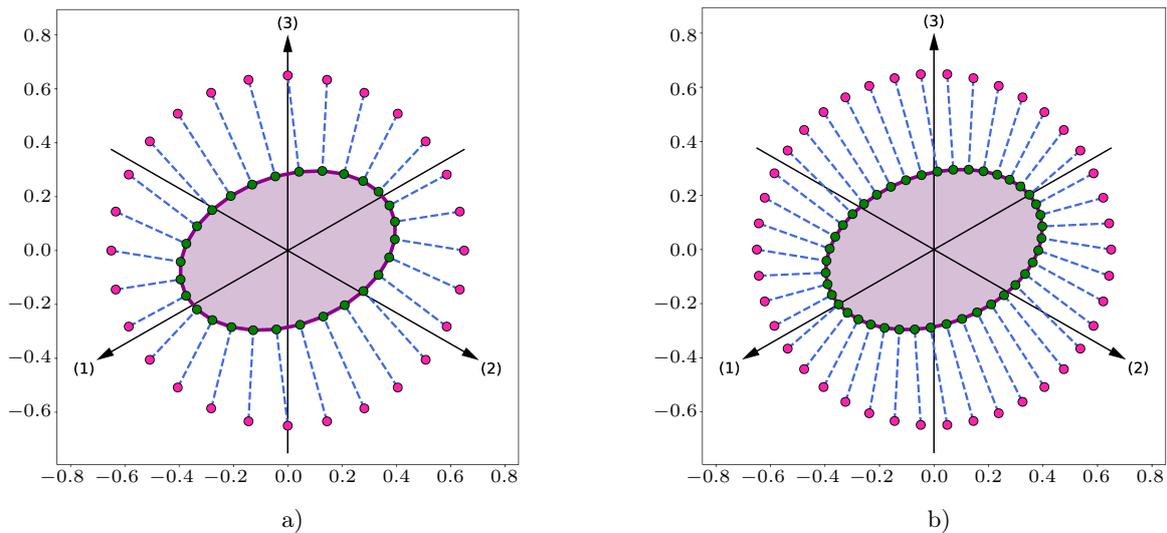


Рис. 5. Проекции точек на эллиптический цилиндр (алгоритм Удзавы) при $\tau_s = 0.35, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2$: а) $N = 28$; б) $N = 42$

Fig. 5. Projections of points onto the elliptical cylinder (Uzawa’s algorithm) at $\tau_s = 0.35, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2$: а) $N = 28$; б) $N = 42$

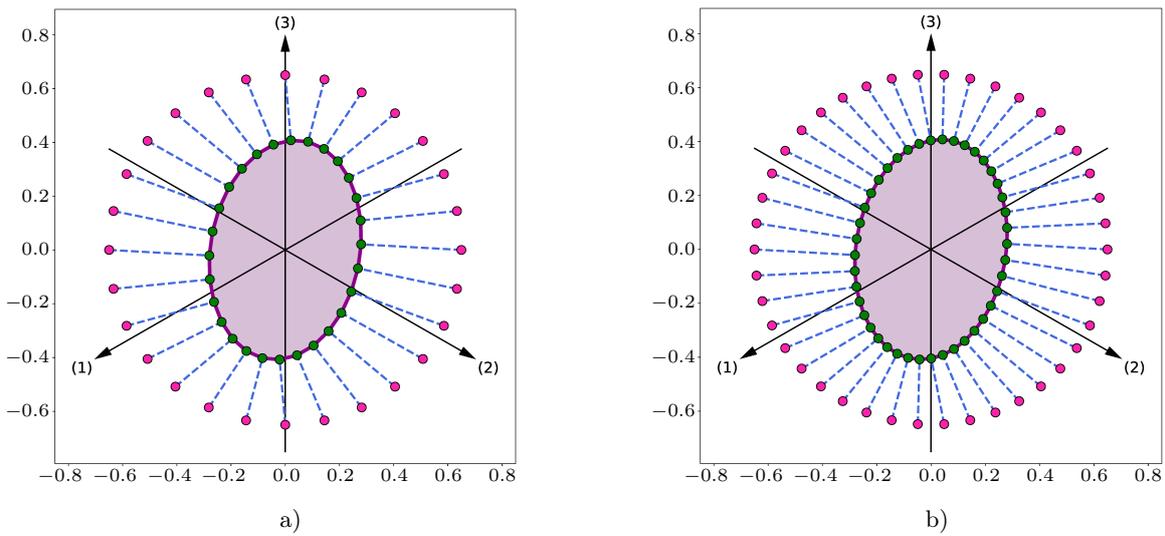


Рис. 6. Проекция точек на эллиптический цилиндр (алгоритм Удзавы)
 при $\tau_s = 0.35$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$: а) $N = 28$; б) $N = 42$

