

doi 10.26089/NumMet.v25r102

УДК 519.63

Расчет напряженности электрических полей при моделировании интенсивных пучков заряженных частиц в сложных 2D областях

А. Н. Козырев

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0009-0003-2046-9412, e-mail: kozyrev_a@inbox.ru

В. М. Свешников

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-0555-8583, e-mail: victor@lapasrv.sccc.ru

Аннотация: В задачах моделирования интенсивных пучков заряженных частиц, движущихся в областях со сложной конфигурацией границ, точность вычислений траекторий существенно зависит от точности расчета электрических полей. В статье представлены разработанные алгоритмы расчета напряженности электрических полей в расчетных точках траекторий на адаптивных квазиструктурированных сетках. Особое внимание уделено расчетам вблизи криволинейных границ во избежание фатальных ошибок, приводящих к оседанию пучка на стенки моделируемого прибора. Для этого предложены специальные приближающие функции, которые строятся в граничных и приграничных узлах сетки на основе метода наименьших квадратов. Рассмотрены часто встречающиеся случаи, когда на отрезках границы задаются постоянные значения потенциала или его нормальной производной, для которых разработанный подход, как показывают результаты численных экспериментов, значительно повышает точность расчетов.

Ключевые слова: интенсивные пучки, приближающая функция, квазиструктурированная сетка, метод наименьших квадратов.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00385, <https://rscf.ru/project/23-21-00385/>.

Для цитирования: Козырев А.Н., Свешников В.М. Расчет напряженности электрических полей при моделировании интенсивных пучков заряженных частиц в сложных 2D областях // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 1. 10–18. doi 10.26089/NumMet.v25r102.

Calculation of electric field when modeling of intense charged particles beams in complex 2D domains

Alexander N. Kozyrev

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0009-0003-2046-9412, e-mail: kozyrev_a@inbox.ru

Victor M. Sveshnikov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0003-0555-8583, e-mail: victor@lapasrv.sccc.ru

Abstract: In problems of modeling intense charged particles beams moving in domains with a complex configuration of boundaries, the accuracy of trajectory calculations significantly depends on



the accuracy of calculation of electric fields. In this work, algorithms for calculating the strength of electric fields at the calculated points of trajectories on adaptive quasi-structured grids are developed. Special attention is given to calculations near curvilinear boundaries in order to avoid fatal errors that lead to the beam settling on the walls of the simulated device. For this purpose, special approximating functions are proposed, which are constructed at the boundary and near-boundary grid nodes based on the least squares method. Frequent cases are considered when constant values of the potential or its normal derivative are set on boundary segments, for which the developed approach, as shown by the results of numerical experiments, significantly increases the accuracy of calculations.

Keywords: intense beams, approximation function, quasi-structured grid, least square method.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23–21–00385, <https://rscf.ru/project/23-21-00385/>.

For citation: A. N. Kozyrev, V. M. Sveshnikov, “Calculation of electric field when modeling of intense charged particles beams in complex 2D domains,” *Numerical Methods and Programming*, 25 (1), 10–18 (2023). doi 10.26089/NumMet.v25r102.

1. Введение. Математическое моделирование интенсивных пучков заряженных частиц [1, 2] приводит к решению самосогласованных нелинейных задач, включающих в себя расчет электрических и магнитных полей, траекторий заряженных частиц и вносимого ими объемного заряда. Применение для численного решения данных задач структурированных прямоугольных сеток [3, 4] требует введения дополнительных узлов, которые необходимы лишь для обеспечения структурированности и не влияют на точность вычислений. Использование неструктурированных сеток, на которых основаны, например, такие известные пакеты прикладных программ для моделирования электрофизических приборов, как Comsol [5], Ansys [6], Opera [7], сопровождается введением большого объема вспомогательной информации, что, в частности, значительно увеличивает время выполнения часто используемой операции поиска требуемого сеточного элемента. В ряде случаев, например при расчете протяженных электронно-оптических систем [8, 9], значительную часть расчетной области занимает канал транспортировки пучка, моделирование которого достаточно эффективно проводится на структурированных прямоугольных сетках, т.е. при этом не требуется введения неструктурированных сеток. В то же время при наличии сложных расчетных областей для обеспечения необходимой точности требуется адаптация сетки к криволинейной границе. Поэтому в настоящей работе предлагается проводить расчеты интенсивных пучков на адаптивных прямоугольных квазиструктурированных сетках [10]. Достоинство данных сеток, в том числе, состоит в возможности их сгущения в области прохождения пучка и разрежения ближе к периферии, что позволяет повысить точность расчетов, не прибегая к введению лишних узлов. Адаптация сетки вблизи границ расчетной области достигается путем локальной модификации приграничных узлов.

