



doi 10.26089/NumMet.v25r105

УДК 519.63

## О погрешностях в PIC-методе при моделировании ленгмюровских колебаний

**Е. В. Чижонков**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
механико-математический факультет, Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-7194-8451, e-mail: [chizhonk@mech.math.msu.su](mailto:chizhonk@mech.math.msu.su)

**Аннотация:** Построена тестовая задача, моделирующая нелинейные ленгмюровские колебания, возбуждаемые коротким мощным лазерным импульсом. Задача имеет аналитическое решение в лагранжевых координатах, которое может быть трансформировано в эйлеровы координаты, правда в специфической неявной форме. Для различных вариантов метода частиц в ячейке (particle-in-cell, PIC-метод), получены аналитические оценки погрешности, возникающей при сборке заряда от макрочастиц в центры ячеек. Кроме того, проведены численные эксперименты, иллюстрирующие качество этих оценок на модельной задаче. Дополнительно предложен новый разностный метод для модельной задачи и проведено сравнение его точности с этапом сборки заряда из PIC-метода.

**Ключевые слова:** бесстолкновительная плазма, нелинейные ленгмюровские колебания, аналитическое решение, численное моделирование, PIC-метод, разностный метод, анализ погрешностей.

**Для цитирования:** Чижонков Е.В. О погрешностях в PIC-методе при моделировании ленгмюровских колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 1. 47–63. doi 10.26089/NumMet.v25r105.

---

## On errors in the PIC-method when modeling Langmuir oscillations

**Evgenii V. Chizhonkov**

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0002-7194-8451, e-mail: [chizhonk@mech.math.msu.su](mailto:chizhonk@mech.math.msu.su)

**Abstract:** A test problem is constructed that simulates nonlinear Langmuir oscillations excited by a short powerful laser pulse. The problem has an analytical solution in Lagrangian coordinates, which can be transformed into Eulerian coordinates, however, in a specific implicit form. For various variants of the particle-in-cell method (PIC-method), analytical estimates of the error that occurs when the assembly of the charge from the macroparticles into the centers of the cells. In addition, numerical experiments have been carried out to illustrate the quality of these estimates on a model problem. Additionally, a new difference method for the model problem is proposed and its accuracy is compared with the charge assembly stage from the PIC-method.

**Keywords:** collisionless plasma, nonlinear Langmuir oscillations, analytical solution, numerical modeling, PIC-method, difference method, error analysis.

**For citation:** E. V. Chizhonkov, “On errors in the PIC-method when modeling Langmuir oscillations,” Numerical Methods and Programming. 25 (1), 47–63 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r105.

---



**1. Введение.** Понимание сложного поведения плазмы привело к важным достижениям в области космической физики, термоядерной энергетики и создания мощных микроволновых излучений и крупномасштабных ускорителей частиц [1]. При этом изучение поведения плазмы с использованием традиционных экспериментальных методов является сложной задачей из-за ее высокой динамичности, что побуждает к разработке различных методов моделирования. Теоретическим фундаментом современного моделирования плазменных процессов, безусловно, является уравнение Власова [2]. Однако, как и большинство кинетических уравнений, оно требует не только нетривиальных алгоритмов для получения приближенного решения, но и весьма значительных объемов вычислений для их реализации.

Для численного решения уравнения Власова, как правило, используются два основных подхода: на основе частиц и на основе сеток. Подход на основе сеток часто называют эйлеровым. Хорошие обзоры сеточных эйлеровых методов можно найти в работах [3–5]. В свою очередь, PIC-метод [6–8] в настоящее время является наиболее популярным для моделирования различного рода плазменных эффектов. Метод физически нагляден, достаточно прост в реализации. Фактически он использует характеристики уравнения Власова для моделирования динамики большого, но конечного числа макрочастиц. Такой подход весьма эффективен в вычислительном отношении и подходит для задач большой размерности, однако в нем присутствуют специфические численные шумы (погрешности!). Для их анализа весьма полезны модельные постановки задач, имеющие точные аналитические решения. Такие тестовые постановки позволяют не только оценить качественные свойства используемых приближенных алгоритмов, но и количественно охарактеризовать точность получаемого приближенного решения в зависимости от выбранных сеточных параметров, количества частиц в модели и т.п.

В настоящей работе для уравнений холодной плазмы, являющихся точным следствием системы уравнений Власова–Максвелла, рассматривается постановка задачи о ленгмюровских колебаниях [9]. Для нее выписано аналитическое решение сначала в лагранжевых переменных, а затем оно трансформировано в эйлеровы переменные, что позволяет эффективно отслеживать поведение погрешностей на различных этапах PIC-метода. Настоящая работа посвящена анализу процедуры сборки заряда в узлы сетки на основании информации о текущем расположении макрочастиц. Следует отметить, что в пространственно одномерном случае имеются примеры общей теории погрешностей PIC-метода [10, 11]. Нас же здесь интересует только погрешность для самой чувствительной функции — электронной плотности. Такие частные теоретические исследования также известны [12], но без сравнения с аналитическими решениями.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описаны гидродинамические уравнения и начальные условия, соответствующие возбуждению ленгмюровских колебаний коротким мощным лазерным импульсом. В разделе 3 для сформулированной задачи приведена теорема существования и единственности решения, а также — аналитические формулы в лагранжевых координатах, для которых предложен алгоритм их трансформации в эйлеровы координаты. Целевая модельная (тестовая!) задача оформлена как фрагмент  $2\pi$ -периодической по времени задачи Коши со специально подобранными начальными данными для исходной гиперболической системы уравнений. Раздел 4 содержит известные варианты PIC-метода, для которых получены аналитические оценки погрешности для процедуры сборки заряда и приведены численные эксперименты, иллюстрирующие качество этих оценок на модельной задаче. Наконец, в разделе 5 приводится описание нового эйлерова метода для модельной задачи, а также его сравнение по точности с этапом сборки заряда из PIC-метода. В Заключение суммируются результаты проведенных исследований и возможности предложенного подхода к тестированию.

**2. Уравнения и начальные условия.** Будем считать плазму нерелятивистской электронной жидкостью, пренебрегая рекомбинационными эффектами и движением ионов. Тогда в рамках одной из простейших моделей плазмы, которую часто называют уравнениями гидродинамики “холодной” плазмы [13, 14], ее плоские одномерные колебания (их часто называют “ленгмюровскими” [9]) можно описать безразмерной системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -E, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + V \frac{\partial E}{\partial x} = V, \end{cases} \quad (1)$$

где  $V$  — скорость электронов,  $E$  — электрическое поле. К системе (1) обычно добавляют уравнение

$$N(x, t) = 1 - \frac{\partial E(x, t)}{\partial x}, \quad (2)$$

характеризующее безразмерную плотность электронов  $N$ , что связано с традиционным описанием важнейших процессов в плазме. Формула (2) является частным случаем теоремы Гаусса [15], которая в дифференциальной размерной форме имеет вид  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n - n_0)$ , где  $n_0$  — значение невозмущенной плотности электронов,  $e$  — заряд электрона. Вывод уравнений (1), (2) можно найти в различных источниках [15–17]. Их связь с уравнениями для моментов кинетического уравнения Власова можно найти в [18] для рассматриваемого случая “холодной” плазмы.

Далее будет представлять интерес в полуплоскости  $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$  решение задачи Коши для уравнений (1) с начальными условиями

$$V(x, 0) = V_0(x), \quad E(x, 0) = E_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Рассмотрим возбуждение ленгмюровских колебаний с помощью короткого мощного лазерного импульса [19]. Согласно кинетической модели распространения лазерных импульсов в плазме [20, 21] вынужденное изменение электрического поля можно описать, используя градиент квадрата модуля медленно изменяющейся комплексной амплитуды высокочастотного лазерного поля (так называемой “огibaющей”). При этом, если импульс имеет гауссово пространственное распределение, формулу возмущающего электрического поля удобно задать в виде

$$E_0(x) = \alpha x \exp\left\{-2\frac{x^2}{\rho_*^2}\right\}, \quad \alpha = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2, \quad (4)$$

где параметры  $\rho_*$  и  $a_*$  характеризуют масштаб области локализации и максимальную величину  $E_{\max} = a_*^2/(\rho_* 2\sqrt{e}) \approx 0.3a_*^2/\rho_*$  электрического поля. Здесь  $e = 2.71828\dots$  — основание натурального логарифма. Вид функции (4) выбран из соображений, что подобное возмущение электрического поля может возбуждаться в разреженной плазме лазерным импульсом с частотой  $\omega_l \gg \omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m}\right)^{1/2}$ , где  $m$  — масса электрона, при его фокусировке в линию (этого можно добиться применением цилиндрической линзы [22]). В свою очередь, начальное пространственное распределение скорости электронов для простоты полагают однородным, т.е.

