

УДК 517.977.58

# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Д. В. Камзолкин<sup>1</sup>

В работе рассмотрена задача оптимального управления с терминальным функционалом качества. Приводится численный метод приближенного вычисления функции цены, основанный на применении принципа максимума Понтрягина. Доказывается сходимость предложенного метода. Приводятся оценки погрешности вычисления в зависимости от параметров численного метода. Предложен метод построения программного управления, гарантирующего значение функционала, стремящееся к оптимальному.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, функция цены, функция Беллмана, принцип максимума Понтрягина, численные методы.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

на отрезке времени  $[t_0, T]$ , где  $T$  — фиксированный момент времени,  $x \in \mathbb{R}^n$  — фазовая переменная,  $u \in \mathbb{R}^p$  — управление. В начальный момент времени  $t_0$  начальное условие  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  считается заданным.

Под допустимыми управлениями  $u(\cdot)$  понимаются измеримые по Лебегу функции, определенные на отрезке времени  $[t_0, T]$  и удовлетворяющие ограничениям  $u(t) \in P$  при  $t \in [t_0, T]$ , где  $P \subset \mathbb{R}^p$  — некоторый компакт. Обозначим класс всех допустимых управлений через  $U$ .

Считаем, что в дальнейшем функция  $f: \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет следующим двум условиям.

**Условие 1.**  $f(x, u)$  непрерывна по совокупности переменных и локально липшицева по  $x$  при  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in P$ .

**Условие 2.** Существует константа  $C_1 \geq 0$ , такая, что для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $u \in P$

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq C_1(1 + \|x\|^2).$$

Первое условие (см. [6, 8]) гарантирует существование и единственность решения Каратеодори уравнения (1) для любого начального условия  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  и любого допустимого управления  $u(\cdot) \in U$ . Второе условие является достаточным для продолжимости решения  $x(t)$  на весь интервал  $[t_0, T]$  (см. [1, 5]).

Будем обозначать решение  $x(\cdot)$ , соответствующее допустимому управлению  $u(\cdot) \in U$  и начальному условию  $x(t_0) = x_0$ , через  $x(\cdot | t_0, x_0, u(\cdot))$ . Заметим, что это решение определено на всем интервале  $[t_0, T]$ .

Пусть на множестве  $\mathbb{R}^n$  задана непрерывная целевая функция  $\Phi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Задача оптимального управления для системы (1) с целевой функцией  $\Phi(x)$  заключается в нахождении управления  $u(\cdot)$  и траектории  $x(\cdot | t_0, x_0, u(\cdot))$ , доставляющих нижнюю грань функции  $\Phi(x(T | t_0, x_0, u(\cdot)))$  по всем допустимым управлениям  $u(\cdot) \in U$ :

$$\Phi(x(T | t_0, x_0, u(\cdot))) \rightarrow \inf_{u(\cdot) \in U}. \quad (2)$$

Если найдется допустимое управление  $u^*(\cdot)$ , при котором достигается нижняя грань целевой функции, то  $u^*(\cdot)$  и соответствующую ему траекторию  $x^*(\cdot) = x(\cdot | t_0, x_0, u^*(\cdot))$  далее назовем решением задачи оптимального управления (1), (2).

Для существования решения задачи оптимального управления (1), (2) потребуем выполнения следующего условия (см. [1]).

**Условие 3.** Вектограмма  $f(x, P) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = f(x, u), u \in P\}$  — выпуклое множество для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: kamzolkin@cs.msu.ru

Введем скалярную функцию  $V(t_0, x_0) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , называемую функцией цены или функцией Беллмана, которая определяется в каждой точке  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  как минимальное значение целевой функции в задаче оптимального управления (1), (2):

$$V(t_0, x_0) = \min_{u(\cdot) \in U} \Phi(x(T|t_0, x_0, u(\cdot))). \quad (3)$$

Рассмотрим задачу о нахождении приближенного значения функции цены для задачи (1), (2). Пусть в  $\mathbb{R}^n$  задана некоторая прямоугольная область  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i^- \leq x_i \leq x_i^+, i = 1, \dots, n\}$ . Требуется для любой точки  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$  разработать алгоритм приближенного вычисления функции цены  $V(t_0, x_0)$  с заданной точностью в метрике  $C([0, T] \times X)$ .

**2. Представление значения функции цены с помощью экстремалей принципа максимума Понтрягина.** Получим эквивалентное представление функции цены  $V(t, x)$  (3) с помощью экстремалей принципа максимума Понтрягина (см. также [2, 3, 9]). Для выполнимости принципа максимума для задачи (1), (2) потребуем выполнения двух условий.

**Условие 4.** Функция  $f(x, u)$  имеет непрерывные частные производные по  $x$  при  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in P$ .

**Условие 5.** Функция  $\Phi(x)$  имеет непрерывные частные производные по  $x$  при  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Выпишем функцию Гамильтона–Понтрягина для задачи оптимального управления (1), (2):

$$H(x, u, \psi) = \langle f(x, u), \psi \rangle.$$

Здесь  $\psi \in \mathbb{R}^n$  — вспомогательная переменная, которая является решением сопряженного дифференциального уравнения

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f(x, u)}{\partial x}\right)^T \psi. \quad (4)$$

Условие трансверсальности на правом конце имеет вид

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=x(T)}. \quad (5)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина [4, 5], если некоторое допустимое управление  $u(\cdot)$  и соответствующая ему траектория  $x(\cdot) = x(\cdot|t_0, x_0, u(\cdot))$  являются решением задачи (1), (2), то существует такая вспомогательная переменная  $\psi(\cdot)$ , являющаяся решением сопряженного уравнения (4) с конечным условием (5), что  $H(x(t), u, \psi(t))$  достигает максимума при  $u = u(t)$  для всех  $t \in [t_0, T]$ :

$$\max_{u \in P} H(x(t), u, \psi(t)) = H(x(t), u(t), \psi(t)).$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) следует искать среди пар  $(u(\cdot), x(\cdot|t_0, x_0, u(\cdot)))$ , удовлетворяющих принципу максимума.