Fig. 6. Projections of points onto the elliptical cylinder (Uzawa's algorithm)
 at $\tau_s = 0.35$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$: а) $N = 28$; б) $N = 42$

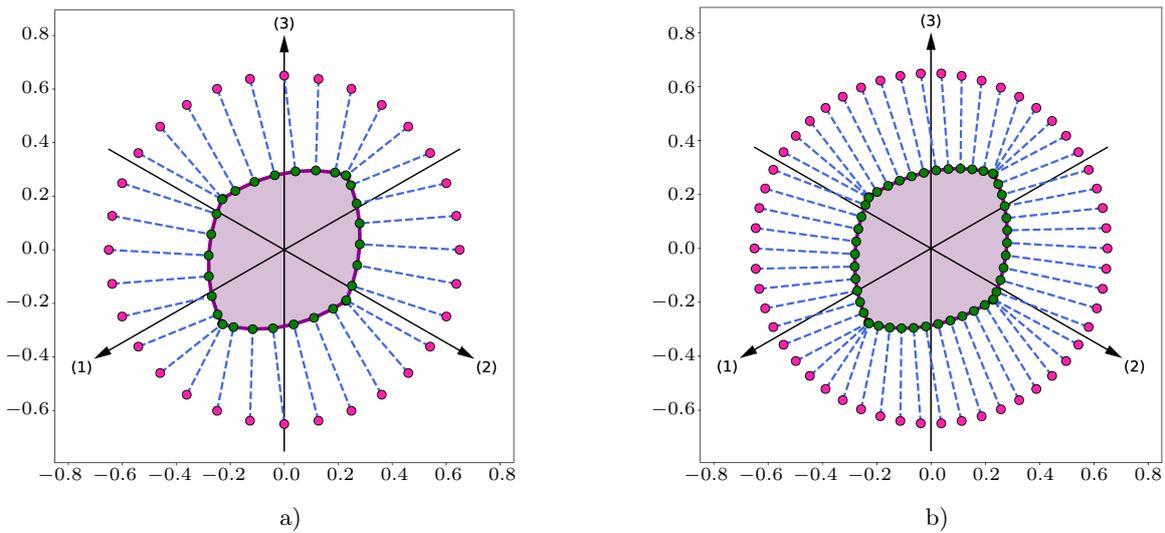


Рис. 7. Проекция точек на пересечение эллиптических цилиндров (алгоритм Удзавы)
 при $\tau_s = 0.35$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$: а) $N = 32$; б) $N = 54$

Fig. 7. Projections of points onto the intersection of elliptical cylinders (Uzawa's algorithm)
 at $\tau_s = 0.35$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$: а) $N = 32$; б) $N = 54$

которое представляет собой множество допустимых состояний гипотетического анизотропного материала, армированного в двух направлениях. Коэффициенты a_{ij} симметричной и положительно определенной матрицы, характеризующие упругую анизотропию среды, задавались произвольно. Типичные результаты счета представлены на рис. 7. В данном случае $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$ и $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$. Радиус окружности R по-прежнему равен 0.65.

Расчеты с разными наборами коэффициентов показали надежную работу алгоритма, однако значение параметра r , обеспечивающее наименьшее число итераций, существенно зависит от задачи. При надлежащем выборе параметров метода число итераций для достижения точности $\delta = 10^{-3}$ было порядка нескольких десятков, что вполне приемлемо, учитывая низкую размерность задачи.

3.5. Корректировка решений в моделях сыпучей и пористой сред. При численном решении вариационного неравенства (4) в моделях сыпучих и пористых сред можно применить метод последовательных приближений для определения неподвижной точки: $\hat{U}^{n+1} = Q(\hat{U}^n)$. Сходимость последовательности приближений обеспечивается тем, что отображение $Q(U)$ является сжимающим, если $\varepsilon > 0$. Такой подход требует вычисления двух проекций на каждом шаге итерационного процесса — проекции на конус K и проекции на множество F . Поэтому число арифметических операций оказывается чрезмерно большим, особенно при малых ε , так как коэффициент сжатия отображения оценивается как $1 - \varepsilon$.