Настоящая статья посвящена одному из важных вопросов решения самосогласованной задачи, а именно расчетам напряженности электрических полей при расчете траекторий заряженных частиц на предлагаемых квазиструктурированных сетках. Предполагается, что из решения краевой задачи для уравнения Пуассона найден потенциал электрического поля в узлах сетки и требуется в тех же узлах найти компоненты напряженности, чтобы использовать их при расчете траекторий. Для этого построены схемы второго порядка ($O(h^2)$, где h — шаг сетки) двух видов. Первый вид представляют собой простые схемы, которые служат для вычислений в регулярных узлах с сохранением прямоугольных сеточных шаблонов и приводятся для полноты изложения. Второй вид — это схемы для вычислений напряженности в граничных и околограничных узлах с нарушением прямоугольных сеточных шаблонов, что имеет место в квазиструктурированных сетках в узкой полосе вблизи криволинейных границ. С целью их построения предлагается специальная приближающая функция для потенциала, полученная на основе метода наименьших квадратов [11], дифференцированием которой находятся компоненты напряженности. Вопросам приближения функций посвящено большое число работ (см., например, монографию [12] и цитируемую там литературу). Коренным отличием предлагаемого алгоритма является то, что при построении специальной приближающей функции используется заданное значение потенциала или его нормальной производной на близлежащих границах, что значительно повышает точность вычислений. Даются примеры методических и практических расчетов, подтверждающие эффективность разработанных подходов.

2. Квазиструктурированные сетки. Рассматриваются двумерные плоские или осесимметричные задачи соответственно в декартовой (x, y) или цилиндрической (r, z) системах координат. В дальнейшем полагается $r = x, z = y$.

Квазиструктурированные сетки строятся за два этапа. На первом из них расчетная область $\bar{G} = G \cup \Gamma$, где Γ — граница, покрывается равномерной прямоугольной макросеткой

$$\Omega_H = \left\{ X_I = IH_x, Y_J = JH_y, I = \overline{0, N_x}, J = \overline{0, N_y}, H_x = \frac{D_x}{N_x}, H_y = \frac{D_y}{N_y} \right\},$$

где D_x, D_y, N_x, N_y — заданные числа, с шагами $H_x, H_y \gg h$ (h — максимальный шаг сетки, на которой проводятся расчеты). Таким образом, проводится декомпозиция \bar{G} на непересекающиеся подобласти $G_{I,J}$. Среди них различаются внутренние подобласти $G_{I,J}^{(1)}$, содержащие G , но не содержащие Γ , граничные подобласти $G_{I,J}^{(2)}$, содержащие G и Γ , внешние подобласти $G_{I,J}^{(3)}$, не содержащие ни G , ни Γ . Координатные линии сетки Ω_H образуют границу сопряжения или интерфейс. Расчеты проводятся во внутренних и граничных подобластях (назовем их счетными). Для этого в каждой счетной подобласти строится своя равномерная прямоугольная микросетка

$$\Omega_{h,m} = \{x_{i_m} = X_I + i_m h_{x,m}, y_{j_m} = Y_J + j_m h_{y,m}, i_m = \overline{0, n_{x,m}}, j_m = \overline{0, n_{y,m}}\},$$

с шагами $h_{x,m} = \frac{X_{I+1} - X_I}{n_{x,m}}, h_{y,m} = \frac{Y_{J+1} - Y_J}{n_{y,m}}$. Здесь введена единая нумерация подобластей и подсеток по индексу $m = 1, 2, \dots, M$, где M — известное целое число, $n_{x,m}, n_{y,m}$ есть 2 в целой степени.

Для адаптации к границе, которую мы будем предполагать состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей, данные микросетки (подсетки) подвергаются локальной модификации, которая заключается в сдвиге приграничных узлов на границу [10]. На интерфейсе строится своя микросетка, состоящая из совпадающих узлов смежных подсеток. Перечисленные выше микросетки образуют квазиструктурированную сетку, на которой решается задача о расчете пучка.

3. Расчет напряженности электрического поля. Напряженность электрического поля \mathbf{E} выражается через потенциал φ как $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$. Мы будем предполагать, что значения потенциала уже вычислены в узлах квазиструктурированной сетки и требуется рассчитать в тех же узлах компоненты напряженности $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$, которые необходимо знать при расчете траекторий заряженных частиц.