$$V_0(x) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что исходные уравнения безразмерны так, что плазменная частота  $\omega_p$  равна единице, т.е. период ленгмюровских колебаний равен  $2\pi$ . Поэтому процесс колебаний в рамках нерелятивистской холодной плазмы кратко состоит в следующем. Начальное пространственное распределение электронной плотности  $N(x, 0)$ , имеющее один глобальный минимум в качестве следствия формул (2) и (4), приводит к избытку положительного заряда в окрестности начала координат (т.е. при  $x = 0$ ); ему соответствует иллюстрация на рис. 1 а. По этой причине начинается движение электронов в направлении центра области, что через четверть периода приводит к равносному

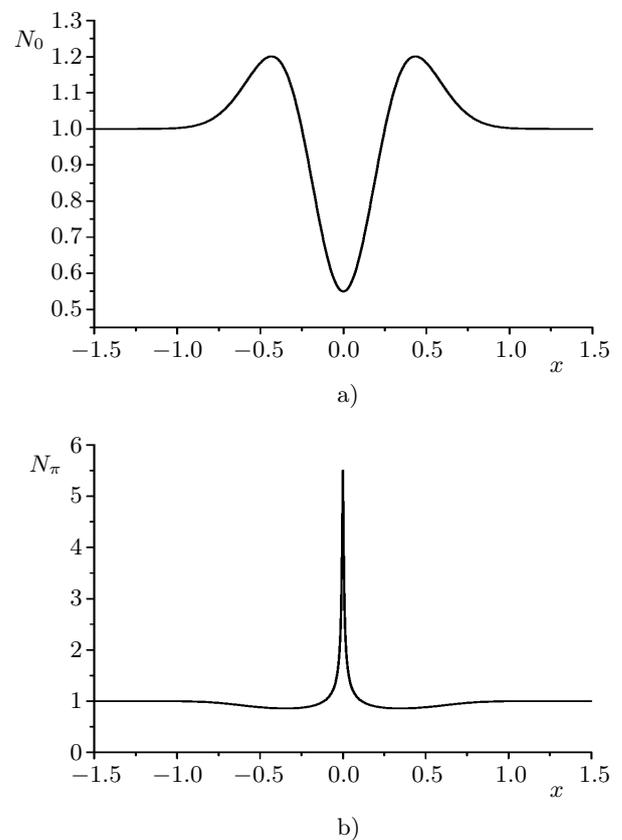


Рис. 1. Экстремальные распределения плотности электронов  $N(x, t)$  при  $\alpha = 0.45$ ,  $\rho_* = 0.5$ : а) для  $t = 2\pi n$ ; б) для  $t = \pi(2n + 1)$ ,  $n$  — целое

Fig. 1. Extreme electron density distributions  $N(x, t)$  at  $\alpha = 0.45$ ,  $\rho_* = 0.5$ : а) for  $t = 2\pi n$ ; б) for  $t = \pi(2n + 1)$ ,  $n$  — integer

распределению электронов  $N(x, \pi/2) \equiv 1$ . Однако электроны движутся с ускорением и “проскакивают” положение равновесия, что в середине периода колебаний порождает распределение плотности с глобальным максимумом также при  $x = 0$ ; ему соответствует иллюстрация на рис. 1 б. В свою очередь, сформировавшийся избыток электронов в центре области приводит к их движению в обратном направлении, и еще через половину периода пространственное распределение электронной плотности возвращается к начальному (как при  $t = 0$ ). Этот процесс может продолжаться бесконечно долго, если отсутствуют факторы ему препятствующие.

**3. Аналитическое решение уравнений в неявной форме.** Для рассматриваемой постановки принципиально важной является теорема существования глобального по времени решения [23] (подробные доказательства приведены в [24]).

**Теорема.** Пусть начальные данные (3) принадлежат классу  $C^2(\mathbb{R})$ . Для существования и единственности непрерывно дифференцируемого по обеим переменным  $2\pi$ -периодического по времени при всех  $t > 0$  решения  $V(x, t)$ ,  $E(x, t)$  задачи (1), (3) необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке  $x \in (-\infty, \infty)$  было выполнено неравенство

$$(V'_0(x))^2 + 2E'_0(x) - 1 < 0. \tag{6}$$

Если же существует хотя бы одна точка  $x$ , для которой выполняется неравенство, противоположное (6), то в течение конечного времени производные решения обращаются в бесконечность.

Из доказательства теоремы вытекает строгая положительность и отделенность от нуля функции электронной плотности:

$$N(x, t) > \frac{1}{2}.$$

Следует также отметить, что если начальные условия (3) нечетны относительно оси симметрии области, т.е. прямой  $x = 0$ , то в этом случае решение системы (1) будет оставаться нечетным в течение всего времени его существования [25], а плотность, соответственно, — четной.

Для построения аналитических решений запишем уравнения (1) в характеристической форме:

$$\frac{dV}{dt} = -E, \quad \frac{dE}{dt} = V, \quad \frac{dx}{dt} = V. \tag{7}$$

Если начальные условия (3) — однородные, то все характеристики — вертикальные прямые  $y = \text{const}$ , соответствующие начальным “равновесным” координатам характеристик  $x(0) = y$ . В случае неоднородных начальных условий удобно ввести функцию смещения  $R(y, t)$  для каждой характеристики, исходящей из “равновесной” координаты  $y$ , т.е.

$$x(t) = y + R(y, t). \tag{8}$$

Функция смещения для изучения плазменных колебаний была впервые введена в работе [26], ее главным свойством при использовании обычных декартовых координат является простая связь с функцией, описывающей электрическое поле  $E(x, t)$ , а именно:

$$R(y, t) = E(x(t), t), \tag{9}$$

где  $x(t)$  и  $y$  связаны соотношением (8).

Для функций  $R$  и  $V$  система уравнений имеет более простой вид

$$\frac{dV}{dt} = -R, \quad \frac{dR}{dt} = V, \tag{10}$$

при этом текущая (переменная!) координата характеристики  $x(t)$  определяется соотношением (8).

Начальные данные для системы ОДУ (10) непосредственно следуют из (9) и (4), (5):

$$V(y, 0) = 0, \quad R(y, 0) = E_0(x(0)). \tag{11}$$

Аналогично (7) сначала получим из исходной системы (1) продолженную систему, описывающую поведение производных

$$W(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}, \quad D(x, t) = \frac{\partial E(x, t)}{\partial x},$$



а затем перепишем ее в характеристической форме:

$$\frac{dW}{dt} = -D - W^2, \quad \frac{dD}{dt} = (1 - D)W. \quad (12)$$

Начальные данные для системы ОДУ (12) получаются дифференцированием (4), (5):

$$W(y, 0) = \beta \quad (= 0), \quad D(y, 0) = \gamma \quad (= E'_0(x(0))). \quad (13)$$

Аналитические формулы для решения продолженной системы, соответствующие теореме существования, известны (см. [16, 17]).

Пусть величина  $s = (1 - \gamma)/\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}$  удовлетворяет условию  $s > 1$ , тогда решение (12) с начальными условиями (13) имеет вид

$$W(t) = \frac{\cos(t + \theta)}{s + \sin(t + \theta)}, \quad D(t) = \frac{\sin(t + \theta)}{s + \sin(t + \theta)}, \quad (14)$$

где

$$\cos \theta = \frac{\beta}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}. \quad (15)$$

С помощью аналитических решений задач (10)–(13) можно в произвольный момент времени построить точные решения уравнений (1), (2), правда они будут определены в виде неявно заданных функций. Поясним этот момент подробнее и заметим, что в работе [17] подобный подход уже использовался для построения и анализа приближенного метода высокой точности при моделировании колебаний холодной плазмы.

Рассмотрим решение задачи (10), (11), которое имеет вид

$$V(y, t) = -A(y) \sin t, \quad R(y, t) = A(y) \cos t,$$

где  $A(y) = E_0(x(0))$  и  $x(0) = y + A(y) \equiv y + E_0(x(0))$ . В качестве полезного примера изучим решение при  $t = \pi/2$ , когда  $R(y, \pi/2) \equiv 0 \forall y$ , и, следовательно,  $E(x, \pi/2) \equiv 0$ ,  $N(x, \pi/2) \equiv 1 \forall x$ . В этот момент времени заканчивается трансформация нулевых значений скорости в неоднородные, и, соответственно, наоборот: неоднородных начальных условий в нулевые для электрического поля. Для скорости  $V(x, \pi/2)$  введем обозначение  $V_{\text{init}}(x)$  и обратим внимание, что она задается неявно:

$$V_{\text{init}}(y) = -E_0(z) \quad \forall y = z - E_0(z), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Обратимость аргумента формально представляет некоторые трудности, однако с вычислительной точки зрения они легко преодолимы, хотя и требуют учета дополнительных необременительных условий.