Обозначим через  $u^*(x, \psi)$  одно из управлений  $u \in P$ , доставляющих максимум функции Гамильтона–Понтрягина  $H(x, u, \psi)$  при фиксированных  $x$  и  $\psi$ :

$$u^*(x, \psi) \in \operatorname{Arg} \max_{u \in P} H(x, u, \psi).$$

Из непрерывности функции  $f(x, u)$  и компактности множества  $P$  следует, что максимизатор  $u^*(x, \psi)$  определен при любых  $\psi \in \mathbb{R}^n$  и  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Для однозначного определения максимизатора функции Гамильтона–Понтрягина  $H(x, u, \psi)$  потребуем выполнения следующего условия.

**Условие 6.** Для любых  $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и  $x \in \mathbb{R}^n$  множество  $\operatorname{Arg} \max_{u \in P} H(x, u, \psi)$  состоит из одной точки.

Так как при  $\psi = 0$  функция  $H(x, u, \psi) \equiv 0$  при любом  $u \in P$ , то максимизирующее управление  $u$  невозможно определить единственным образом. Для исключения этого случая будем считать, что выполняется следующее предположение, справедливость которого при выполнении ряда условий будет доказана далее.

**Предположение 1.** Для любой начальной позиции  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$  и для любого допустимого управления  $u(\cdot)$  и траектории  $x(\cdot|t_0, x_0, u(\cdot))$ , удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина, вспомогательная переменная  $\psi(t)$  не обращается в ноль на отрезке времени  $[t_0, T]$ .

Таким образом, поиск всех пар  $(u(\cdot), x(\cdot | t_0, x_0, u(\cdot)))$ , удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина, сводится к решению краевой задачи для Гамильтоновой системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(x, \psi)) = F(x, \psi), \\ \dot{\psi} &= - \left. \frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial x} \right|_{u=u^*(x, \psi)} = \left( - \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{u=u^*(x, \psi)} \right)^T \psi = G(x, \psi)\psi, \\ x(t_0) &= x_0, \\ \psi(T) &= - \left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=x(T)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $G(x, \psi) = \left( - \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{u=u^*(x, \psi)} \right)^T$  — матрица  $n \times n$ , зависящая от  $x$  и  $\psi$ .

Множество всех решений  $(x(\cdot), \psi(\cdot))$  краевой задачи (6) обозначим через  $\mathcal{H}_1(t_0, x_0)$ . Для каждого решения  $(x(\cdot), \psi(\cdot)) \in \mathcal{H}_1(t_0, x_0)$  по формуле  $u(\cdot) = u^*(x(\cdot), \psi(\cdot))$  вычисляется соответствующее ему управление.

Заменим в системе (6) условие  $x(t_0) = x_0$  на условие  $x(T) = x_T$  и рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, \psi), \\ \dot{\psi} &= G(x, \psi)\psi, \\ x(T) &= x_T, \\ \psi(T) &= - \frac{\partial \Phi(x_T)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Множество решений  $(x(\cdot), \psi(\cdot))$  задачи Коши (7) при всех возможных конечных значениях  $x_T \in \mathbb{R}^n$  обозначим через  $\mathcal{H}_2$ .

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия 1–6 и предположение 1. Тогда функцию цены  $V(t_0, x_0)$  для любой точки  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  можно представить в виде

$$V(t_0, x_0) = \min_{(x(\cdot), \psi(\cdot)) \in \mathcal{H}_2(t_0, x_0)} \Phi(x(T)), \quad (8)$$

где  $\mathcal{H}_2(t_0, x_0) = \{(x(\cdot), \psi(\cdot)) \in \mathcal{H}_2 : x(t_0) = x_0\}$ .

**Доказательство.** Утверждение леммы является следствием принципа максимума Понтрягина. При выполнении предположения 1 функцию цены  $V(t_0, x_0)$  можно представить как минимум целевой функции  $\Phi(x(T))$  на множестве решений краевой задачи (6):

$$V(t_0, x_0) = \min_{(x(\cdot), \psi(\cdot)) \in \mathcal{H}_1(t_0, x_0)} \Phi(x(T)). \quad (9)$$

Из определения множества  $\mathcal{H}_2(t_0, x_0)$  следует, что любая пара  $(x(\cdot), \psi(\cdot)) \in \mathcal{H}_2(t_0, x_0)$  является решением краевой задачи (6), т.е. принадлежит множеству  $\mathcal{H}_1(t_0, x_0)$ . Наоборот, любое решение  $(x(\cdot), \psi(\cdot))$  краевой задачи (6) является решением задачи Коши (7) с конечным условием  $x_T = x(T)$  и удовлетворяет условию  $x(t_0) = x_0$ . Следовательно, множества  $\mathcal{H}_1(t_0, x_0)$  и  $\mathcal{H}_2(t_0, x_0)$  совпадают и формула (9) эквивалентна формуле (8) из утверждения леммы.

**3. Исследование решения задачи Коши (7).** Обозначим множество достижимости системы (1) в момент времени  $t \geq t_0$  из начального состояния  $x(t_0) = x_0$  через  $X(t, t_0, x_0) = \{x(t | t_0, x_0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in U\}$ .

Так как для  $f(x, u)$  выполняется условие 2, то, используя лемму Гронвалла [1, 4] и компактность множества  $X$ , можно показать существование такой константы  $R = \sqrt{1 + \|X\|^2} e^{C_1 T}$ , где  $\|X\| = \max_{x \in X} \|x\|$ , что для любых  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$ ,  $u(\cdot) \in U$  и  $t \in [t_0, T]$

$$\|x(t | t_0, x_0, u(\cdot))\| \leq R.$$

Следовательно, для любых  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$  и  $t \in [t_0, T]$  множество достижимости  $X(t, t_0, x_0) \subset K$ , где  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq R, i = 1, \dots, n\}$ .

Так как нас интересуют решения  $(x(\cdot), \psi(\cdot))$  задачи Коши (7), удовлетворяющие условию  $x(t_0) = x_0$ , то конечное значение  $x_T$  должно выбираться из множества достижимости  $X(T, t_0, x_0)$ . Таким образом, для любых  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$  множество конечных значений  $x_T$  в задаче Коши (7) можно ограничить множеством  $K$ .

Пусть выполняется следующее условие.

**Условие 7.** Существует  $\varepsilon_\Phi > 0$  такое, что  $\left\| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right\| \geq \varepsilon_\Phi$  для любого  $x \in K$ .