Введем термин сеточный шаблон, или просто шаблон, означающий конфигурацию узлов, необходимых для проведения расчетов в некотором центральном узле.

Для внутренних узлов подсеток (рис. 1 а) вычисления проводятся по следующей формуле:

$$E_0 = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2h}, \tag{1}$$

где под E_0 понимается E_x или E_y , а под h — h_x или h_y , т.е. шаги подсеток в соответствующих направлениях.

Если узел “0” лежит на границе сопряжения подобластей, то при согласованных подсетках вычисления проводятся по следующей формуле:

$$E_0 = -\frac{1}{h_1 + h_2} \left(\frac{h_1}{h_2} (\varphi_0 - \varphi_1) + \frac{h_2}{h_1} (\varphi_2 - \varphi_0) \right), \tag{2}$$

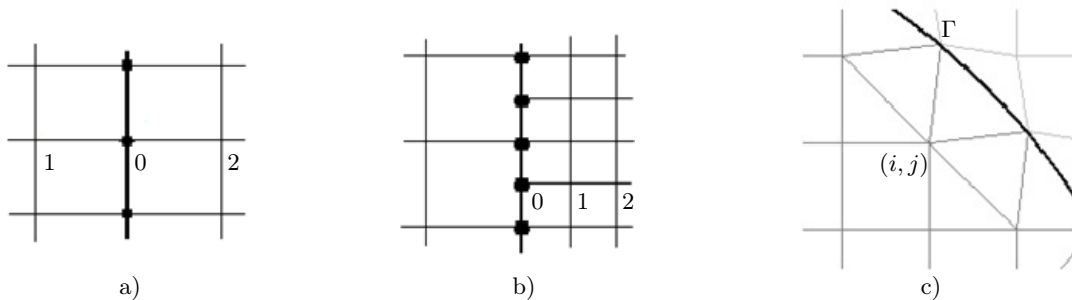


Рис. 1. Расчетные узлы: а) согласованные подсетки; б) несогласованные подсетки; в) вблизи внешней границы
 Fig. 1. Calculation nodes: a) consistent subgrids; b) inconsistent subgrids; c) near the outer boundary



где h_1, h_2 — шаги смежных подсеток. При несогласованных подсетках в совпадающих узлах, принадлежащих границе сопряжения, расчеты проводятся по формуле (2), а в несовпадающих узлах (рис. 1 б) — по формуле

$$E_0 = -\frac{-3\varphi_0 + 4\varphi_1 - \varphi_2}{2h}. \quad (3)$$

Сложнее дело обстоит с околограничными узлами подсеток, вблизи которых нарушается прямоугольность шаблона.

Рассмотрим околограничный узел (i, j) (рис. 1 с). Построим вокруг него шаблон S , включающий помимо центрального узла ближайшие счетные узлы, т.е. $S = \{i + i_1, j + j_1 \mid i_1, j_1 = -1, 0, 1\}$. Отметим, что в зависимости от расположения границы, шаблон может содержать различное число счетных узлов. В общем случае будем строить приближающую функцию $\psi(x, y)$ для потенциала φ в виде полинома

$$\psi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2. \quad (4)$$

Здесь коэффициенты a_m , $m = 0, 1, \dots, 5$, не зависят от x, y и определяются по методу наименьших квадратов, т.е. так, чтобы величина

$$I(a_0, a_1, \dots, a_5) = \sum_{k=1}^{N_S} (\psi_k - \varphi_k)^2 \quad (5)$$

была минимальной. Здесь индекс k указывает на узел рассматриваемого шаблона, N_S — число узлов в шаблоне. Условие минимизации выражения (5) есть

$$\frac{\partial I}{\partial a_m} = 0, \quad (6)$$

что дает систему шести линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов, которая решается методом Гаусса.

Как предполагалось ранее, граница может состоять из отрезков прямых или дуг окружностей. Рассмотрим сначала случай, когда фрагмент границы — отрезок прямой. Введем локальную ортогональную систему координат (λ, η) , где λ отсчитывается вдоль границы от некоторой точки (x_0, y_0) , а η — по нормали к границе.

Координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda &= -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha, \\ \eta &= (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

где α — угол между границей и осью y . Приближающая функция (4) ищется в виде

$$\psi(\lambda, \eta) = a_0 + a_1\lambda + a_2\eta + a_3\lambda\eta + a_4\lambda^2 + a_5\eta^2 \quad (8)$$

с коэффициентами a_k , $k = 0, 1, \dots, 5$, не зависящими от λ, η .