В работе рассматривается задача Коши, формально заданная на всей прямой  $x \in \mathbb{R}$ . Однако область численного решения в любом случае придется ограничивать, например до отрезка  $[-d, d]$  по причине симметрии (нечетности!) начальных данных. В силу экспоненциального затухания функции  $E_0(x)$ , достаточно положить  $d = 4.5\rho_*$ . В этом случае имеем  $\exp^2\{-d^2/\rho_*^2\} \approx 2.5768 \cdot 10^{-18}$ . Это означает, что при вычислениях с двойной точностью величина скачка начальной функции  $E_0$  в точках  $x = \pm d$  соизмерима с машинной точностью, т.е. с обычной погрешностью округления данных. Другими словами, при численном моделировании колебаний эффект обрезания начальных условий замечен совершенно не будет, что полностью соответствует понятию “искусственной границы”. Учитывая сказанное, параметр  $d$ , характеризующий искусственную границу, возьмем “с запасом” —  $d = 5\rho_*$ .

Теперь на отрезке  $[-d, d]$  возьмем достаточно подробную равномерную сетку  $z_k = (k - 1)h_z - d$ ,  $1 \leq k \leq N_z$ ,  $h = 2d/(N_z - 1)$ . Используя в узлах  $y_k = z_k - E_0(z_k)$  значения  $V_{\text{init}}(y_k) = -E_0(z_k)$ , можно построить кубический естественный интерполяционный сплайн  $S_3(z)$  [27]. При  $N_z$  порядка  $10^4$ , в силу оценки погрешности сплайна вида  $O(h_z^4)$ , для произвольного значения  $x \in [-d, d]$  приближенное сплайн-значение  $S_3(x)$  будет с машинной точностью совпадать со значением  $V_{\text{init}}(x)$ .

Обратим внимание, что в силу теоремы существования можно изучать аналитически и численно решение уравнений (1) с новыми начальными условиями

$$\hat{V}(x, 0) = V_{\text{init}}(x), \quad \hat{E}(x, 0) = 0, \quad (17)$$

которое есть формальный сдвиг по времени на  $\pi/2$  ранее рассмотренного решения. Однако условия (17) обладают рядом преимуществ по сравнению с условиями (3). В первую очередь, они связаны с удобством задания начальных условий для РИС-метода (равномерное распределение частиц!), а также — с совпадением начальных координат характеристик в переменных  $\hat{x}(t)$  и  $\hat{y}$

$$\hat{x}(t) = \hat{y} + \hat{R}(\hat{y}, t), \quad (18)$$

так как  $\hat{N}(\hat{x}(0), 0) \equiv 1$  и  $\hat{R}(\hat{y}, 0) \equiv 0$ . На рис. 2 изображены неоднородные начальные условия для обеих постановок: для первоначальной —  $E_0(x)$  и для новой —  $V_{\text{init}}(x)$ .

Получим для новой постановки неявную аналитическую формулу электронной плотности  $\hat{N}(x, t)$ . Сначала определим производную функции  $V_{\text{init}}(x)$ , которую удобно обозначить через  $DV_{\text{init}}(x)$ :

$$DV_{\text{init}}(y) = -\frac{E'_0(z)}{1 - E'_0(z)} \quad \forall y = z - E_0(z), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

А затем, используя формулы (14), (15), выведем соотношение

$$\hat{N}(y, t) = \frac{1}{1 + DV_{\text{init}}(y) \sin t} \quad \forall y = z + V_{\text{init}}(z) \sin t, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Функция (20) будет полезна в дальнейшем для численных экспериментов.

**4. РИС-метод.** Рассмотрим, как и выше, одномерную математическую модель плазмы, зафиксировав в качестве области локализации колебаний отрезок  $[-d, d]$ ,  $d = 5\rho_*$ . Будем считать, что она покрыта равномерной сеткой из центров ячеек размера  $h_g$ :

$$c_k = (k - 1)h_g - d, \quad 1 \leq k \leq M_g, \quad h_g = 2d/(M_g - 1).$$

Чтобы центральный узел с номером  $k_* = (M_g + 1)/2$  совпадал с началом координат ( $c_{k_*} = 0$ ), будем полагать  $M_g$  нечетным.

В соответствии с начальными условиями (17) при  $t = 0$  электрическое поле отсутствует, т.е.  $\hat{E}_0(x) = 0$ ,  $\hat{N}_0(x) = 1$ . Поэтому удобно расположить все частицы, имеющие координаты  $x_i$ , на одинаковом расстоянии  $h_p$ :

$$x_{i+1} - x_i = h_p, \quad 1 \leq i \leq M_p - 1.$$

Зафиксируем заряд каждой частицы как  $h_p = h_g/l$ ,  $l$  — параметр. При целом  $l$  это число можно считать количеством частиц в ячейке. Остановимся на следующем расположении частиц (рис. 3):

$$x_{i+M_p/2} = (i - 1/2)h_p, \quad x_i = -x_{M_p+1-i}, \quad 1 \leq i \leq M_p/2. \quad (21)$$

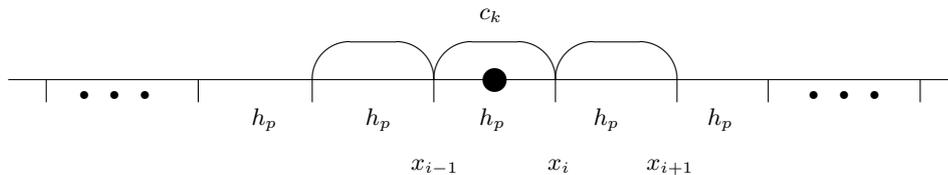


Рис. 3. Модельное стартовое расположение частиц

Fig. 3. Model starting arrangement of particles

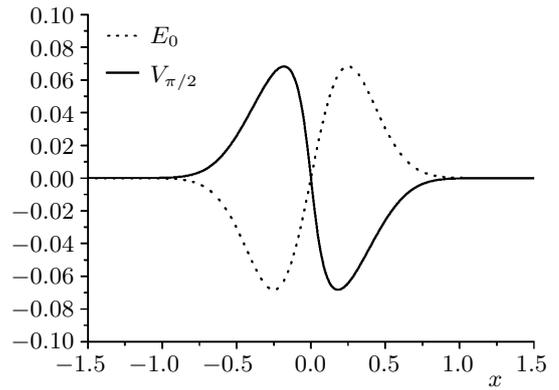


Рис. 2. Пространственные распределения функций  $E_0(x)$  и  $V_{\pi/2}(x) = V_{\text{init}}(x)$

Fig. 2. Spatial distributions of the functions  $E_0(x)$  and  $V_{\pi/2}(x) = V_{\text{init}}(x)$



Учитывая симметрию расположения частиц относительно начала координат, будем полагать  $M_p$  четным. Отметим, что отрицательно заряженные частицы (“электроны”), имеющие при  $t = 0$  координаты (21), будут перемещаться, а положительно заряженные частицы (“ионы”) с теми же исходными координатами будут оставаться неподвижными, сохраняя в целом нулевой заряд плазмы.

Напомним, что в безразмерной форме динамика движущихся частиц, т.е. их скорости и координаты, описывается уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i, \quad \frac{dV_i}{dt} = -E(x_i, t), \quad 1 \leq i \leq M_p.$$

При этом сила  $E(x_i, t)$ , действующая на частицу, определяется с помощью интерполяционной процедуры для функции  $E(x, t)$ , заданной в центрах ячеек  $c_k$ ,  $1 \leq k \leq M_g$ . В свою очередь, значения  $E(c_k, t)$  вычисляются с помощью потенциала  $\varphi(x, t)$ , удовлетворяющего уравнению (сравни с (2))

$$-\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = 1 - N(x, t), \tag{22}$$

и равенства  $E(x, t) = -\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$ .

Таким образом, PIC-метод — это комбинация лагранжевой процедуры для динамики частиц (характеристик уравнения (1)) и эйлеровой процедуры типа обычного метода сеток для потенциала электрического поля (2). Причем легко заметить, что решения дифференциальных уравнений (1), (2) и PIC-метода совпадают. По этой причине удобно воспользоваться аналитическими решениями (16), (19), (20) из предыдущего раздела с целью анализа погрешностей PIC-метода.

