

Использование естественных переменных для снижения алгоритмической сложности некоторых задач гидравлики

Г. А. Макеев

ООО “РН–БашНИПИнефть”, Уфа, Российская Федерация

ORCID: 0009-0009-6947-8671, e-mail: greg@bnipi.rosneft.ru

Аннотация: Гидравлические расчеты являются частью разнообразного инженерного программного обеспечения во многих областях, включая нефтегазодобычу. Повышение эффективности их численной реализации важно для решения практических обратных задач восстановления неизвестных параметров многих процессов. Целью данной работы является снижение алгоритмической сложности расчета изменяющегося во времени перепада давления при движении смеси в трубе при известных параметрах смеси. Рассматриваются задачи расчета изменения гидростатического давления и потери давления на трение для заданной зависимости удельных потерь давления на трение от расхода. Показано, как за счет правильного выбора переменных можно свести расчет потерь давления на трение к алгоритму линейной сложности, а расчет гидростатического давления — к алгоритму линейно-логарифмической сложности от размерности входных данных.

Ключевые слова: гидравлическое трение, потери давления на трение, гидростатическое давление, обратная задача, эффективный алгоритм, характеристическая переменная.

Благодарности: Автор благодарит д.ф.-м.н. Р. К. Газизова, к.ф.-м.н. А. И. Федорова и к.ф.-м.н. Ю. Б. Линд за неоценимые советы и комментарии при подготовке текста статьи.

Для цитирования: Макеев Г.А. Использование естественных переменных для снижения алгоритмической сложности некоторых задач гидравлики // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 3. 246–258. doi 10.26089/NumMet.v25r319.

Using natural variables to reduce algorithmic complexity of some hydraulic calculations

Grigory A. Makeev

RN–BashNIPIneft LLC, Ufa, Russia

ORCID: 0009-0009-6947-8671, e-mail: greg@bnipi.rosneft.ru

Abstract: Hydraulic calculations play an important role in a variety of engineering software in many areas, including oil and gas production. Increasing the efficiency of their numerical implementations is important for solving practical inverse problems of recovering unknown parameters of many processes. The purpose of this work is to reduce the algorithmic the complexity of calculating the time-varying pressure drop of slurry on its way through the tubing, given the slurry and the tubing parameters. Hydrostatic pressure and frictional pressure loss are being calculated as functions of



specific friction pressure losses, tubing geometry and slurry pumping schedule. The correct choice of variables, introduced in this paper, allows to reduce the algorithmic complexity of the friction pressure loss to linear while hydrostatic pressure to linear-logarithmic complexity on the input data dimensions.

Keywords: hydraulic friction, frictional pressure loss, hydrostatic pressure, inverse problem, effective algorithm, characteristic variable.

Acknowledgements: The author thanks R. K. Gazizov, A. I. Fedorov, and Yu. B. Lind for invaluable advice and comments in preparing the text of the article.

For citation: G. A. Makeev, “Using natural variables to reduce algorithmic complexity of some hydraulic calculations,” *Numerical Methods and Programming*. 25 (3), 246–258 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r319.

1. Введение. Моделирование многих технологических операций при нефтегазодобыче требует выполнения разнообразных гидравлических расчетов в специализированном программном обеспечении (ПО) [1, 2]. Решение обратных задач для восстановления неизвестных параметров моделей требует повышения эффективности этих расчетов, в частности за счет снижения алгоритмической сложности используемых алгоритмов. В качестве примера рассмотрим следующие практические задачи.