Пусть на рассматриваемом фрагменте границы потенциал φ удовлетворяет условию $\varphi|_{\Gamma} = \varphi_{\Gamma} = \text{const}$. Потребуем, чтобы $\psi(\lambda, \eta)$ удовлетворяла этому граничному условию, т.е.

$$\psi(\lambda, 0) = \varphi_{\Gamma}. \quad (9)$$

Так как это равенство должно выполняться при всех λ , то из (8) получим

$$a_0 = \varphi_{\Gamma}, \quad a_1 = a_4 = 0. \quad (10)$$

Тогда отличными от нуля будут только коэффициенты a_2, a_3, a_5 и соотношение (5) приобретет вид

$$I(a_2, a_3, a_5) = \sum_{k=1}^{N_S} [(a_2 + a_3\lambda_k + a_5\eta_k)\eta_k + \varphi_{\Gamma} - \varphi_k]^2.$$

Применяя (6), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_2 \sum \eta_k^2 + a_3 \sum \lambda_k \eta_k^2 + a_5 \sum \eta_k^3 &= \sum \varphi_k \eta_k - \varphi_{\Gamma} \sum \eta_k, \\ a_2 \sum \lambda_k \eta_k^2 + a_3 \sum \lambda_k^2 \eta_k^2 + a_5 \sum \lambda_k \eta_k^3 &= \sum \varphi_k \lambda_k \eta_k - \varphi_{\Gamma} \sum \lambda_k \eta_k, \\ a_2 \sum \eta_k^3 + a_3 \sum \lambda_k \eta_k^3 + a_5 \sum \eta_k^4 &= \sum \varphi_k \eta_k^2 - \varphi_{\Gamma} \sum \eta_k^2, \end{aligned} \quad (11)$$

решая которую методом исключения Гаусса, находим коэффициенты a_2, a_3, a_5 и, следовательно, приближающую функцию в виде

$$\psi(\lambda, \eta) = \varphi_\Gamma + \eta(a_2 + a_3\lambda + a_5\eta).$$

В случае, когда граница — дуга окружности с радиусом R и центром (x_c, y_c) , введем координаты (β, δ) , связанные с (x, y) соотношениями

$$\delta = \ln \frac{r}{R}, \quad r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}, \quad \cos \beta = \frac{x - x_c}{r}.$$

Основанием для введения логарифма явилось то, что решение одномерной самосогласованной задачи [13, 14] содержит логарифмы.

Приближающую функцию ищем в виде

$$\psi(\beta, \delta) = a_0 + a_1\beta + a_2\delta + a_3\beta\delta + a_4\beta^2 + a_5\delta^2. \tag{12}$$

Как и в линейном варианте, потребуем, чтобы $\psi(\beta, 0)$ удовлетворяла равенству (9), что опять-таки дает (10), а остальные коэффициенты в (12) находим, решая систему линейных алгебраических уравнений, аналогичную (11).

Пусть на рассматриваемом фрагменте границы потенциал φ удовлетворяет условию

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_\Gamma = d. \tag{13}$$

Из данного граничного условия следует, что в приближающих функциях (8), (12)

$$a_3 = 0, \quad a_2 = d.$$

Тогда по методу наименьших квадратов получим систему четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными коэффициентами a_0, a_1, a_4, a_5

$$\begin{aligned} a_0 \sum 1 + a_1 \sum \lambda_k + a_4 \sum \lambda_k^2 + a_5 \sum \eta_k^2 &= \sum \varphi_k - d \sum \eta_k, \\ a_0 \sum \lambda_k + a_1 \sum \lambda_k^2 + a_4 \sum \lambda_k^3 + a_5 \sum \lambda_k \eta_k^2 &= \sum \varphi_k \lambda_k - d \sum \lambda_k \eta_k, \\ a_0 \sum \lambda_k^2 + a_1 \sum \lambda_k^3 + a_4 \sum \lambda_k^4 + a_5 \sum \lambda_k^2 \eta_k^2 &= \sum \varphi_k \lambda_k^2 - d \sum \lambda_k^2 \eta_k, \\ a_0 \sum \eta_k^2 + a_1 \sum \lambda_k \eta_k^2 + a_4 \sum \lambda_k^2 \eta_k^2 + a_5 \sum \eta_k^4 &= \sum \varphi_k \eta_k^2 - d \sum \eta_k^3. \end{aligned}$$

Решая данную систему, построим приближающую функцию в виде

$$\psi(\lambda, \eta) = a_0 + a_1\lambda + d\eta + a_4\lambda^2 + a_5\eta^2.$$

Аналогично строится $\psi(\beta, \delta)$.