Наибольший интерес представляет процедура “сборка заряда” (*particle deposition*), когда в момент времени  $t$  по известным координатам частиц  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq M_p$ , вычисляется плотность  $N(x, t)$  в центрах ячеек  $c_k$ ,  $1 \leq k \leq M_g$ . Напомним, что если задана интерполяционная функция  $W(x)$ , определяющая конкретный способ сборки заряда, то в центрах ячеек  $c_k$  плотность заряда определяется формулой

$$N(c_k, t) = \frac{1}{h_g} \sum_{i=1}^{M_p} q_i W(c_k - x_i),$$

где частицы с координатами  $x_i$  имеют заряды  $q_i$ .

**4.1. Оценка погрешности для метода CIC.** В вычислительной практике применяются несколько процедур сборки заряда, которые имеют устоявшиеся аббревиатуры названий (см., например, [6, 8]) — NGP, CIC, TSC и т.п. Сначала мы рассмотрим самую популярную версию сборки CIC с интерполяционной функцией вида [6, С. 126]

$$W_{\text{CIC}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{h_g}, & \text{при } |x| \leq h_g, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{23}$$

Легко заметить, что если координата заряда  $x$  принадлежит отрезку  $[c_k, c_{k+1}]$ , то сам заряд распределяется между этими центрами ячеек с помощью обратной линейной интерполяции.

Пусть в некоторый момент времени  $t$  в центре ячейки  $c_k$  плотность заряда имеет точное значение  $N$ . Без ограничения общности можно считать этот центр началом координат  $x = 0$ . Пусть шаг  $h_g$  настолько мал, что с достаточной степенью точности выполнено приближенное равенство

$$\hat{x}_i(t) \simeq x_i/N$$

для всех частиц, находящихся на отрезке  $[-h_g, h_g]$ , что означает равномерное сгущение частиц при  $N > 1$  (или — разрежение при  $N < 1$ ). Посчитаем количество частиц на  $[0, h_g]$ : из неравенства  $\hat{x}_{i^*}(t) \leq h_g$  имеем  $i^* = [N h_g + 1/2]$ , где целая часть числа  $b$  обозначена  $[b]$ .

Используя удобное модельное расположение стартовых координат (21), вычислим в центре ячейки  $c_{k^*} = 0$  суммарный заряд от одинаково заряженных частиц ( $q_i = h_p$ ), находящихся справа от центра:

$$Z = h_p \sum_{i=1}^{i^*} \left(1 - \frac{|\hat{x}_i(t)|}{h_g}\right) = h_p i^* \left(1 - \frac{i^*}{2l N}\right).$$

Теперь, учитывая симметрию начального расположения частиц, получим полное значение плотности в нуле, соответствующее методу CIC, т.е. для  $k = k_*$  справедливо

$$N_{\text{CIC}}(c_k, t) = \frac{2}{h_g} Z,$$

что приводит к явной формуле для погрешности:

$$ERR_{\text{CIC}}(c_k, t) = \hat{N}(c_k, t) - N_{\text{CIC}}(c_k, t) = \frac{1}{4l^2 N}. \tag{24}$$

Здесь для удобства параметр  $l$  выбирался так, чтобы значение  $(lN + 1/2)$  оказалось целым.

Обратим внимание, что рассмотренный центр ячейки ( $x = 0$ ) является единственной точкой, в которой электронная плотность принимает все значения из диапазона

$$[N_{\min}, N_{\max}] \equiv [1 - \alpha, (1 - \alpha)/(1 - 2\alpha)]$$

(см. формулу (4) и рис. 1), что следует из формулы [16]

$$N(x = 0, t) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha(1 - \cos t)}, \quad \text{где } \alpha = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2.$$

Поэтому, выбирая в (24) наименьшее значение  $N$ , получим оценку сверху для погрешности процедуры сборки заряда CIC:

$$ERR_{\text{CIC}} = \max_{c_k, t} |\hat{N}(c_k, t) - N_{\text{CIC}}(c_k, t)| \leq \frac{1}{4l^2 N_{\min}} \equiv O(l^{-2}). \tag{25}$$

Напомним, что  $c_k$  — набор центров ячеек, в которых определяется электронная плотность для дальнейшего использования в PIC-методе.

Полученная оценка при достаточно малых  $h_g$  уточняет результат [12] (см. также [8, С. 69–71]): в оценке (25) константа в асимптотике  $O(l^{-2})$  примерно в 6 раз меньше.

В целях иллюстрации приведем результаты численных экспериментов. Положим

$$\alpha = 0.45, \quad \rho_* = 0.5, \quad M_g = 10^5 + 1$$

и возьмем  $l$  в качестве параметра. На рис. 4 а изображена динамика погрешности при  $l = 11$  — величины

$$\max |ERR(c_k, t)| = \max_{c_k} |\hat{N}(c_k, t) - N_{\text{CIC}}(c_k, t)|,$$

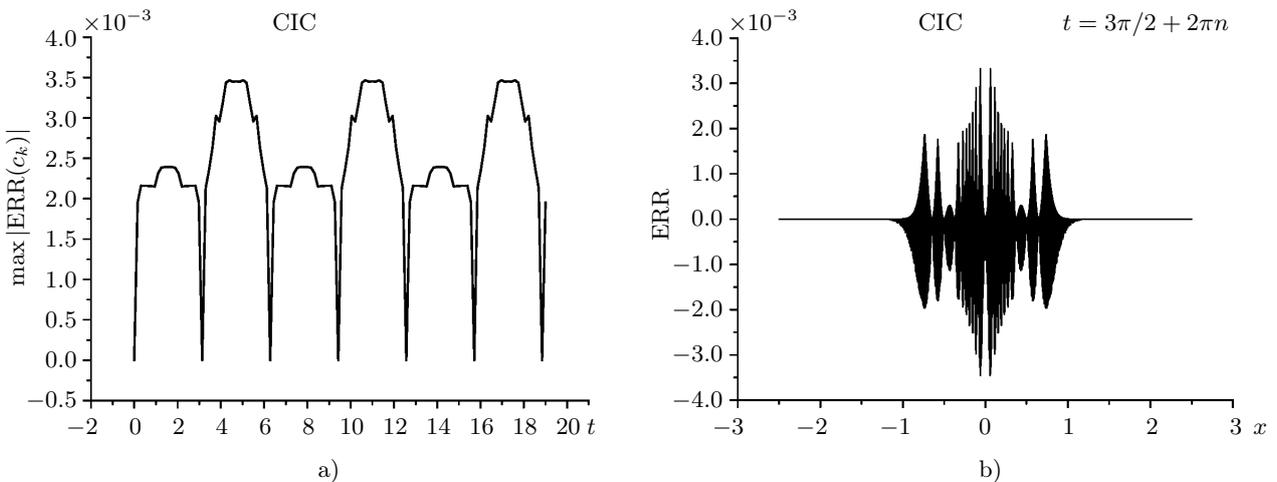


Рис. 4. Погрешности при сборке заряда по методу CIC при  $\alpha = 0.45, \rho_* = 0.5$ : а) динамика равномерной нормы; б) пространственное распределение для моментов времени  $t = 3\pi/2 + 2\pi n, n$  — целое

Fig. 4. Errors in charge assembly by the CIC method at  $\alpha = 0.45, \rho_* = 0.5$ : а) dynamics of a uniform norm; б) spatial distribution for time moments  $t = 3\pi/2 + 2\pi n, n$  — integer



где  $\hat{N}(c_k, t)$  вычислялась по формуле (20). Легко заметить, что численное значение погрешности не превышает величины  $3.5 \cdot 10^{-3}$ . В свою очередь, при  $l = 5$  аналогичное численное значение погрешности не превышает величины  $1.5 \cdot 10^{-2}$ . Оба указанных значения хорошо согласуются с аналитической оценкой (25).

Следует отметить, что сама погрешность  $\forall t$  имеет негладкий характер. На рис. 4 б приведено пространственное распределение погрешности для моментов времени  $t_n = 3\pi/2 + 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , когда наблюдается наименьшее значение плотности при  $x = 0$ . Подобное поведение погрешности может оказать серьезное негативное влияние на вычисление сил, приводящих в движение частицы, т.е. на решение уравнения для потенциала (22) с последующим дифференцированием.

Уточним, что в процессе численного эксперимента анализировалась только погрешность процедуры сборки заряда СИС, т.е. сами частицы перемещались по аналитическому закону (18), точное значение плотности  $\hat{N}(c_k, t)$  вычислялось по формуле (20), а приближенное  $N_{\text{СИС}}(c_k, t)$  — с помощью интерполяционной функции (23). Другие погрешности, возникающие при численном решении уравнения для потенциала, дифференцировании потенциала, интегрировании уравнений движения частиц и интерполяции сил, действующих на частицы, во внимание не принимались.