Тогда множество  $\Psi_T = \left\{ -\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} : x \in K \right\}$  конечных значений вспомогательной переменной в задаче Коши (7) строго отделимо от нуля, т.е.  $\Psi_T \subset \{\psi \in \mathbb{R}^n : \|\psi\| \geq \varepsilon_\Phi\}$ . Также из непрерывности  $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}$  и компактности  $K$  следует, что множество  $\Psi_T$  ограничено сверху по норме некоторой константой  $R_\Phi = \max_{x \in K} \left\| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right\|$ . Таким образом, выполняется включение

$$\Psi_T \subset \{\psi \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_\Phi \leq \|\psi\| \leq R_\Phi\}. \quad (10)$$

Предположим далее, что выполняются два условия.

**Условие 8.** Функция  $u^*(x, \psi)$  локально липшицева по совокупности переменных при  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Условие 9.** Функция  $f(x, u)$  и ее частные производные по  $x$  локально липшицевы по совокупности переменных при  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $u \in P$ .

Из этих условий следует локальная липшицевость функций  $F(x, \psi)$  и  $G(x, \psi)\psi$  при  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  как суперпозиции липшицевых функций. Так как при  $x_T \in K$  конечное значение вспомогательной переменной не равняется нулю, то решение  $(x(\cdot), \psi(\cdot))$  задачи Коши (7) существует и единственно для любого конечного значения  $x_T \in K$ .

Обозначим через  $(x_H(\cdot|x_T), \psi_H(\cdot|x_T))$  решение задачи Коши (7), соответствующее конечному значению  $x_T$ . Для продолжимости решения  $x_H(\cdot|x_T)$  в обратном времени на весь интервал  $[0, T]$  потребуем выполнения следующего условия.

**Условие 10.** Существует константа  $C_2 \geq 0$ , такая, что для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $u \in P$

$$\langle x, -f(x, u) \rangle \leq C_2(1 + \|x\|^2).$$

Из этого условия следует существование такой константы  $R_x = \sqrt{1 + \|K\|^2} e^{C_2 T}$ , что при всех  $t \in [0, T]$  и  $x_T \in K$  решение  $x_H(t|x_T)$  ограничено некоторым прямоугольным множеством

$$K_x = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq R_x, i = 1, \dots, n\}.$$

**Лемма 2.** При выполнении условий 1–10 существует такая константа  $C_\psi$ , что для любых  $x \in K_x$  и  $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  справедливо неравенство

$$\left| \langle \psi, G(x, \psi)\psi \rangle \right| \leq C_\psi \|\psi\|^2. \quad (11)$$

**Доказательство.** Так как  $x \in K_x$  и  $f(x, u)$  имеет непрерывные частные производные по  $x$  при  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $u \in P$ , то существует такая константа  $C_\psi > 0$ , что  $\left\| \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right\|_E \leq C_\psi$ , где  $\|\cdot\|_E$  — евклидова норма матрицы.

Функция  $u^*(x, \psi)$  определена при  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и принимает значения из  $P$ ; следовательно, справедлива оценка

$$\|G(x, \psi)\|_E = \left\| \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{u=u^*(x, \psi)} \right\|_E \leq C_\psi.$$

С помощью этой оценки получим неравенство (11):

$$\left| \langle \psi, G(x, \psi)\psi \rangle \right| \leq \|\psi\| \|G(x, \psi)\psi\| \leq \|G(x, \psi)\|_E \|\psi\|^2 \leq C_\psi \|\psi\|^2.$$

**Лемма 3.** Пусть выполняются условия 1–10; тогда существуют такие константы  $R_\psi \geq \varepsilon_\psi > 0$ , что для любых  $t \in [0, T]$  и  $x_T \in K$  выполняется включение  $\psi_H(t|x_T) \in K_\psi = \{\psi \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_\psi \leq \|\psi\| \leq R_\psi\}$ .

**Доказательство.** Из неравенства (11) и ограниченности и отделимости от нуля множества конечных значений вспомогательной переменной  $\Psi_T$  следует, что для любых  $t \in [0, T]$  и  $x_T \in K$  справедлива оценка

$$\varepsilon_{\Phi} e^{-C_{\psi} T} = \varepsilon_{\psi} \leq \|\psi_H(t|x_T)\| \leq R_{\psi} = R_{\Phi} e^{C_{\psi} T}.$$

**Лемма 4.** При выполнении условий 1–10 решение задачи Коши (7)  $(x_H(\cdot|x_T), \psi_H(\cdot|x_T))$  существует и единственно при любом  $x_T \in K$ , определено на всем интервале  $[0, T]$  и ограничено компактным множеством  $D = K_x \times K_{\psi}$ . При этом для любой точки  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$  справедлива формула для функции цены

$$V(t_0, x_0) = \min_{x_T \in X_T(t_0, x_0)} \Phi(x_T), \quad (12)$$

где  $X_T(t_0, x_0) = \{x_T \in K : x_H(t_0|x_T) = x_0\}$ .

**Доказательство.** Как уже было показано ранее, из условий 8, 9 и включения (10) следует существование и единственность решения  $(x_H(\cdot|x_T), \psi_H(\cdot|x_T))$  для любого  $x_T \in K$ . Условие 10 и неравенство (11) гарантируют ограниченность решения множеством  $D = K_x \times K_{\psi}$  и его продолжимость на весь временной интервал  $[0, T]$ .

Таким образом, для любого  $x_T \in K$  вспомогательная переменная  $\psi_H(\cdot|x_T)$  не обращается в ноль на всем отрезке  $[0, T]$ , и, следовательно, выполняется предположение 1.

Формула (12) следует из леммы 1 и ограниченности множества достижимости  $X(T, t_0, x_0)$  множеством  $K$ .

**4. Метод приближенного вычисления функции цены.** Приведем метод приближенного вычисления функции цены  $V(t, x)$  в области  $[0, T] \times X$ , основанный на формуле (12), доказанной в лемме 4.