Отметим, что построенные приближающие функции могут использоваться для вычисления потенциала в точках расчетной области, не совпадающих с узлами сетки.

Формулы расчета напряженности электрического поля получаются в результате дифференцирования приближающей функции ψ :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \\ E_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

В случае прямолинейного отрезка границы с учетом (7) имеем

$$\begin{aligned} E_x &= -[a_2 \cos \alpha + a_3(\lambda \cos \alpha - \eta \sin \alpha) + 2a_5\eta \cos \alpha], \\ E_y &= -[a_2 \sin \alpha + a_3(\lambda \sin \alpha + \eta \cos \alpha) + 2a_5\eta \sin \alpha]. \end{aligned}$$



Если граница — дуга окружности, то в (13) вместо (λ, η) используются (β, δ) . Тогда

$$E_x = - \left[a_2 \frac{x - x_c}{r^2} + a_3 \frac{\beta(x - x_c) - \delta(y - y_c)}{r^2} + 2a_5 \delta \frac{x - x_c}{r^2} \right],$$

$$E_y = - \left[a_2 \frac{y - y_c}{r^2} + a_3 \frac{\beta(y - y_c) + \delta(x - x_c)}{r^2} + 2a_5 \delta \frac{y - y_c}{r^2} \right].$$

При расчете в точке траектории T по координатам (x, y) , лежащей в прямоугольном сеточном элементе, левый нижний угол которого есть (i, j) , вычисление электрического поля проводится интерполяцией по формуле

$$E(x, y) = (1 - \sigma_i^x)(1 - \sigma_j^y)E_{i,j} + \sigma_i^x(1 - \sigma_j^y)E_{i+1,j} + (1 - \sigma_i^x)\sigma_j^y E_{i,j+1} + \sigma_i^x \sigma_j^y E_{i+1,j+1},$$

где $\sigma_i^x = (x - x_i)/h_i^x$, $\sigma_j^y = (y - y_j)/h_j^y$, $h_i^x = x_{i+1} - x_i$, $h_j^y = y_{j+1} - y_j$ и под E понимается E_x или E_y в узлах прямоугольного шаблона. Для непрямоугольных шаблонов четырехугольный элемент делится на два треугольных кратчайшей диагональю и напряженность электрического поля вычисляется по интерполяционной формуле, которую в координатах $x' = x - x_1$, $y' = y - y_1$ можно записать в виде

$$E(x, y) = E_1 + bx' + cy'.$$

Здесь коэффициенты b, c вычисляются по значениям в вершинах, пронумерованных как 1, 2, 3, треугольника, содержащего точку T , по формулам

$$b = \frac{\sigma_{1,2}^E \sigma_{1,3}^y - \sigma_{1,3}^E \sigma_{1,2}^y}{\sigma_{1,2}^x \sigma_{1,3}^y - \sigma_{1,3}^x \sigma_{1,2}^y}, \quad c = \frac{\sigma_{1,2}^E \sigma_{1,3}^x - \sigma_{1,3}^E \sigma_{1,2}^x}{\sigma_{1,3}^x \sigma_{1,2}^y - \sigma_{1,2}^x \sigma_{1,3}^y}, \quad \sigma_{1,2}^x = x_2 - x_1, \quad \sigma_{1,3}^x = x_3 - x_1,$$

$$\sigma_{1,2}^y = y_2 - y_1, \quad \sigma_{1,3}^y = y_3 - y_1, \quad \sigma_{1,2}^E = E_2 - E_1, \quad \sigma_{1,3}^E = E_3 - E_1.$$

4. Численные эксперименты. Было проведено экспериментальное исследование точности вычисления напряженности электрического поля в узлах квазиструктурированной сетки по разработанным алгоритмам. Для этого рассматривалась модельная задача расчета сферического диода в двумерной постановке. Расчетная область — осесимметричная, ограниченная двумя четвертинками концентрических окружностей с радиусами $R_1 = 0.1$ и $R_2 = 1$, на которых задавались граничные условия для потенциала $\varphi(R_1) = 0$, $\varphi(R_2) = \varphi_{R_2} = 100$. На рис. 2 изображена расчетная область, покрытая используемой квазиструктурированной сеткой.