1. В процессе операции гидравлического разрыва пласта (ГРП) в скважину под большим давлением через насосно-компрессорные трубы (НКТ) закачивается жидкость, несущая твердые гранулы расклинивающего агента — пропанта [3]. Под действием высокого давления в породе возникает трещина, которая заполняется закачиваемой смесью. После остановки закачки жидкость из трещины фильтруется в пласт, оставляя в трещине пропант. Проницаемость трещины, заполненной пропантом, должна быть гораздо выше, чем проницаемость пласта. В этом случае можно говорить об увеличении площади контакта скважины с пластом и, следовательно, о повышении продуктивности скважины.
2. В процессе любой технологической операции с использованием гибких насосно-компрессорных труб (ГНКТ) в ствол скважины спускается гибкая труба [4], через которую закачивается жидкость или газ. Однако обычно в процессе такой операции они не попадают в пласт, а поднимаются обратно по затрубному кольцевому пространству. При этом поток жидкости может выносить на поверхность твердые частицы, производя промывку скважины.

Основная сложность производимых гидравлических расчетов в приведенных двух примерах заключается в том, что практически всегда в скважине находятся смеси, состоящие из жидкостей разной реологии и с различной концентрацией твердых частиц. Расписание операции определяет, в каких объемах и с каким расходом закачиваются разные жидкости, и как меняется со временем концентрация твердых частиц в закачиваемой смеси.

На трубе установлены манометры, измеряющие устьевое давление $P_{уст}$ на входе в трубу (устье скважины) и забойное давление $P_{заб}$ на выходе из трубы (забой скважины). При моделировании закачки, кроме всех прочих процессов, необходимо рассчитывать изменения устьевого и забойного давлений во времени для заданного расписания операции. Рассчитанные и измеренные устьевые и забойные давления используются для решения обратных задач восстановления неизвестных свойств жидкостей и трубы (например, шероховатости внутренней поверхности).

Из всего комплекса параметров, характеризующих движение смеси по стволу скважины, можно выделить гидравлические потери давления на трение $P_{тр}$ и перепад гидростатического давления $P_{гс}$ по всей длине ствола между устьем и забоем. Разность этих величин составляет искомый перепад давления между устьем и забоем в каждый момент времени:

$$P_{заб}(t) - P_{уст}(t) = P_{гс}(t) - P_{тр}(t). \quad (1)$$

Гидравлические потери давления на трение $P_{тр}(t)$ при движении жидкости по трубе и перепад гидростатического давления $P_{гс}(t)$ являются изменяющимися во времени величинами, определяемыми интегралом от свойств потока смеси в трубе и геометрией самой трубы. Оценим вычислительную сложность их расчета во все моменты времени.