Зададим на множествах  $[0, T] \times X$  и  $K$  равномерную сетку. Разобьем временной интервал  $[0, T]$  на  $l$  одинаковых частей точками  $\tau_i$ :

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = T, \quad \tau_{i+1} - \tau_i = \frac{T}{l}.$$

Каждый из отрезков  $[x_i^-, x_i^+]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , определяющих множество  $X$ , разобьем на  $m$  одинаковых частей точками

$$x_i^- = \xi_0^i < \xi_1^i < \dots < \xi_m^i = x_i^+, \quad \xi_{k+1}^i - \xi_k^i = \frac{x_i^+ - x_i^-}{m}.$$

Получим на множестве  $[0, T] \times X$  равномерную сетку с узлами

$$(\tau_{j_0}, \xi_{j_1}^1, \xi_{j_2}^2, \dots, \xi_{j_n}^n), \quad j_0 = 0, \dots, l; \quad j_i = 0, \dots, m; \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта сетка разбивает множество  $[0, T] \times X$  на прямоугольные ячейки

$$q_{j_0, j_1, \dots, j_n} = [\tau_{j_0-1}, \tau_{j_0}] \times [\xi_{j_1-1}^1, \xi_{j_1}^1] \times \dots \times [\xi_{j_n-1}^n, \xi_{j_n}^n], \quad j_0 = 1, \dots, l; \quad j_i = 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, n.$$

Множество всех ячеек  $q_{j_0, j_1, \dots, j_n}$  обозначим через

$$\mathcal{Q} = \{q_{j_0, j_1, \dots, j_n} | j_0 = 1, \dots, l; \quad j_i = 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим диагональ прямоугольного множества  $X$  через  $\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^+ - x_i^-)^2}$ , а минимальную из длин сторон — через  $\delta = \min_{i=1, \dots, n} (x_i^+ - x_i^-)$ .

Аналогично множеству  $X$  зададим равномерную сетку на прямоугольном множестве  $K$ . Узлами сетки будут точки  $\eta_{j_1, \dots, j_n} = (\eta_{j_1}^1, \dots, \eta_{j_n}^n)$ :

$$-R + \frac{R}{k} = \eta_1^i < \eta_2^i < \dots < \eta_k^i = R - \frac{R}{k}, \quad \eta_{k+1}^i - \eta_k^i = \frac{2R}{k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Множество всех узлов этой сетки обозначим через  $\mathcal{N} = \{\eta_{j_1, \dots, j_n} | j_i = 1, \dots, k; \quad i = 1, \dots, n\}$ . Множество  $\mathcal{N}$  обладает следующим свойством. Для любого  $x \in K$  существует точка  $\eta \in \mathcal{N}$ , такая, что  $\|\eta - x\| \leq \frac{\sigma}{k}$ , где  $\sigma = R\sqrt{n}$  — половина диагонали прямоугольного множества  $K$ .

Для приближенного решения задачи Коши (7) в обратном времени применим метод Эйлера с постоянным шагом [7]. Отрезок  $[0, T]$  разделим на  $s \geq l$  частей точками

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = T, \quad t_{i+1} - t_i = \frac{T}{s} = h_E.$$

Множество всех точек  $t_i$  разбиения отрезка  $[0, T]$  обозначим через  $\omega_E(s) = \{t_i : i = 0, \dots, s\}$ . Каждой точке  $\eta \in \mathcal{N}$  поставим в соответствие множество  $X_E(\eta)$ , состоящее из  $s$  точек, являющихся вершинами ломаной Эйлера с началом в точке  $(T, \eta)$ :

$$X_E(\eta) = \left\{ (t_i, x_H^i(\eta)) : i = 0, \dots, s, \quad x_H^s(\eta) = \eta, \quad \psi_H^s(\eta) = -\frac{\partial \Phi(\eta)}{\partial x}, \right. \\ \left. x_H^{i-1}(\eta) = x_H^i(\eta) - h_E F(x_H^i(\eta), \psi_H^i(\eta)), \quad \psi_H^{i-1}(\eta) = \psi_H^i(\eta) - h_E G(x_H^i(\eta), \psi_H^i(\eta)) \psi_H^i(\eta) \right\}.$$

Оценим погрешность метода Эйлера в зависимости от величины  $s$ :

$$R_H(s) = \max_{\eta \in \mathcal{N}} \max_{i=0, \dots, s} \left( \left\| x_H^i(\eta) - x_H(t_i | \eta) \right\| + \left\| \psi_H^i(\eta) - \psi_H(t_i | \eta) \right\| \right).$$

Обозначим  $\varepsilon$ -окрестность множества  $D$  через  $D(\varepsilon) = (K_x + S_\varepsilon) \times (K_\psi + S_\varepsilon)$ .

Из условий 8 и 9 следует липшицевость функций  $F(x, \psi)$  и  $G(x, \psi)\psi$  на множестве  $D\left(\frac{\varepsilon_\psi}{2}\right)$  с положительными константами  $L_F$  и  $L_G$  и ограниченность по норме константами  $M_F$  и  $M_G$  соответственно, т.е. для любых  $(x_1, \psi_1)$  и  $(x_2, \psi_2)$  из  $D\left(\frac{\varepsilon_\psi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \|F(x_1, \psi_1) - F(x_2, \psi_2)\| &\leq L_F(\|x_1 - x_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\|), \\ \|G(x_1, \psi_1)\psi_1 - G(x_2, \psi_2)\psi_2\| &\leq L_G(\|x_1 - x_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\|) \end{aligned}$$

и для любой точки  $(x, \psi) \in D\left(\frac{\varepsilon_\psi}{2}\right)$

$$\|F(x, \psi)\| \leq M_F, \quad \|G(x, \psi)\psi\| \leq M_G.$$

Таким образом, при достаточно большом  $s$  для погрешности метода Эйлера верна оценка (см. [7])

$$R_H(s) \leq \frac{L_H M_H T^2 e^{L_H T}}{2} \frac{1}{s} = \frac{C_H}{s},$$

где  $L_H = L_F + L_G$  и  $M_H = M_F + M_G$ , а параметр  $s$  должен удовлетворять неравенству  $s \geq \frac{2C_H}{\varepsilon_\psi}$ .

Для каждой ячейки  $q$  обозначим через  $\mathcal{N}(q) = \{\eta \in \mathcal{N} : q \cap X_E(\eta) \neq \emptyset\}$  множество всех точек  $\eta \in \mathcal{N}$ , ломаная Эйлера из которых проходит через ячейку  $q$ . Если множество  $\mathcal{N}(q)$  не пусто, то минимальное значение функционала на этом множестве обозначим через

$$W(q) = \min_{\eta \in \mathcal{N}(q)} \Phi(\eta). \quad (13)$$

Определим приближенное значение функции цены  $V(t, x)$  в ячейке  $q$  как значение  $W(q)$ :

$$\bar{V}(t, x) = W(q), \quad (t, x) \in q.$$

Оценим погрешность вычисления функции цены  $R_V = \max_{(t, x) \in [0, T] \times X} |\bar{V}(t, x) - V(t, x)|$  в зависимости от параметров  $m$ ,  $l$ ,  $k$  и  $s$ .