**4.2. Оценка погрешности для метода TSC.** В этом алгоритме сборки заряда интерполяционная функция имеет вид [6, С. 137]

$$W_{\text{TSC}}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \left(\frac{x}{h_g}\right)^2, & \text{при } |x| \leq h_g/2, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{|x|}{h_g}\right)^2, & \text{при } h_g/2 \leq |x| \leq 3h_g/2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (26)$$

поэтому требуется определить две величины, характеризующие количества частиц, отстоящих от центра  $c_k$  на расстояния не более чем  $h_g/2$  и  $3h_g/2$ . Аналогично предыдущему пункту получим их:

$$i_1^* = \left[ \frac{Nl + 1}{2} \right], \quad i_2^* = \left[ \frac{3Nl + 1}{2} \right],$$

где, как и ранее,  $[b]$  обозначает целую часть числа  $b$ .

Заряд от частиц, находящихся справа от центра ячейки, будет вычисляться по формуле  $Z = Z_1 + Z_2$ , где

$$Z_1 = h_p \sum_{i=1}^{i_1^*} \left( \frac{3}{4} - \frac{|\hat{x}_i(t)|}{h_g} \right), \quad Z_2 = h_p \sum_{i=i_1^*+1}^{i_2^*} \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{|\hat{x}_i(t)|}{h_g} \right)^2,$$

а  $\hat{x}_i \simeq x_i/N$  при достаточно малом размере ячейки  $h_g$ .

В данном случае полное значение плотности в нуле, соответствующее методу TSC, следующее:

$$N_{\text{TSC}}(c_k, t) = \frac{2}{h_g} Z = \frac{2}{h_g} (Z_1 + Z_2).$$

Несложные вычисления дают явную формулу погрешности:

$$ERR_{\text{TSC}}(c_k, t) = \hat{N}(c_k, t) - N_{\text{TSC}}(c_k, t) = \frac{1}{12l^3 N^2}.$$

При этом параметр  $l$  выбирался так, чтобы оба значения  $(lN + 1)/2$  и  $(3lN + 1)/2$  были целыми. Учет факта, что  $N \in [N_{\min}, N_{\max}]$ , приводит к оценке сверху

$$ERR_{\text{TSC}} = \max_{c_k, t} |\hat{N}(c_k, t) - N_{\text{TSC}}(c_k, t)| \leq \frac{1}{12l^3 N_{\min}^2} \equiv O(l^{-3}). \quad (27)$$

Приведем результаты численных экспериментов с прежними значениями параметров:

$$\alpha = 0.45, \quad \rho_* = 0.5, \quad M_g = 10^5 + 1, \quad l = 11.$$

На рис. 5 а изображена динамика погрешности — величины

$$\max |ERR(c_k, t)| = \max_{c_k} |\hat{N}(c_k, t) - N_{TSC}(c_k, t)|,$$

где  $\hat{N}(c_k, t)$  вычислялась по формуле (20). Легко заметить, что численное значение погрешности не превышает величины  $1.5 \cdot 10^{-4}$ . В свою очередь, при  $l = 5$  аналогичное численное значение погрешности не превышает величины  $1.1 \cdot 10^{-3}$ . Оба указанных значения хорошо согласуются с аналитической оценкой (27). Обратим также внимание, что сама погрешность, как и для метода СИС, носит негладкий характер. На рис. 5 б приведено пространственное распределение погрешности для моментов времени  $t_n = 3\pi/2 + 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , когда наблюдается наименьшее значение плотности при  $x = 0$ .

Полученные оценки погрешности для сборки заряда (см. (25) и (27)) хорошо объясняют существенно большую популярность в практических расчетах метода СИС по сравнению с методом TSC: при значимом увеличении сложности формул (особенно при увеличении размерности!) выигрыш в точности невелик за счет повышения степени  $N_{\min}$  в знаменателе. Иными словами, увеличение порядка  $l$  нивелируется увеличением порядка  $N_{\min}$ .

В заключение раздела сделаем замечание об оценке погрешности метода сборки NGP, который носит больше учебный, чем практический характер. В этом алгоритме интерполяционная функция имеет вид

$$W_{NGP}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < h_g/2 \text{ или } x = h_g/2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Элементарные вычисления приводят к оценке погрешности сверху

$$ERR_{NGP} = \max_{c_k, t} |\hat{N}(c_k, t) - N_{NGP}(c_k, t)| \leq \frac{1}{l} \equiv O(l^{-1}). \tag{28}$$

В данном случае асимптотика по параметру  $l$  настолько плоха, что достигнуть приемлемой точности в расчетах не представляется возможным, что хорошо объясняет вычислительную непопулярность метода NGP.

Отметим, что оценка (28) при достаточно малых  $h_g$  совпадает с результатом [12] (см. также [8, С. 69]). Аналога оценки (27) автору обнаружить не удалось.

**5. Сравнение с разностным методом.** Как уже говорилось выше, PIC-метод реализует смешанный лагранжево-эйлеров подход при моделировании задач физики плазмы. При этом полученные выше оценки погрешности сборки заряда характеризуют только переход от лагранжевой части метода к эйлеровой. Поэтому в качестве сравнения будет полезно рассмотреть получение решения тех же уравнений (1) с

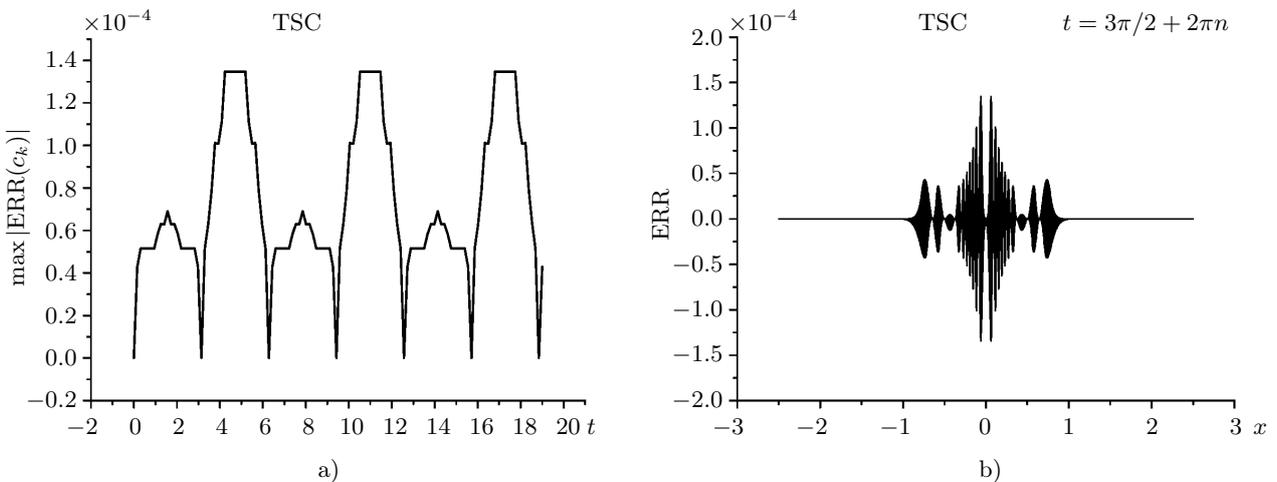


Рис. 5. Погрешности при сборке заряда по методу TSC при  $\alpha = 0.45$ ,  $\rho_* = 0.5$ : а) динамика равномерной нормы, б) пространственное распределение для моментов времени  $t = 3\pi/2 + 2\pi n$ ,  $n$  — целое

Fig. 5. Errors in charge assembly by the TSC method at  $\alpha = 0.45$ ,  $\rho_* = 0.5$ : a) dynamics of a uniform norm, b) spatial distribution for time moments  $t = 3\pi/2 + 2\pi n$ ,  $n$  — integer



теми же начальными условиями (17) только на основании эйлера подхода, т.е. метода сеток — конечных разностей. Преследуемая цель — сравнение вычислительных затрат для достижения одинаковой точности. Точность, как и ранее, будем оценивать с помощью аналитически заданной, но неявно определенной функции электронной плотности (20).

В качестве разностного метода воспользуемся неявной схемой Мак-Кормака [28], адаптированной, как и явная схема Мак-Кормака [29], к уравнениям, описывающим ленгмюровские колебания. Для полноты описания алгоритма приведем необходимые расчетные формулы.

**5.1. Неявная схема Мак-Кормака для ленгмюровских колебаний.** Приведем систему (1) к удобной в рассматриваемом случае векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(V) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (29)$$

где оператор  $A(V)$  является линейным и диагональным:  $A = V(x, t) I$ ,  $I$  — единичная матрица размера  $2 \times 2$ ;  $\mathbf{U} = (V, E)^T$ ,  $\mathbf{S} = (-E, V)^T$  — вектор-функции, рассматриваемые в полуплоскости  $\{(x, t) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ .

Определим дискретизацию независимых переменных с помощью постоянных параметров  $\tau$  и  $h$  так, что

$$t^n = n\tau, \quad n \geq 0, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и будем обозначать зависимую переменную  $\mathbf{U}(x, t)$  в узле сетки  $(x_i, t^n)$  как  $\mathbf{U}_i^n$ .

Введем полезные обозначения для операторов разностей “вперед”  $D^+$  и “назад”  $D^-$ , у которых аргумент может быть как векторным, так и скалярным:

$$D^+ \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i, \quad D^- \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1}.$$

Запишем неявную схему Мак-Кормака для системы (29), считая известными величины  $V_i^n, E_i^n$ :

1) предиктор с результатом  $\mathbf{U}_i^p$  —

положим  $V_{i+1/2}^n = (V_{i+1}^n + V_i^n) / 2$ , определим матрицу

$$C_{i+1/2}^n = A(|V_{i+1/2}^n|)$$

и последовательно вычислим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_i^n &= -\frac{\tau}{h} A(V_{i+1/2}^n) D^+ \mathbf{U}_i^n + \tau \mathbf{S}_i^n, \\ (I - \lambda \frac{\tau}{h} C_{i+1/2}^n D^+) \delta \mathbf{U}_i^p &= \Delta \mathbf{U}_i^n, \\ \mathbf{U}_i^p &= \mathbf{U}_i^n + \delta \mathbf{U}_i^p, \end{aligned} \quad (30)$$

2) корректор с результатом  $\mathbf{U}_i^c$  —

положим  $V_{i-1/2}^p = (V_i^p + V_{i-1}^p) / 2$ , определим матрицу

$$C_{i-1/2}^p = A(|V_{i-1/2}^p|)$$

и последовательно вычислим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_i^p &= -\frac{\tau}{h} A(V_{i-1/2}^p) D^- \mathbf{U}_i^p + \tau \mathbf{S}_i^p, \\ (I + \lambda \frac{\tau}{h} C_{i-1/2}^p D^-) \delta \mathbf{U}_i^c &= \Delta \mathbf{U}_i^p, \\ \mathbf{U}_i^c &= \mathbf{U}_i^p + \delta \mathbf{U}_i^c. \end{aligned} \quad (31)$$

В формулах (30), (31) верхний индекс  $p$  (или  $c$ ) обозначает шаг предиктор (или корректор) или  $n$  — временной слой  $t^n$ ,  $\lambda$  — постоянный параметр схемы, который будет определен ниже.

Окончательные формулы, формирующие решение на следующем временном слое с номером  $(n + 1)$ , имеют вид:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^c}{2}, \quad N_i^{n+1} = 1 - \frac{D^+ + D^-}{2h} E_i^{n+1}.$$

**5.2. Неявная схема Мак-Кормака для скалярного уравнения переноса.** Во избежание технических трудностей и следуя оригинальной идее [28], напомним основные формулы неявной схемы Мак-Кормака для простейшего уравнения конвекции с постоянным коэффициентом  $a$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Будем использовать обозначения и дискретизацию независимых переменных, введенные выше, например зависимую переменную  $u(x, t)$  в узле сетки  $(x_i, t^n)$  обозначим как  $u_i^n$ . Тогда неявная схема Мак-Кормака примет вид:

1) предиктор с результатом  $u_i^p$  —

$$\Delta u^n = -\frac{a\tau}{h} (u_{i+1}^n - u_i^n),$$

$$\left(1 + \frac{\lambda\tau}{h}\right) \delta u_i^p = \Delta u_i^n + \frac{\lambda\tau}{h} \delta u_{i+1}^p, \quad u_i^p = u_i^n + \delta u_i^p,$$

где вычисления проводятся в сторону уменьшения индекса:  $i = \dots, k+1, k, k-1, \dots$ ;

2) корректор с результатом  $u_i^c$  —

$$\Delta u^p = -\frac{a\tau}{h} (u_i^p - u_{i-1}^p),$$

$$\left(1 + \frac{\lambda\tau}{h}\right) \delta u_i^c = \Delta u_i^p + \frac{\lambda\tau}{h} \delta u_{i-1}^c, \quad u_i^c = u_i^p + \delta u_i^c,$$

где вычисления проводятся в сторону увеличения индекса  $i = \dots, k-1, k, k+1, \dots$ .

Окончательная формула, формирующая решение на следующем временном слое с номером  $(n+1)$ , имеет вид:

$$u_i^{n+1} = (u_i^p + u_i^c) / 2.$$

Отметим, что если положить  $\lambda = 0$ , то неявная схема трансформируется в обычную явную схему Мак-Кормака с условием устойчивости  $\omega = |a|\tau/h \leq 1$  (условие Куранта) и первым дифференциальным приближением [30] вида

$$u_t + au_x = \frac{ah^2}{6} (\omega^2 - 1) u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3).$$

Если же выбирать  $\lambda$  из условия

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \max \left\{ |a| - \frac{h}{\tau}, 0 \right\},$$

то неявная схема (при  $\lambda > 0$ ) будет безусловно устойчивой, а в правую часть первого дифференциального приближения добавится слагаемое [31]

$$-\tau^2 a \lambda \left( \lambda + \frac{h}{\tau} \right) u_{xxx}.$$

Иными словами, на гладких решениях погрешность аппроксимации неявной схемы асимптотически не хуже, чем погрешность явной схемы.

**5.3. Численные иллюстрации.** В данном случае неявный метод Мак-Кормака выбран, чтобы избежать влияния на погрешность решения шага по времени  $\tau$ , сохраняя контроль только за влиянием параметра  $h$ .

Приведем результаты численных экспериментов с прежними значениями параметров:  $\alpha = 0.45$ ,  $\rho_* = 0.5$ , а в качестве узлов сетки в разностном методе выберем центры ячеек, как в PIC-методе. При этом будем иметь  $h = h_g$ . Следует отметить, что при выбранных значениях параметров в явной схеме (при  $\lambda = 0$ ) шаг по времени имеет ограничение  $\tau \leq 10h_g$ , а для устойчивости неявной схемы (при  $\lambda = 1$ ) никаких ограничений не имеется.

Положим  $M_g = 3 \cdot 10^4 + 1$  и рассмотрим рис. 6 а, на котором изображена динамика погрешности — величины

$$\max |ERR(c_k, t)| = \max_{c_k} |\hat{N}(c_k, t) - N_{MC}(c_k, t)|,$$

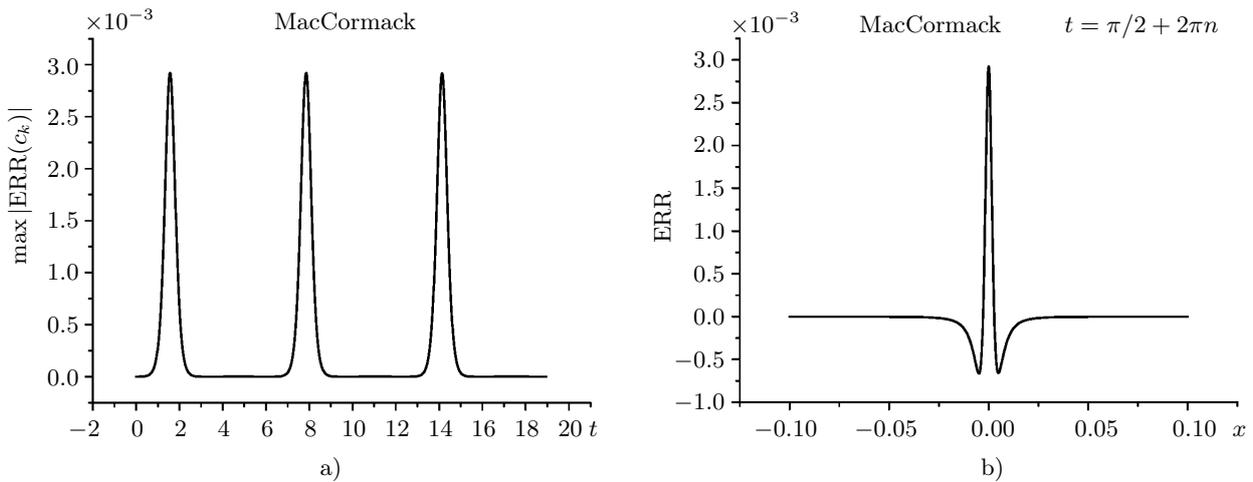


Рис. 6. Погрешности при решении разностным методом при  $\alpha = 0.45$ ,  $\rho_* = 0.5$ : а) динамика равномерной нормы; б) локальное пространственное распределение для моментов времени  $t = \pi/2 + 2\pi n$ ,  $n$  — целое

Fig. 6. Errors in the solution by the difference method at  $\alpha = 0.45$ ,  $\rho_* = 0.5$ : a) dynamics of the uniform norm; b) local spatial distribution for moments  $t = \pi/2 + 2\pi n$ ,  $n$  — integer

где  $\hat{N}(c_k, t)$  вычислялась по формуле (20), а  $N_{\text{McC}}(c_k, t)$  получалась по схеме Мак-Кормака. Легко заметить, что численное значение погрешности не превышает величины  $3 \cdot 10^{-3}$ . Обратим также внимание, что сама погрешность, в отличие от вариантов РС-метода, имеет совершенно другую форму. Она имеет более гладкий (не “пилообразный”!) характер, причем сосредоточена в небольшой окрестности глобальных максимумов электронной плотности. На рис. 6 б приведено пространственное распределение погрешности для моментов времени  $t_n = \pi/2 + 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , когда наблюдается наибольшее значение плотности при  $x = 0$ . Для наглядности на рисунке обозначено примерно 2% от всей расчетной области; в оставшейся части области погрешность существенно меньше, чем в ее центре.