В узлы сетки рассылалось аналитическое решение рассматриваемой задачи для потенциала электрического поля, создаваемого интенсивным пучком заряженных частиц, стартующих с внутренней окружности, определяемое по формулам [13, 14]:

$$\varphi = \varphi_{R_2} \left(\frac{\alpha(r)}{\alpha(R_2)} \right)^{4/3},$$

$$-\alpha(r) = \mu + 0.3\mu^2 - 0.075\mu^3 + 0.0143182\mu^4 - 0.0021609\mu^5 + \dots, \quad \mu = \ln \frac{r}{R_1}.$$

Аналитическое решение рассматриваемой задачи для напряженности электрического поля E_a получается из выражения для потенциала дифференцированием по r :

$$E_a = -\frac{4}{3} \varphi_{R_2} \left(\frac{\alpha(r)}{\alpha(R_2)} \right)^{1/3} \left(\frac{\alpha'(r)}{\alpha(R_2)} \right),$$

$$\alpha'(r) = -\frac{1}{r} (-1 + 0.6\mu - 0.225\mu^2 + 0.0572728\mu^3 - 0.010845\mu^4 + \dots).$$

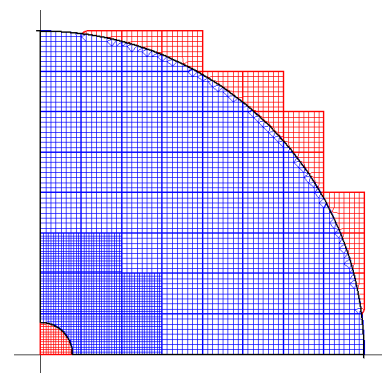


Рис. 2. Модельная задача

Fig. 2. Model problem

Макросетка для построения квазиструктурированной сетки имела размер 8×8 . Подсетки были несогласованными. Вблизи окружности с малым радиусом подобласти, лежащие внутри окружности с радиусом $r < 0.5$, покрывались густыми подсетками, содержащими $n_1 \times n_1$ узлов, а подобласти вблизи большого радиуса $0.5 < r < 1$ — более редкими подсетками $n_2 \times n_2$ при $n_2 = n_1/2$. Рассчитывалась максимальная относительная погрешность $\varepsilon\%$ в процентах по формуле

$$\varepsilon\% = \max_{\Omega_t} \left| \frac{E - E_a}{E_a} \right| 100\%,$$

где $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ — численное значение напряженности в подмножествах узлов Ω_t , $t = 1, 2, 3$. Различаются следующие подмножества: Ω_1 — внутренние узлы, в которых расчет проводится по формулам (1), (2), Ω_2 — узлы, лежащие на границе сопряжения подсеток (расчет по формуле (3)), Ω_3 — граничные и околограничные узлы вблизи окружности большого радиуса (расчет по формулам (14)). Для узлов Ω_3 расчеты проводились в двух вариантах: IC — с учетом граничного условия для потенциала и MS — классический метод наименьших квадратов.

Заметим, что узлы, лежащие вблизи сингулярной окружности малого радиуса, которая является катодом в сферическом диоде, не рассматриваются, так как согласно принятой технологии решения самосогласованных задач [15] они не участвуют в численных расчетах.

Расчеты проводились на трех сетках, имеющих параметры: $n_1 = 16, 32, 64$ и, соответственно, $n_2 = 8, 16, 32$. В табл. 1 приведена погрешность расчетов для узлов Ω_1, Ω_2 , а в табл. 2 — для Ω_3 .

Из данных таблиц видно, что: 1) погрешность уменьшается приблизительно в 4 раза при дроблении сетки в 2 раза, т.е. разработанные алгоритмы имеют второй порядок точности, 2) метод IC специального приближения с учетом граничного условия значительно (более 200 раз) точнее классического метода наименьших квадратов, 3) метод IC специального приближения, применяемый к приграничным узлам, несмотря на нарушение прямоугольного шаблона, дает меньшую погрешность по сравнению с внутренними узлами, в которых прямоугольный шаблон сохраняется.

При помощи пакета прикладных программ ЭРА-DD [16, 17], разработанного авторами, в котором реализованы рассмотренные выше алгоритмы, проведен расчет практической задачи, поставленной НПО Торий (г. Москва). Расчетная область представляет собой парциальную электронную пушку в осесимметричной постановке. На рис. 3 приведены рассчитанные траектории электронов и эквипотенциальные линии.