**Лемма 5.** Пусть выполняются условия 1–10. Тогда существуют такие положительные константы  $L_{VX}$  и  $L_{VT}$ , что для любых точек  $(t_1, x_1)$  и  $(t_2, x_2)$  из множества  $[0, T] \times X$  справедлива оценка

$$|V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2)| \leq L_{VX} \|x_1 - x_2\| + L_{VT} |t_1 - t_2|.$$

**Доказательство.** Рассмотрим любые две точки  $(t_1, x_1)$  и  $(t_2, x_2)$  из  $[0, T] \times X$ . Так как решение задачи оптимального управления с начальным условием  $x(t_1) = x_1$  существует, то найдется некоторое допустимое управление  $u_1(\cdot) \in U$ , при котором функционал (2) достигает минимума.

Оценим расстояние между двумя решениями системы (1), исходящими из точек  $(t_1, x_1)$  и  $(t_2, x_2)$  под действием одного и того же управления  $u_1(\cdot)$ . Обозначим эти решения  $x(\cdot | t_1, x_1, u_1(\cdot))$  и  $x(\cdot | t_2, x_2, u_1(\cdot))$  соответственно.

Из условия 1 следует липшицевость по переменной  $x$  функции  $f(x, u)$  при  $x \in K$  и  $u \in P$  с некоторой константой  $L$  и ограниченность  $f(x, u)$  по норме константой  $M = \max_{x \in K, u \in P} \|f(x, u)\|$ .

Из оценки расхождения двух движений (см. [8]) получаем

$$\|x(T | t_1, x_1, u_1(\cdot)) - x(T | t_2, x_2, u_1(\cdot))\| \leq (\|x_1 - x_2\| + M|t_1 - t_2|) e^{LT}. \quad (14)$$

Из условия 5 следует липшицевость функции  $\Phi(x)$  на множестве  $K$  с некоторой константой  $L_\Phi$ . Используя неравенство (14), получаем оценку

$$\left| \Phi(x(T | t_1, x_1, u_1(\cdot))) - \Phi(x(T | t_2, x_2, u_1(\cdot))) \right| \leq L_\Phi e^{LT} \|x_1 - x_2\| + L_\Phi M e^{LT} |t_1 - t_2|. \quad (15)$$

Обозначим  $L_{VX} = L_\Phi e^{LT}$  и  $L_{VT} = L_\Phi M e^{LT}$ . Так как  $\Phi(x(T | t_1, x_1, u_1(\cdot))) = V(t_1, x_1)$  и одновременно  $V(t_2, x_2) \leq \Phi(x(T | t_2, x_2, u_1(\cdot)))$ , то из (15) следует неравенство

$$V(t_2, x_2) \leq V(t_1, x_1) + L_{VX} \|x_1 - x_2\| + L_{VT} |t_1 - t_2|.$$

Аналогично доказывается обратное неравенство

$$V(t_1, x_1) \leq V(t_2, x_2) + L_{VX} \|x_1 - x_2\| + L_{VT} |t_1 - t_2|.$$

Объединяя последние два неравенства, получаем утверждение леммы.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия:

1. Функция  $f(x, u)$  и ее частная производная по  $x$  локально липшицевы по совокупности переменных при  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $u \in P$ .

2. Существуют константы  $C_1 \geq 0$  и  $C_2 \geq 0$ , такие, что для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $u \in P$

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq C_1 (1 + \|x\|^2), \quad \langle x, -f(x, u) \rangle \leq C_2 (1 + \|x\|^2).$$

3. Вектограмма  $f(x, P)$  — выпуклое множество для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

4. Функция  $\Phi(x)$  имеет локально липшицеву производную по  $x$  при  $x \in \mathbb{R}^n$ .

5. Существует  $\varepsilon_\Phi > 0$ , такое, что  $\left\| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right\| \geq \varepsilon_\Phi$  для любого  $x \in K$ .

6. Для любых  $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и  $x \in \mathbb{R}^n$  множество  $\text{Arg} \max_{u \in P} H(x, u, \psi)$  состоит из одной точки.

7. Функция  $u^*(x, \psi)$  локально липшицева по совокупности переменных при  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

8. Условие согласования величин  $k$  и  $m$ :

$$\frac{C_K}{k} = \frac{\sigma(1 + L_{\Phi_x})e^{L_H T}}{k} \leq \frac{\delta}{4m},$$

где  $L_{\Phi_x}$  — константа Липшица функции  $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}$  на множестве  $K$ .

9. Условие согласования величин  $s$  и  $m$ :  $\frac{C_H}{s} \leq \frac{\delta}{4m}$ .

10. Параметр  $s$  удовлетворяет неравенству  $s \geq \max\left(l, \frac{2C_H}{\varepsilon_\psi}\right)$ .

Тогда значение  $W(q)$  определено для любого  $q \in \mathcal{Q}$  и для погрешности вычисления функции цены верна следующая оценка при константах  $L_{VX}$  и  $L_{VT}$ , определенных в лемме 5:

$$R_V \leq L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l}. \quad (16)$$

**Доказательство.** Докажем вначале, что значение  $W(q)$  определено для всех ячеек  $q \in \mathcal{Q}$ , т.е. множество  $\mathcal{N}(q)$  не пусто. Рассмотрим произвольную ячейку  $q \in \mathcal{Q}$ . Обозначим точкой  $(t_*, x_*)$  центр ячейки  $q$ . Так как  $s \geq l$ , то найдется точка  $t_j$  из разбиения  $\omega_E(s)$ , такая, что  $(t_j, x_*) \in q$ . Так как решение задачи оптимального управления существует для любого  $(t, x) \in [0, T] \times X$ , то согласно лемме 4 найдется такая точка  $\eta_* \in K$ , что  $x_H(t_j | \eta_*) = x_*$  и  $V(t_j, x_*) = \Phi(\eta_*)$ . Из построения множества  $\mathcal{N}$  следует существование такого  $\eta \in \mathcal{N}$ , что

$$\|\eta - \eta_*\| \leq \frac{\sigma}{k}. \quad (17)$$

Из липшицевости производной функции  $\Phi(x)$  на множестве  $K$  и (17) следует, что

$$\left\| \frac{\partial \Phi(\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \Phi(\eta_*)}{\partial x} \right\| \leq L_{\Phi_x} \|\eta - \eta_*\| \leq L_{\Phi_x} \frac{\sigma}{k}.$$