Следующий эксперимент заключался в выборе параметра  $l$  при использовании метода СС, чтобы погрешность РС-метода была сопоставима с погрешностью разностного метода при одинаковом значении  $h_g = 2d/(M_g - 1)$ . Выбор  $l = 13$  оказался вполне подходящим, так как на протяжении трех расчетных периодов по времени (как и во всех расчетах выше) численное значение погрешности не превышало величины  $3 \cdot 10^{-3}$ .

В результате можно подвести итоги сравнения разностного метода и метода частиц в ячейке СС для рассмотренной модельной задачи о ленгмюровских колебаниях:

- чтобы добиться точности электронной плотности, получаемой разностным методом, в РС-методе должно быть задействовано как минимум на порядок больше частиц, чем ячеек; иными словами, затраты памяти в РС-методе сильно больше, чем в разностном;
- сама погрешность плотности имеет негладкий (“пилообразный”!) характер, в отличие от разностного метода, что может оказать серьезное негативное влияние на вычисление потенциала, т.е. сил, приводящих в движение частицы;
- в представленных расчетах сравнивалась полная погрешность разностного метода с частичной погрешностью РС-метода, возникающей только при сборке зарядов в центры ячеек, т.е. полная погрешность метода СС на фиксированной эйлеровой сетке может оказаться существенно большей и одновременно требовать значительных вычислительных затрат, которые пока не принимались во внимание.

В целом, вывод достаточно очевиден: за простоту, наглядность и физическую естественность РС-метода приходится расплачиваться большими вычислительными затратами при невысокой точности. Напомним, что другие специфические погрешности метода частиц (статистические шумы, самодействие частиц и т.п.) выше не обсуждались.

**6. Заключение.** Для моделирования нелинейных колебаний, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом, в работе построена тестовая задача. Задача аналитически решена в лагранжевых координатах, а также представлена трансформация решения в эйлеровы координаты в специфическом

неявном виде. Основным результатом являются аналитические оценки погрешности для различных вариантов PIC-метода, которая возникает при сборке заряда от макрочастиц в центры ячеек. Качество этих оценок иллюстрируется численными экспериментами, проведенными с помощью тестовой задачи. Кроме того, предложен новый разностный метод для тестовой задачи в эйлеровых координатах и проведено сравнение его точности с этапом сборки заряда из PIC-метода.

С учетом непрерывного развития PIC-метода в различных направлениях (см., например, [32–34]), предложенная модельная постановка может быть использована в целях анализа погрешностей всех этапов моделирования плазменных процессов.

### Список литературы

1. *Chen F.F.* Introduction to plasma physics and controlled fusion. Cham: Springer, 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-22309-4>. Cited February 3, 2024.
2. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // Успехи физических наук. 1967. **93**, № 3. 444–470. doi 10.3367/UFNr.0093.196711f.0444.
3. *Arber T.D., Vann R.G.L.* A critical comparison of Eulerian-grid-based Vlasov solvers // Journal of Computational Physics. 2002. **180**, N 1. 339–357. doi 10.1006/jcph.2002.7098.
4. *Filbet F., Sonnendrücker E.* Comparison of Eulerian Vlasov solvers // Computer Physics Communications. 2003. **150**, N 3. 247–266. doi 10.1016/S0010-4655(02)00694-X.
5. *Dimarco G., Pareschi L.* Numerical methods for kinetic equations // Acta Numerica. 2014. **23**. 369–520. doi 10.1017/S0962492914000063.
6. *Hockney R.W., Eastwood J.W.* Computer simulation using particles. New York: McGraw-Hill, 1981.
7. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics via computer simulation. In *Series in Plasma Physics and Fluid Dynamics*. Boca Raton: CRC Press, 2004.
8. *Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П.* Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004.
9. *Tonks L., Langmuir I.* Oscillations in ionized gases // Physical Review. 1929. **33**, N 2. 195–210. doi 10.1103/PhysRev.33.195.
10. *Cottet G.-H., Raviart P.-A.* Particle methods for one-dimensional Vlasov–Poisson equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1984. **21**, N 1. 52–76. doi 10.1137/0721003.
11. *Wang B., Miller G.H., Colella P.* A particle-in-cell method with adaptive phase-space remapping for kinetic plasmas // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. **33**, N 6. 3509–3537. doi 10.1137/100811805.
12. *Вшивков В.А.* Аппроксимационные свойства метода частиц в ячейках // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 1996. **36**, № 4. 106–113.
13. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978.
14. *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
15. *Davidson R.C.* Methods in nonlinear plasma theory. New York: Academic Press, 1972.
16. *Чижонков Е.В.* Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018.
17. *Розанова О.С., Чижонков Е.В.* Об аналитическом и численном решении одномерных уравнений холодной плазмы // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2021. **61**, № 9. 1508–1527. doi 10.31857/S0044466921090155.
18. *Фролов А.А., Чижонков Е.В.* О численном моделировании бегущих ленгмюровских волн в теплой плазме // Матем. моделирование. 2023. **35**, № 11. 21–34. doi 10.20948/mm-2023-11-02.
19. *Горбунов Л.М.* Зачем нужны сверхмощные лазерные импульсы? // Природа. 2007. **21**, № 4. 11–20. <https://priroda.ras.ru/pdf/2007-04.pdf>. Дата обращения: 5 февраля 2024.
20. *Mora P.A., Antonson T.M.* Kinetic modeling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas // Physics of Plasmas. 1997. **4**, N 1. 217–229. doi 10.1063/1.872134.
21. *Андреев А.Е., Горбунов А.Л., Рамазашвили Р.Р.* К теории трехмерной кильватерной волны, возбуждаемой мощным лазерным импульсом в разреженной плазме // Физика плазмы. 1997. **23**, № 4. 303–310.
22. *Sheppard C.J.R.* Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review [Invited] // Applied Optics. 2013. **52**, N 4. 538–545. doi 10.1364/AO.52.000538.



23. Розанова О.С., Чижонков Е.В. О существовании глобального решения одной гиперболической задачи // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. **492**, № 1. 97–100. doi [10.31857/S2686954320030169](https://doi.org/10.31857/S2686954320030169).
24. Rozanova O.S., Chizhonkov E.V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 2021. **72**, N 1. Article Number 13. doi [10.1007/s00033-020-01440-3](https://doi.org/10.1007/s00033-020-01440-3).
25. Чижонков Е.В. О схеме Русанова третьего порядка точности для моделирования плазменных колебаний // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2023. **63**, № 5. 864–878. doi [10.31857/S0044466923050083](https://doi.org/10.31857/S0044466923050083).
26. Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Physical Review. 1959. **113**, N 2. 383–387. doi [10.1103/PhysRev.113.383](https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.383).
27. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решения задач и упражнения. Серия Классический университетский учебник. Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. и дополн. М.: Лаборатория знаний, 2016.
28. MacCormack R.W. A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // AIAA J. 1982. **20**, N 9. 1275–1281.
29. Чижонков Е.В. О схемах второго порядка точности для моделирования плазменных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 1. 115–128. doi [10.26089/NumMet.v21r110](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r110).
30. Шожин Ю.И., Яценко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985.
31. Fürst J., Furmánek P. An implicit MacCormack scheme for unsteady flow calculations // Computers & Fluids. 2011. **46**, N 1. 231–236. doi [10.1016/j.compfluid.2010.09.036](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.036).
32. Qin H., Liu J., Xiao J., et al. Canonical symplectic particle-in-cell method for long-term large-scale simulations of the Vlasov–Maxwell equations // Nuclear Fusion. 2016. **56**, N 1. Article Number 014001. doi [10.1088/0029-5515/56/1/014001](https://doi.org/10.1088/0029-5515/56/1/014001).
33. Myers A., Colella P., Van Straalen B. A 4th-order particle-in-cell method with phase-space remapping for the Vlasov–Poisson equation // SIAM Journal on Scientific Computing. 2017. **39**, N 3. B467–B485. doi [10.1137/16M105962X](https://doi.org/10.1137/16M105962X).
34. Wilhelm R.P., Kirchner M. An interpolating particle method for the Vlasov–Poisson equation // Journal of Computational Physics. 2023. **473**. Article Identifier 111720. doi [10.1016/j.jcp.2022.111720](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111720).