5. Заключение. Разработаны алгоритмы расчета напряженности электрического поля на адаптивных квазиструктурированных локально-модифицированных сетках при моделировании интенсивных пучков заряженных частиц в сложных 2D областях. Для этого на основе метода наименьших квадратов построены специальные приближающие функции. Особо выделен случай, часто встречающийся на практике, когда на границе задано постоянное значение потенци-

Таблица 1. Погрешность $\varepsilon\%$ для узлов Ω_1, Ω_2

Table 1. Error $\varepsilon\%$ for nodes Ω_1, Ω_2

Узлы Nodes	Параметры сеток Grids parameters		
	$n_1 = 16,$ $n_2 = 8$	$n_1 = 32,$ $n_2 = 16$	$n_1 = 64,$ $n_2 = 32$
Ω_1	7.58E-2	1.98E-2	5.06E-3
Ω_2	5.27E-2	1.31E-2	3.29E-3

Таблица 2. Погрешность $\varepsilon\%$ для узлов Ω_3

Table 2. Error $\varepsilon\%$ for nodes Ω_3

Метод Method	Параметры сеток Grids parameters		
	$n_1 = 16,$ $n_2 = 8$	$n_1 = 32,$ $n_2 = 16$	$n_1 = 64,$ $n_2 = 32$
IC	3.88E-3	9.68E-4	2.57E-4
MS	8.21E-1	6.15E-2	1.52E-2

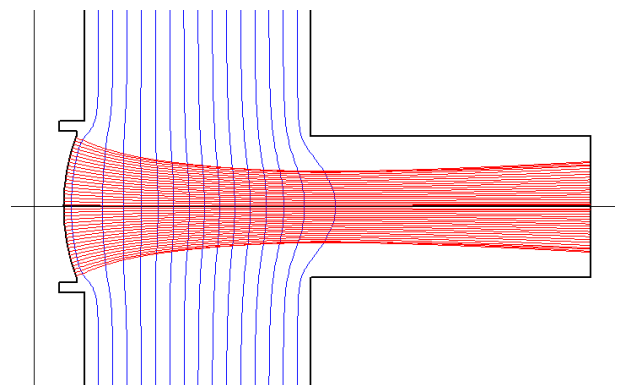


Рис. 3. Траектории и эквипотенциальные линии в парциальной пушке

Fig. 3. Trajectories and equipotential lines in a partial gun



ала или его нормальной производной, значительно (более 200 раз) повышающий точность расчетов по сравнению с классическим методом наименьших квадратов. Приводятся результаты численных экспериментов на модельной задаче, демонстрирующие точность разработанных подходов. Дан пример решения практической электронно-оптической системы с интенсивным пучком.

Список литературы

1. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. Munro E. Numerical simulation methods for electron and ion optics // Nuclear Instruments and Methods in Physical Research. Section A. 2011. **645**, N 1. 266–272. doi 10.1016/j.nima.2010.11.181.
3. Свешников В.М. Численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц // Дисс. на соиск. уч. ст. доктора физ.-мат. наук. Новосибирск, 2006.
4. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
5. Comsol. <https://www.comsol.ru>. Дата обращения: 27 января 2024.
6. ANSYS. <https://www.ansys.com>. Дата обращения: 27 января 2024.
7. Opera. <https://www.3ds.com/ru/produkty-i-uslugi/simulia/produkty/opera>. Дата обращения: 27 января 2024.
8. Астрелин В.Т., Воробьев М.С., Козырев А.Н., Свешников В.М. Численное моделирование работы широкоапертурного ускорителя электронов с сетчатым плазменным эмиттером и выводом пучка в атмосферу // Прикладная механика и техническая физика 2019. **60**, № 5. 3–12. doi 10.15372/PMTF20190501.
9. Козырев А.Н., Свешников В.М. Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц в протяженных электронно-оптических системах // Математическое моделирование. 2022. **34**, № 3. 71–84. doi 10.20948/mm-2022-03-04.
10. Козырев А.Н., Свешников В.М. О построении двумерных локально-модифицированных квазиструктурированных сеток и решении на них краевых задач в областях с криволинейной границей // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2017. **6**, № 2. 5–21. doi 10.14529/cmse170201.
11. Хемминг Р.В. Численные методы. М.: Наука, 1972.
12. Марчук Г.И. Избранные труды. М.: Издательство РАН, 2018.
13. Молоковский С.И., Сушков А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
14. Алямовский И.В. Электронные пучки и электронные пушки. М.: Советское радио, 1966.
15. Свешников В.М. Повышение точности расчета интенсивных пучков заряженных частиц // Прикладная физика. 2004. № 1. 55–65. <https://applphys.orion-ir.ru/appl-04/04-1/04-1-10r.htm>. Дата обращения: 27 января 2024.
16. Беляев Д.О., Козырев А.Н., Свешников В.М. Пакет прикладных программ ЭРА-DD для решения двумерных краевых задач на квазиструктурированных сетках // Вестник НГУ, серия Информационные технологии. 2010. **8**, № 1. 3–11.
17. Козырев А.Н., Свешников В.М. Программный комплекс для расчета интенсивных пучков заряженных частиц на квазиструктурированных сетках. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2014618881, 01.09.2014.