Следовательно, для конечных значений вспомогательной переменной, соответствующих точкам  $\eta$  и  $\eta_*$ , справедлива оценка расстояния

$$\left\| \psi_H(T | \eta) - \psi_H(T | \eta_*) \right\| \leq L_{\Phi_x} \frac{\sigma}{k}. \quad (18)$$

Из оценки расхождения двух движений (см. [8]), неравенств (17), (18) и условия 8 теоремы следует оценка

$$\left\| x_H(t_j | \eta) - x_H(t_j | \eta_*) \right\| = \left\| x_H(t_j | \eta) - x_* \right\| \leq \frac{\sigma}{k} (1 + L_{\Phi_x}) e^{L_H(T-t_j)} \leq \frac{\sigma}{k} (1 + L_{\Phi_x}) e^{L_H T} \leq \frac{\delta}{4m}. \quad (19)$$

Рассмотрим точку  $(t_j, x_H^j(\eta))$ , принадлежащую ломаной Эйлера  $X_E(\eta)$ . Из условия 9 теоремы следует оценка расстояния

$$\left\| x_H(t_j | \eta) - x_H^j(\eta) \right\| \leq \frac{C_H}{s} \leq \frac{\delta}{4m}. \quad (20)$$

Объединяя неравенства (19) и (20), получаем

$$\left\| x_H^j(\eta) - x_* \right\| \leq \left\| x_H(t_j | \eta) - x_* \right\| + \left\| x_H(t_j | \eta) - x_H^j(\eta) \right\| \leq \frac{\delta}{2m}.$$

Следовательно, точка  $(t_j, x_H(t_j | \eta))$  принадлежит ячейке  $q$  и, значит,  $X_E(\eta) \cap q \neq \emptyset$ . Таким образом, для любого  $q \in \mathcal{Q}$  множество  $\mathcal{N}(q) \neq \emptyset$ .

Докажем оценку сверху для  $W(q)$ . Используя липшицевость  $\Phi(x)$ , получаем

$$|\Phi(\eta) - \Phi(\eta_*)| \leq L_{\Phi} \|\eta - \eta_*\| \leq L_{\Phi} \frac{\sigma}{k},$$

и, следовательно,

$$\Phi(\eta) \leq \Phi(\eta_*) + L_{\Phi} \frac{\sigma}{k} = V(t_j, x_*) + L_{\Phi} \frac{\sigma}{k}.$$

Так как  $\eta \in \mathcal{N}(q)$ , то из формулы (13) следует, что  $W(q) \leq \Phi(\eta)$  и, значит,

$$W(q) \leq \Phi(\eta) \leq V(t_j, x_*) + L_{\Phi} \frac{\sigma}{k}. \quad (21)$$

Из леммы 5 следует оценка

$$|V(t, x) - V(t_j, x_*)| \leq L_{VX} \frac{\Delta}{m} + L_{VT} \frac{T}{l} \quad (22)$$

для любой точки  $(t, x) \in q$ . Таким образом, из (21) и (22) получаем

$$W(q) \leq V(t, x) + L_{\Phi} \frac{\sigma}{k} + L_{VX} \frac{\Delta}{m} + L_{VT} \frac{T}{l}. \quad (23)$$

Докажем теперь оценку снизу для  $W(q)$ . Так как  $\mathcal{N}(q) \neq \emptyset$ , то выберем любую  $\eta \in \mathcal{N}(q)$ , такую, что  $W(q) = \Phi(\eta)$ . Пусть  $(t_j, x_H^j(\eta))$  — любая точка из множества  $X_E(\eta)$ , которая принадлежит ячейке  $q$ . Для погрешности метода Эйлера справедлива оценка

$$\left\| x_H(t_j | \eta) - x_H^j(\eta) \right\| \leq \frac{C_H}{s} \leq \frac{\delta}{4m}. \quad (24)$$

Из определения функции цены получаем

$$W(q) = \Phi(\eta) \geq V(t_j, x_H(t_j | \eta)). \quad (25)$$

Из леммы 5 и (24) следует:

$$\left| V(t_j, x_H(t_j, \eta)) - V(t_j, x_H^j(\eta)) \right| \leq L_{VX} \frac{\delta}{4m}.$$

Из неравенства (25) и липшицевости функции цены получаем оценку

$$W(q) \geq V(t, x) - L_{VX} \frac{\delta}{4m} - L_{VX} \frac{\Delta}{m} - L_{VT} \frac{T}{l}. \quad (26)$$

Объединяя оценки сверху (23) и снизу (26), получаем

$$R_V \leq \max\left(L_\Phi \frac{\sigma}{k}, L_{VX} \frac{\delta}{4m}\right) + L_{VX} \frac{\Delta}{m} + L_{VT} \frac{T}{l}.$$

Сравним величины  $L_\Phi \frac{\sigma}{k}$  и  $L_{VX} \frac{\delta}{4m}$ . Из условия 8 теоремы следует, что

$$L_\Phi \frac{\sigma}{k} \leq L_\Phi \frac{\sigma(1 + L_{\Phi x})e^{L_H T}}{k} \leq L_\Phi \frac{\delta}{4m} \leq L_{VX} \frac{\delta}{4m}.$$

Неравенство ( ) примет вид

$$R_V \leq L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l}.$$

Получаем искомую оценку (16) погрешности вычисления функции цены. Теорема доказана.

**Замечание.** Определяя множество  $K$ , ограничивающее множество достижимости  $X(t, t_0, x_0)$  системы (1), мы использовали экспоненциальные оценки, которые могут давать результат, сильно превосходящий аппроксимируемое множество достижимости. Поэтому в тех задачах, где удастся доказать, что множество достижимости  $X(t, t_0, x_0)$  содержится в некотором прямоугольном множестве  $K' \subset K$  при любых  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$  и  $t \in [t_0, T]$ , вместо множества  $K$  можно использовать множество  $K'$ . Вместо множества  $D$  также можно рассматривать произвольное множество  $D' \subset D$ , содержащее в себе все решения задачи Коши (7)  $(x_H(t | x_T), \psi_H(t | x_T))$  при любых  $t \in [0, T]$  и  $x_T \in K$ .