Альтернативный подход состоит в применении алгоритма Удзавы непосредственно к решению задачи условной минимизации функции $\Phi(U)$. В этом случае формулы рекуррентного пересчета на втором и третьем этапах алгоритма принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi(\hat{U}^{(n+1)})}{\partial U} = A \bar{V} - \sum_{k=1}^p [\lambda_k^{(n)} + r f_k(\hat{U}^{(n)})]_+ \frac{\partial f_k(\hat{U}^{(n+1)})}{\partial U}, \quad \lambda_k^{(n+1)} = [\lambda_k^{(n)} + r f_k(\hat{U}^{(n+1)})]_+. \quad (11)$$

С учетом конкретного вида функции $\Phi(U)$ первая из них представляется в развернутой форме:

$$\frac{1}{\varepsilon} \hat{U}^{(n+1)} - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \pi_K(\hat{U}^{(n+1)}) = P_n(\hat{U}^{(n+1)}),$$

где для краткости используется обозначение

$$P_n(U) = \bar{V} - \sum_{k=1}^p [\lambda_k^{(n)} + r f_k(\hat{U}^{(n)})]_+ A^{-1} \frac{\partial f_k(U)}{\partial U}.$$

Так как для проекции на выпуклый замкнутый конус $\pi_K(\hat{U}^{(n+1)}) = \pi_K(P_n(\hat{U}^{(n+1)}))$, то отсюда следует, что

$$\hat{U}^{(n+1)} = \varepsilon P_n(\hat{U}^{(n+1)}) + (1 - \varepsilon) \pi_K(P_n(\hat{U}^{(n+1)})).$$

Поэтому при определении вектора $\hat{U}^{(n+1)}$ из уравнения (11) можно воспользоваться методом простой итерации:

$$U^{m+1} = \varepsilon P_n(\hat{U}^m) + (1 - \varepsilon) \pi_K(P_n(\hat{U}^m)), \quad \hat{U}^{m+1} = \omega U^{m+1} + (1 - \omega) \hat{U}^m,$$

с начальным приближением $\hat{U}^0 = \hat{U}^n$ и итерационным параметром $\omega > 0$, значение которого выбирается экспериментально для достижения наибольшей скорости сходимости. По окончании процесса полагается $\hat{U}^{(n+1)} = \hat{U}^{m+1}$.

Заметим в заключение, что алгоритм Удзавы с модифицированной функцией Лагранжа по аналогичной схеме можно применить к решению вариационного неравенства (2), которое получается в результате консервативной аппроксимации вариационного неравенства для квазилинейного дифференциального оператора в задачах динамической теории пластичности. При этом для определения вектора $\hat{U}^{(n+1)}$ на втором шаге алгоритма можно использовать сочетание метода простой итерации с методом Ньютона–Рафсона, используя формулу пересчета

$$\varphi(U^m) + \frac{\partial \varphi(U^m)}{\partial U} (U^{m+1} - U^m) = Q_n(\hat{U}^m), \quad \hat{U}^{m+1} = \omega U^{m+1} + (1 - \omega) \hat{U}^m,$$

где

$$Q_n(U) = \varphi(\bar{U}) - \sum_{k=1}^p [\lambda_k^{(n)} + r f_k(\hat{U}^{(n)})]_+ \frac{\partial f_k(U)}{\partial U}.$$

Заметим еще, что при практическом применении в задачах теории пластических, сыпучих и пористых сред предложенные итерационные алгоритмы вычисления проекций сравнимы по эффективности с конечными алгоритмами, основанными на точных формулах, поскольку на каждом временном слое строятся проекции векторов, расстояния от которых до соответствующих множеств допустимых состояний мало, порядка шага по времени.



4. Заключение. Предложены новые корректирующие алгоритмы для численного решения динамических задач теории упругопластического течения Прадтля–Рейсса с произвольным сингулярным условием пластичности. Они основаны на формулировке определяющих соотношений пластической деформации в виде вариационных неравенств и представляют собой процедуры вычисления проекций тензора напряжений на выпуклые и замкнутые множества допустимых вариаций. Верификация алгоритмов выполнена путем сравнения результатов расчета проекторов на призмы текучести Треска–Сен-Венана и Ишлинского–Ивлева по явным формулам и с использованием итерационного алгоритма Удзавы. Рассмотрены примеры вычисления проекций на эллиптические цилиндры и пересечения эллиптических цилиндров, которые могут быть использованы в моделях композитных материалов, сыпучих и пористых сред. Аналогичные результаты по обобщению процедуры корректировки напряжений Уилкинса на произвольное условие пластичности в литературе отсутствуют, поскольку, основываясь на традиционной формулировке определяющих соотношений пластичности в форме ассоциированного закона течения, используемой другими авторами, построить корректирующие процедуры практически невозможно.