Поступила в редакцию
20 ноября 2023 г.

Принята к публикации
11 декабря 2023 г.

Информация об авторах

Александр Николаевич Козырев — науч. сотр.; Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр-кт акад. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Виктор Митрофанович Свешников — д.ф.-м.н., гл. науч. сотр.; Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр-кт акад. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. V. A. Syrovoy, *Introduction to the Theory of Intense Beams of Charged Particles* (Energoatomizdat, Moscow, 2004) [in Russian].
2. E. Munro, “Numerical Simulation Methods for Electron and Ion Optics,” *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Section A*. **645** (1), 266–272 (2011). doi [10.1016/j.nima.2010.11.181](https://doi.org/10.1016/j.nima.2010.11.181).
3. V. M. Sveshnikov, *Numerical Modeling of Intense Charged Particle Beams*, Doctoral Thesis in Physics and Mathematics (Inst. Comput. Math. Math. Geophys., Novosibirsk, 2006) [in Russian].
4. V. P. Ilyin, *Numerical Methods for Solving Problems in Electrophysics* (Nauka, Moscow, 1985) [in Russian].
5. Comsol. <https://www.comsol.com>. Cited January 27, 2024.
6. ANSYS. <https://www.ansys.com>. Cited January 27, 2024.
7. Opera. <https://www.3ds.com/ru/produkty-i-uslugi/simulia/produkty/opera>. Cited January 27, 2024.
8. V. T. Astrelin, M. S. Vorobyov, A. N. Kozyrev, and V. M. Sveshnikov, “Numerical Simulation of the Operation of a Wide-Aperture Electron Gun with a Grid Plasma Emitter and Beam Output into the Atmosphere,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **60** (5), 3–12 (2019) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **60** (5), 785–792 (2019)]. doi [10.1134/S0021894419050018](https://doi.org/10.1134/S0021894419050018).
9. A. N. Kozyrev and V. M. Sveshnikov, “Mathematical Modeling of Intense Charged Particles Beams in Extended Electron-Optical Systems,” *Mat. Model.* **34** (3), 71–84 (2022). doi [10.20948/mm-2022-03-04](https://doi.org/10.20948/mm-2022-03-04).
10. A. N. Kozyrev and V. M. Sveshnikov, “On the Construction of Two-Dimensional Local-Modified Quasistructured Grids and Solving on Them Two-Dimensional Boundary Value Problem in the Domains with Curvilinear Boundary,” *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Vychisl. Mat. Inf.* **6** (2), 5–21 (2017). doi [10.14529/cmse170201](https://doi.org/10.14529/cmse170201).
11. R. W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1962; Nauka, Moscow, 1972).
12. G. I. Marchuk, *Selected Works*, Vols. 1–3 (Ross. Akad. Nauk, Moscow, 2018) [in Russian].
13. S. I. Molokovsky and A. D. Sushkov, *Intensive Electron and Ion Beams* (Energoatomizdat, Moscow, 1991) [in Russian].
14. I. V. Aliamovskii, *Electron Beams and Electron Guns* (Sovetskoe Radio, Moscow, 1966) [in Russian].
15. V. M. Sveshnikov, “Calculation of the Intensive Charged Particle Beams with Increased Accuracy,” *Proc. SPIE*. **5398**, 34–50 (2004).
16. D. O. Belyaev, A. N. Kozyrev, and V. M. Sveshnikov, “Program Package ERA-DD for Solving Two-Dimensional Boundary Value Problems on Quasi-Structured Grids,” *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Inform. Tekhnol.* **8** (1), 3–11 (2010).
17. A. N. Kozyrev and V. M. Sveshnikov, *Software Package for Calculating Intense Beams of Charged Particles on Quasi-Structured Grids*, Certificate of RF Computer Program Registration No. 2 014 618 881. Date of Registration: September 1, 2014.

Received
November 20, 2023

Accepted for publication
December 11, 2023

Information about the authors

Alexander N. Kozyrev — Researcher; Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Ac. Lavrentieva prospekt, 6, 630090, Novosibirsk, Russia.

Victor M. Sveshnikov — Dr. Sci., Chief Researcher; Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Ac. Lavrentieva prospekt, 6, 630090, Novosibirsk, Russia.