**5. Приближенное решение задачи оптимального управления.** Опишем метод отыскания оптимального управления и соответствующей ему траектории для задачи оптимального управления (1), (2) для любой начальной точки  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$ . Для этого потребуется немного модифицировать метод вычисления функции цены.

Для каждой ячейки  $q \in \mathcal{Q}$  будем определять не только значение  $W(q)$ , но и ту точку  $\eta \in \mathcal{N}$ , в которой это значение достигается. Обозначим ее  $\eta(q)$ . Таким образом, на множестве  $\mathcal{Q}$  будет определена функция  $\eta(q) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такая, что  $W(q) = \Phi(\eta(q))$  и  $\eta(q) \in \mathcal{N}(q)$ .

Рассмотрим произвольную точку  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$ . Пусть  $q \in \mathcal{Q}$  та ячейка, в которую попала точка  $(t_0, x_0)$ . Рассмотрим решение задачи Коши (7) при  $x_T = \eta(q)$ :  $(x_H(\cdot | \eta(q)), \psi_H(\cdot | \eta(q)))$ . Обозначим экстремальное управление, соответствующее этому решению, через

$$u^*(\cdot) = u^*(x_H(\cdot | \eta(q)), \psi_H(\cdot | \eta(q))). \quad (27)$$

Согласно лемме 4 функция  $u^*(\cdot)$  определена на всем отрезке  $[0, T]$ . Подставим это управление в систему (1) и рассмотрим решение  $x(\cdot | t_0, x_0, u^*(\cdot))$ .

**Лемма 6.** Для любой точки  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times X$  существует такое допустимое управление  $u^*(\cdot)$ , определяемое по формуле (27), что

$$\Phi(x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot))) \leq V(t_0, x_0) + \left( L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l} \right) (1 + e^{-L t_0}).$$

**Доказательство.** Рассмотрим ячейку  $q \in \mathcal{Q}$ , в которую попала точка  $(t_0, x_0)$ . Из теоремы 1 следует, что

$$\Phi(\eta(q)) = W(q) \leq V(t_0, x_0) + L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l}. \quad (28)$$

Рассмотрим любую точку  $(t_j, x_j) \in X_E(\eta(q)) \cap q$ . Оценим расстояние

$$\|x_0 - x_H(t_j | \eta(q))\| \leq \|x_0 - x_j\| + \|x_j - x_H(t_j | \eta(q))\| \leq \frac{\Delta}{m} + \frac{C_H}{s} \leq \frac{\Delta}{m} + \frac{\delta}{4m}.$$

Оценим расхождение двух решений системы (1) в момент времени  $T$  из начальных состояний  $x(t_0) = x_0$  и  $x(t_j) = x_H(t_j | \eta(q))$  под действием управления  $u^*(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \left\| x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot)) - x(T | t_j, x_H(t_j | \eta(q)), u^*(\cdot)) \right\| &\leq \left( \|x_0 - x_H(t_j | \eta(q))\| + M|t_j - t_0| \right) e^{L(T-t_0)} \leq \\ &\leq \left( \frac{\Delta}{m} + \frac{\delta}{4m} + \frac{MT}{l} \right) e^{L(T-t_0)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из липшицевости функции  $\Phi(x)$  и неравенства (29) получаем

$$\begin{aligned} \left| \Phi(x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot))) - \Phi(x(T | t_j, x_H(t_j | \eta(q)), u^*(\cdot))) \right| &\leq L_\Phi \left( \frac{\Delta}{m} + \frac{\delta}{4m} + \frac{MT}{l} \right) e^{L(T-t_0)} = \\ &= \left( L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l} \right) e^{-Lt_0}. \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что  $\Phi(x(T | t_j, x_H(t_j | \eta(q)), u^*(\cdot))) = \Phi(\eta(q)) = W(q)$ . Таким образом, из неравенств (30) и (28) получаем утверждение леммы:

$$\begin{aligned} \Phi(x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot))) &\leq W(q) + \left( L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l} \right) e^{-Lt_0} \leq \\ &\leq V(t_0, x_0) + L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l} + \left( L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l} \right) e^{-Lt_0} = \\ &= V(t_0, x_0) + \left( L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l} \right) (1 + e^{-Lt_0}). \end{aligned}$$

Из леммы 6 следует, что результат, гарантируемый управлением  $u^*(\cdot)$ , стремится к оптимальному значению  $V(t_0, x_0)$  при стремлении параметров  $m, l, k$  и  $s$  к нулю.

Рассмотрим способ приближенного вычисления управления  $u^*(\cdot)$  и оценим, как при этом изменится значение целевой функции  $\Phi(x)$ .

Временной интервал  $[t_0, T]$  разобьем на  $N$  частей точками  $t_i$ :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad t_{i+1} - t_i = \frac{T - t_0}{N}.$$

Для решения задачи Коши (7) применим метод Эйлера с постоянным шагом  $\frac{T - t_0}{N}$ . Получим точки

$$(t_i, x_H^i, \psi_H^i), \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{где } x_H^N = \eta(q) \text{ и } \psi_H^N = -\frac{\partial \Phi(x_H^N)}{\partial x}.$$

Если выполняется условие  $N \geq \frac{2C'_H}{\varepsilon_\psi}$ , где  $C'_H = \frac{1}{2} L_H M_H (T - t_0)^2 e^{L_H(T-t_0)}$ , то справедлива оценка погрешности

$$\|x_H^i - x_H(t_i | \eta(q))\| + \|\psi_H^i - \psi_H(t_i | \eta(q))\| \leq \frac{C'_H}{N}. \quad (31)$$

Определим приближенное значение  $u^*(\cdot)$  в точках  $t_i$  как  $u_i^* = u^*(x_H^i, \psi_H^i)$ . Из (31) получаем неравенство  $\|u^*(t_i) - u_i^*\| \leq L_u \frac{C'_H}{N}$ , где  $L_u$  — константа Липшица функции  $u^*(x, \psi)$  на множестве  $D\left(\frac{\varepsilon_\psi}{2}\right)$ .