Список литературы

1. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. 212–263.
2. Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Ser.: Scientific computation. Berlin: Springer, 1999. doi 10.1007/978-3-662-03885-7.
3. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011.
4. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокоров Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
5. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.
6. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // Прикладная математика и механика. 1960. 24, № 6. 1057–1072.
7. Григорян С.С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // Прикладная математика и механика. 1967. 31, № 4. 643–669.
8. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002.
9. Кукуджанов В.Н. Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. М.: Изд-во МФТИ, 1992.
10. Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2008.
11. Мерзиевский Л.А., Реснянский А.Д. Численное моделирование ударно-волновых процессов в металлах // Физика горения и взрыва. 1984. 20, № 5. 114–122.
12. Николаевский В.Н. Собрание трудов. Геомеханика. Т. 1: Разрушение и дилатансия. Нефть и газ. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2010.
13. Платова Т.М. Динамические задачи механики деформируемых сред. Томск: Изд-во ТГУ, 1980.
14. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995.
15. Фомин В.М. Численное моделирование высокоскоростного взаимодействия тел. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1982.
16. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
17. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996.
18. Кондауров В.И., Фортвов В.Е. Основы термомеханики конденсированных сред. М.: Изд-во МФТИ, 2002.
19. Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // Прикладная механика и техническая физика. 1984. № 4. 132–139.
20. Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Математическое моделирование. 1990. 2, № 11. 10–29.
21. Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997.

22. Садовский В.М. О термодинамической согласованности и математической корректности в теории упругопластических, сыпучих и пористых сред // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2020. **60**, № 4. 738–751. doi [10.31857/S0044466920040158](https://doi.org/10.31857/S0044466920040158).
23. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. Новосибирск: Наука, 1981.
24. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
25. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008.
26. Виштенко Э.М., Ву Г.С., Намм Р.В. О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. **50**, № 8. 1357–1366.
27. Жильцов А.В., Намм Р.В. Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования // Дальневосточный математический журнал. 2015. **15**, № 1. 53–60.

Поступила в редакцию
31 октября 2023 г.

Принята к публикации
8 февраля 2024 г.

Информация об авторах

Владимир Михайлович Садовский — чл.-кор. РАН, д.ф.-м.н., гл. науч. сотр.; Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 50, стр. 44, 660036, Красноярск, Российская Федерация.

Оксана Викторовна Садовская — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.; Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 50, стр. 44, 660036, Красноярск, Российская Федерация.

References

1. M. L. Wilkins, “Calculation of Elastic-Plastic Flow,” in *Methods in Computational Physics* Vol. 3: *Fundamental Methods in Hydrodynamics* (Academic Press, New York, 1964; Mir, Moscow, 1967), pp. 211–263.
2. M. L. Wilkins, *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, Ser.: *Scientific Computation* (Springer, Berlin, 1999). doi [10.1007/978-3-662-03885-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03885-7).
3. V. G. Bazhenov and V. L. Kotov, *Mathematical Modeling of Non-Stationary Processes of Impact and Penetration of Axisymmetric Bodies and Identification of Properties of Ground Media* (Fizmatlit, Moscow, 2011) [in Russian].
4. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. Ya. Ivanov, et al., *Numerical Solving Many-Dimensional Problems of Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
5. S. K. Godunov and E. I. Romenskii, *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws* (Springer, New York, 2003; Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1998). doi [10.1007/978-1-4757-5117-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5117-8).
6. S. S. Grigorian, “On Basic Concepts in Soil Dynamics,” *Prikl. Mat. Mekh.* **24** (6), 1057–1072 (1960) [J. Appl. Math. Mech. **24** (6), 1604–1627 (1960)]. doi [10.1016/0021-8928\(60\)90013-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90013-7).
7. S. S. Grigorian, “Some Problems of the Mathematical Theory of Deformation and Fracture of Hard Rocks,” *Prikl. Mat. Mekh.* **31** (4), 643–669 (1967) [J. Appl. Math. Mech. **31** (4), 665–686 (1967)]. doi [10.1016/0021-8928\(67\)90006-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90006-8).
8. G. V. Ivanov, Yu. M. Volchkov, I. O. Bogulskii, et al., *Numerical Solution of Dynamic Elastic-Plastic Problems of Deformable Solids* (Sib. Univ. Izd., Novosibirsk, 2002) [in Russian].
9. V. N. Kukudzhanov, *Difference Methods for the Solution of Problems of Mechanics of Deformable Media* (MFTI Press, Moscow, 1992) [in Russian].
10. V. N. Kukudzhanov, *Numerical Continuum Mechanics* (Fizmatlit, Moscow, 2008; De Gruyter, Berlin, 2013). doi [10.1515/9783110273380](https://doi.org/10.1515/9783110273380).
11. L. A. Merzhievskii and A. D. Resnyanskii, “Shock-Wave Processes in Metals,” *Fiz. Goreniya Vzryva* **20** (5), 114–122 (1984) [Combust. Explos. Shock Waves **20** (5), 580–587 (1984)]. doi [10.1007/BF00782256](https://doi.org/10.1007/BF00782256).
12. V. N. Nikolaevskii, *A Collection of Writings. Geomechanics*. Vol. 1: *Fracture and Dilatancy, Oil and Gas* (Inst. Komp’yut. Issled., Moscow–Izhevsk, 2010) [in Russian].
13. T. M. Platova, *Dynamic Problems of Mechanics of Deformable Media* (Tomsk Gos. Univ., Tomsk, 1980) [in Russian].
14. B. E. Pobedrya, *Numerical Methods in the Theory of Elasticity and Plasticity* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1995) [in Russian].