Поступила в редакцию  
 11 декабря 2023 г.

Принята к публикации  
 2 января 2024 г.

### Информация об авторе

Евгений Владимирович Чижонков — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

### References

1. F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (Springer, Cham, 2016). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-22309-4>. Cited February 3, 2024.
2. A. A. Vlasov, “The Vibrational Properties of an Electron Gas,” *Usp. Fiz. Nauk* **93** (3), 444–470 (1967) [*Sov. Phys. Usp.* **10** (6), 721–733 (1968)]. doi [10.1070/PU1968v010n06ABEH003709](https://doi.org/10.1070/PU1968v010n06ABEH003709).
3. T. D. Arber and R. G. L. Vann, “A Critical Comparison of Eulerian-Grid-Based Vlasov Solvers,” *J. Comput. Phys.* **180** (1), 339–357 (2002). doi [10.1006/jcph.2002.7098](https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7098).
4. F. Filbet and E. Sonnendrücker, “Comparison of Eulerian Vlasov Solvers,” *Comput. Phys. Commun.* **150** (3), 247–266 (2003). doi [10.1016/S0010-4655\(02\)00694-X](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(02)00694-X).
5. G. Dimarco and L. Pareschi, “Numerical Methods for Kinetic Equations,” *Acta Numerica* **23**, 369–520 (2014). doi [10.1017/S0962492914000063](https://doi.org/10.1017/S0962492914000063).
6. R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (McGraw-Hill, New York, 1981).
7. C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation*. In *Series in Plasma Physics and Fluid Dynamics* (CRC Press, Boca Raton, 2004).

8. Yu. N. Grigor'ev, V. A. Vshivkov, and M. P. Fedoruk, *Numerical Simulation by Particle-in-Cell Methods* (Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2004) [in Russian].
9. L. Tonks and I. Langmuir, "Oscillations in Ionized Gases," *Phys. Rev.* **33** (2), 195–210 (1929). doi [10.1103/PhysRev.33.195](https://doi.org/10.1103/PhysRev.33.195).
10. G.-H. Cottet and P.-A. Raviart, "Particle Methods for the One-Dimensional Vlasov–Poisson Equations," *SIAM J. Numer. Anal.* **21** (1), 52–76 (1984). doi [10.1137/0721003](https://doi.org/10.1137/0721003).
11. B. Wang, G. H. Miller, and P. Colella, "A Particle-in-Cell Method with Adaptive Phase-space Remapping for Kinetic Plasmas," *SIAM J. Sci. Comput.* **33** (6), 3509–3537 (2011). doi [10.1137/100811805](https://doi.org/10.1137/100811805).
12. V. A. Vshivkov, "The Approximation Properties of the Particles-in-Cells Method," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **36** (4), 106–113 (1996) [*Comput. Math. Math. Phys.* **36** (4), 509–515 (1996)].
13. A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1978; Springer, Berlin, 1984). <https://link.springer.com/book/9783642692499>. Cited February 4, 2024.
14. V. L. Ginzburg and A. A. Rukhadze, *Waves in Magnetoactive Plasma* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
15. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic Press, New York, 1972).
16. E. V. Chizhonkov, *Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and Wake Waves in Plasma* (Fizmatlit, Moscow, 2018; CRC Press, Boca Raton, 2019).
17. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, "Analytical and Numerical Solutions of One-Dimensional Cold Plasma Equations," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **61** (9), 1508–1527 (2021). [*Comput. Math. Math. Phys.* **61** (9), 1485–1503 (2021)]. doi [10.1134/S0965542521090141](https://doi.org/10.1134/S0965542521090141).
18. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, "On Numerical Simulation of Travelling Langmuir Waves in a Warm Plasma," *Mat. Model.* **35** (11), 21–34 (2023). doi [10.20948/mm-2023-11-02](https://doi.org/10.20948/mm-2023-11-02).
19. L. M. Gorbunov, "What Superpower Laser Pulses Are Needed for?" *Priroda* **21** (4), 11–20 (2007). <https://priroda.ras.ru/pdf/2007-04.pdf>. Cited February 5, 2024.
20. P. A. Mora and T. M. Antonsen, "Kinetic Modeling of Intense, Short Laser Pulses Propagating in Tenuous Plasmas," *Phys. Plasmas* **4** (1), 217–229 (1997). doi [10.1063/1.872134](https://doi.org/10.1063/1.872134).
21. N. E. Andreev, L. M. Gorbunov, and R. R. Ramazashvili, "Theory of a Three-Dimensional Plasma Wave Excited by a High-Intensity Laser Pulse in an Underdense Plasma," *Plasma Physics Reports* **23** (4), 277–284 (1997).
22. C. J. R. Sheppard, "Cylindrical Lenses — Focusing and Imaging: a Review [Invited]," *Appl. Opt.* **52** (4), 538–545 (2013). doi [10.1364/AO.52.000538](https://doi.org/10.1364/AO.52.000538).
23. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, "On the Existence of a Global Solution of a Hyperbolic Problem," *Dokl. Akad. Nauk* **492** (1), 97–100 (2020) [*Dokl. Math.* **101** (3), 254–256 (2020)]. doi [10.1134/S1064562420030163](https://doi.org/10.1134/S1064562420030163).
24. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, "On the Conditions for the Breaking of Oscillations in a Cold Plasma," *Z. Angew. Math. Phys.* **72** (1), Article Number 13 (2021). doi [10.1007/s00033-020-01440-3](https://doi.org/10.1007/s00033-020-01440-3).
25. E. V. Chizhonkov, "Rusanov's Third-Order Accurate Scheme for Modeling Plasma Oscillations," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **63** (5), 864–878 (2023) [*Comput. Math. Math. Phys.* **63** (5), 905–918 (2023)]. doi [10.1134/S096554252305007X](https://doi.org/10.1134/S096554252305007X).
26. J. M. Dawson, "Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma," *Phys. Rev.* **113** (2), 383–387 (1959). doi [10.1103/PhysRev.113.383](https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.383).
27. N. S. Bakhvalov, A. A. Kornev, and E. V. Chizhonkov, *Numerical Methods: Solutions of Problems and Exercises*, 2nd ed. (Laboratoriya Znaniy, Moscow, 2016) [in Russian].
28. R. W. MacCormack, "A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow," *AIAA J.* **20** (9), 1275–1281 (1982).
29. E. V. Chizhonkov, "On Second-Order Accuracy Schemes for Modeling of Plasma Oscillations," *Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programirovanie)* **21** (1), 115–128 (2020). doi [10.26089/NumMet.v21r110](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r110).
30. Yu. I. Shokin and N. N. Yanenko, *The Method of Differential Approximation. Application to Gas Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1985) [in Russian].
31. J. Fürst and P. Furmánek, "An Implicit MacCormack Scheme for Unsteady Flow Calculations," *Comput. Fluids* **46** (1), 231–236 (2011). doi [10.1016/j.compfluid.2010.09.036](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.036).
32. H. Qin, J. Liu, J. Xiao, et al., "Canonical Symplectic Particle-in-Cell Method for Long-Term Large-Scale Simulations of the Vlasov–Maxwell Equations," *Nucl. Fusion* **56** (1), Article Number 014001 (2016). doi [10.1088/0029-5515/56/1/014001](https://doi.org/10.1088/0029-5515/56/1/014001).



33. A. Myers, P. Colella, and B. Van Straalen, “A 4th-Order Particle-in-Cell Method with Phase-Space Remapping for the Vlasov–Poisson Equation,” *SIAM J. Sci. Comput.* **39** (3), B467–B485 (2017). doi [10.1137/16M105962X](https://doi.org/10.1137/16M105962X).
34. R. P. Wilhelm and M. Kirchhart, “An Interpolating Particle Method for the Vlasov–Poisson Equation,” *J. Comput. Phys.* **473**, Article Identifier 111720 (2023). doi [10.1016/j.jcp.2022.111720](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111720).

*Received*

*December 11, 2023*

*Accepted for publication*

*January 2, 2024*

#### **Information about the author**

*Evgenii V. Chizhonkov* — Dr. Sci., Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.