Рассмотрим кусочно-постоянное управление  $\bar{u}(\cdot)$ :  $\bar{u}(t) = u_i^*, \quad t \in [t_i, t_{i+1})$ . Подставив это управление в систему (1), получим решение  $x(\cdot | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot))$ . Для отыскания приближенного решения применим метод Эйлера с тем же шагом  $\frac{T - t_0}{N}$ . Получим точки  $(t_i, x_i), i = 0, \dots, N$ .

Пусть  $L_f$  — константа Липшица функции  $f(x, u)$  по совокупности переменных при  $x \in K + S_{\frac{\varepsilon_\psi}{2}}, u \in P$  и

$M_f = \max_{x \in K + S \frac{\varepsilon_\psi}{2}, u \in P} f(x, u)$ . Тогда справедлива оценка погрешности

$$\left\| x_i - x(t_i | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)) \right\| \leq \frac{1}{2} L_f M_f (T - t_0)^2 e^{L_f(T-t_0)} \frac{1}{N} = \frac{C_f}{N} \quad (32)$$

при условии, что  $\frac{C_f}{N} \leq \frac{\varepsilon_\psi}{2}$ .

Оценим, насколько значение целевой функции  $\Phi(x_N)$  будет отличаться от оптимального.

**Лемма 7.** Для двух решений системы (1)  $x(\cdot | t_0, x_0, u^*(\cdot))$  и  $x(\cdot | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot))$  справедлива оценка

$$\left\| x(T | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)) - x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot)) \right\| \leq \frac{C_x}{N},$$

где  $C_x = L_u(M_H(T-t_0) + C'_H)(e^{L_1(T-t_0)} - 1)$ ,  $L_1$  — константа Липшица функции  $f(x, u)$  по совокупности переменных при  $x \in K$  и  $u \in P$ .

**Доказательство.** Оценим расстояние между  $u^*(\cdot)$  и  $\bar{u}(\cdot)$  в метрике  $C[t_0, T]$ . Рассмотрим произвольный отрезок  $[t_i, t_{i+1}]$  и любое число  $\theta \in [0, \frac{T-t_0}{N}]$ :

$$\|u^*(t_i + \theta) - u^*(t_i)\| \leq L_u(M_F\theta + M_G\theta) = L_u M_H \theta \leq L_u M_H \frac{T-t_0}{N}.$$

Таким образом, для любого  $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\|u^*(t) - \bar{u}(t)\| = \|u^*(t) - u_i^*\| \leq \|u^*(t) - u^*(t_i)\| + \|u^*(t_i) - u_i^*\| \leq L_u M_H \frac{T-t_0}{N} + L_u \frac{C'_H}{N} = \frac{C_u}{N}. \quad (33)$$

Из леммы Гронуолла и (33) следует утверждение леммы:

$$\begin{aligned} \left\| x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot)) - x(T | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)) \right\| &\leq \max_{t \in [t_0, T]} \|u^*(t) - \bar{u}(t)\| (e^{L_1(T-t_0)} - 1) \leq \\ &\leq \left( L_u M_H \frac{T-t_0}{N} + L_u \frac{C'_H}{N} \right) (e^{L_1(T-t_0)} - 1) = \frac{C_x}{N}. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть выполняются все условия теоремы 1. Параметр  $N$  выбирается таким, чтобы  $N \geq N_0 = \max\left(\frac{2C'_H}{\varepsilon_\psi}, \frac{2C_f}{\varepsilon_\psi}\right)$ . Тогда справедлива оценка

$$V(t_0, x_0) - L'_\Phi \frac{C_f}{N} \leq \Phi(x_N) \leq V(t_0, x_0) + \left( L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l} \right) (1 + e^{-L t_0}) + L'_\Phi \frac{C_f + C_x}{N}, \quad (34)$$

где  $L'_\Phi$  — константа Липшица функции  $\Phi(x)$  на множестве  $K + S \frac{\varepsilon_\psi}{2}$ .

**Доказательство.** Из определения функции цены следует, что  $\Phi(x(T | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot))) \geq V(t_0, x_0)$ . Из липшицевости  $\Phi(x)$  и (32) получаем

$$\left| \Phi(x_N) - \Phi(x(T | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot))) \right| \leq L'_\Phi \frac{C_f}{N}.$$

Следовательно,

$$\Phi(x_N) \geq \Phi(x(T | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot))) - L'_\Phi \frac{C_f}{N} \geq V(t_0, x_0) - L'_\Phi \frac{C_f}{N}.$$

Первая часть неравенства (34) доказана. Докажем вторую часть неравенства. Из оценки погрешности метода Эйлера (32) и леммы 7 получаем

$$\left\| x_N - x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot)) \right\| \leq \left\| x_N - x(T | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)) \right\| + \left\| x(T | t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)) - x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot)) \right\| \leq \frac{C_f}{N} + \frac{C_x}{N}.$$

Используя липшицевость  $\Phi(x)$  и лемму 6, получаем искомое неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(x_N) &\leq \Phi(x(T | t_0, x_0, u^*(\cdot))) + L'_\Phi \frac{C_f + C_x}{N} \leq \\ &\leq V(t_0, x_0) + \left( L_{VX} \left( \Delta + \frac{\delta}{4} \right) \frac{1}{m} + L_{VT} T \frac{1}{l} \right) (1 + e^{-L t_0}) + L'_\Phi \frac{C_f + C_x}{N}. \end{aligned}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник Моск. ун-та. Сер. матем. и механ. 1959. № 2. 25–32.
2. *Субботина Н.Н.* Необходимые и достаточные условия оптимальности управлений и траекторий // Синтез оптимального управления в игровых системах (сб. научных трудов). Свердловск, ИММ УНЦ АН СССР. 1986. 86–96.
3. *Субботина Н.Н.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в терминах принципа максимума и супердифференциала функции цены // Свердловск, ИММ УрО АН СССР. 1988. Деп. в ВИНТИ, № 2898-В.88.
4. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2001.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
6. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
7. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
9. *Subbotina N.N.* The maximum principle and the superdifferential of the value function // Probl. Control Inform. Theory. 1989. **18**, N 3. 151–160.

Поступила в редакцию  
14.09.2004

---