15. V. M. Fomin, *Numerical Modeling of High-Velocity Interaction of Bodies* (NSU Press, Novosibirsk, 1982) [in Russian].
16. V. M. Fomin, A. I. Gulidov, G. A. Sapozhnikov, et al., *High-Velocity Interaction of Bodies* (Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 1999) [in Russian].
17. G. I. Kanel, V. E. Fortov, and S. V. Razorenov, *Shock-Wave Phenomena and the Properties of Condensed Matter, Ser.: Shock Wave and High Pressure Phenomena* (Springer, New York, 2004). doi [10.1007/978-1-4757-4282-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4282-4).
18. V. I. Kondaurov and V. E. Fortov, *Fundamentals of Thermomechanics of Condensed Matter* (MFTI Press, Moscow, 2002) [in Russian].
19. V. I. Kondaurov, I. B. Petrov, and A. S. Kholodov, “Numerical Modeling of the Process of Penetration of a Rigid Body of Revolution into an Elastoplastic Barrier,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. No. 4*, 132–139 (1984) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **25** (4), 625–632 (1984)]. doi [10.1007/BF00910003](https://doi.org/10.1007/BF00910003).
20. V. D. Ivanov, V. I. Kondaurov, I. B. Petrov, and A. S. Kholodov, “Calculation of Dynamic Deformation and Destruction of Elastic-Plastic Bodies by Grid-Characteristic Methods,” *Mat. Model.* **2** (11), 10–29 (1990).
21. V. M. Sadovskii, *Discontinuous Solutions in Dynamic Elastic-Plastic Problems* (Nauka, Moscow, 1997) [in Russian].
22. V. M. Sadovskii, “Thermodynamic Consistency and Mathematical Well-Posedness in the Theory of Elastoplastic, Granular, and Porous Materials,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **60** (4), 738–751 (2020) [Comput. Math. Math. Phys. **60** (4), 723–736 (2020)]. doi [10.1134/S0965542520040156](https://doi.org/10.1134/S0965542520040156).
23. K. Grossman and A. A. Kaplan, *Nonlinear Programming on the Basis of Unconditional Minimization* (Nauka, Novosibirsk, 1981) [in Russian].
24. B. T. Polyak, *Introduction to Optimization* (Optimization Software, New York, 1987; Nauka, Moscow, 1983).
25. O. Sadovskaya and V. Sadovskii, *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials*, in *Advanced Structured Materials*, Vol. 21 (Springer, Berlin, 2012; Fizmatlit, Moscow, 2008). doi [10.1007/978-3-642-29053-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-29053-4).
26. E. M. Vikhtenko, G. Woo, and R. V. Namm, “On the Convergence of the Uzawa Method with a Modified Lagrangian Functional for Variational Inequalities in Mechanics,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (8), 1357–1366 (2010) [Comput. Math. Math. Phys. **50** (8), 1289–1298 (2010)]. doi [10.1134/S0965542510080026](https://doi.org/10.1134/S0965542510080026).
27. A. V. Zhiltsov and R. V. Namm, “The Lagrange Multiplier Method in the Finite Convex Programming Problem,” *Dal’nevost. Mat. Zh.* **15** (1), 53–60 (2015).

Received
 October 31, 2023

Accepted for publication
 February 8, 2024

Information about the authors

Vladimir M. Sadovskii — Corresponding member of RAS, Prof., Chief Researcher; Institute of Computational Modelling SB RAS, Akademgorodok, 50, building 44, 660036, Krasnoyarsk, Russia.

Oxana V. Sadovskaya — Ph.D., Senior Researcher; Institute of Computational Modelling SB RAS, Akademgorodok, 50, building 44, 660036, Krasnoyarsk, Russia.