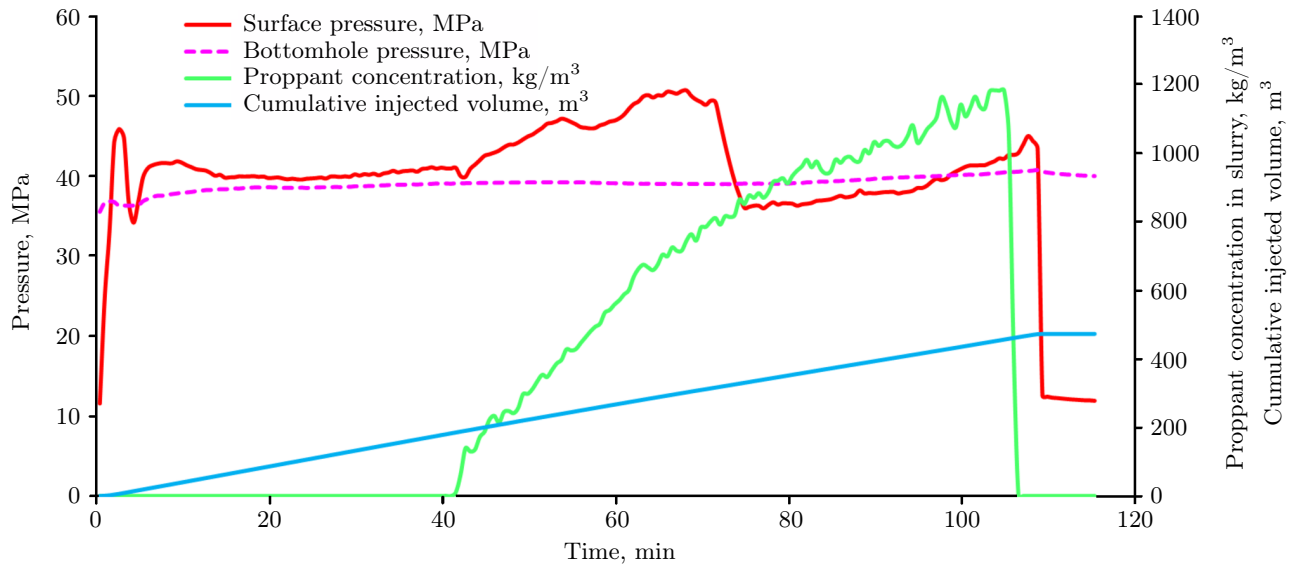


Рис. 1. График закачки как функция времени (масштабы осей концентрации и объема совпадают)
 Fig. 1. Injection plot as a function of time (the scales of the concentration and volume axes coincide)

Расписание типовой закачки при ГРП может содержать порядка $N_t = 10000$ временных записей технологических параметров с дискретизацией в 1 с (рис. 1). Типичная скважина может иметь порядка $N_l = 300$ сегментов, определяемых дискретными точками траектории. Непосредственный расчет гидравлических потерь давления на трение и перепада гидростатического давления, когда на каждом из N_t временных шагов производится расчет продвижения смеси по трубе, состоящей из N_l сегментов, и интегрирование по всем сегментам, будет иметь алгоритмическую сложность $O(N_l \cdot N_t)$. Для разового решения прямой задачи и типовых входных данных такая алгоритмическая сложность не представляет проблемы. Однако при решении обратной задачи подбора неизвестных свойств труб или жидкостей квадратичная сложность не позволяет делать это за приемлемое время.

В статье представлена математическая модель с использованием естественных переменных и описаны алгоритмы, позволяющие обе задачи расчета $P_{тр}(t)$ и $P_{гс}(t)$ решать с алгоритмической сложностью не более чем $O(N_t)$ для трения и $O(N_l \cdot \log N_l + N_t \cdot \log N_t)$ для гидростатического давления, т.е. линейной и линейно-логарифмической. В разделе 2 приведена постановка задачи, в разделе 3 описаны закон переноса и ключевая связь между интегралами по пространству и времени, в разделах 4 и 5 показано, как эта связь используется для разработки методики быстрого расчета $P_{тр}(t)$ и $P_{гс}(t)$. Численная схема расчета приведена в разделе 6, результаты апробации — в разделе 7.

2. Постановка задачи расчета перепада давления в трубе. Представим скважину в виде цилиндрической трубы постоянного диаметра $D_{\text{нкт}}$ длиной $L_{\text{нкт}}$ и объемом $V_{\text{нкт}}$. Выберем одномерную систему координат, связанную с кривой, проходящей через центры всех поперечных сечений трубы. Будем описывать положение любой точки на ней расстоянием l вдоль кривой от устья. Для трубы постоянного диаметра удобно перейти от l к частичному объему трубы $v = S_{\text{нкт}}l$ от ее начала до точки l , где $S_{\text{нкт}} = V_{\text{уд}} = \frac{\pi D_{\text{нкт}}^2}{4}$ — площадь поперечного сечения трубы или удельный объем (отношение объема к длине трубы, $\text{м}^3/\text{м}$). Любой частичный объем v или расстояние l однозначно определяют координату сечения трубы. Поэтому далее под словами “в точке l трубы” или “в точке v трубы” будем понимать следующее: “в точке трубы, такой, что расстояние вдоль оси трубы от устья до этой точки равно l , а объем трубы от устья до этой точки равен v ”.

Радиус кривизны скважины мал по сравнению с ее длиной, поэтому кривизной скважины пренебрежем, однако поставим в соответствие каждой точке скважины зенитный угол $\alpha(l)$ или $\alpha(v)$ и вертикальную глубину $z(l)$ или $z(v)$ (рис. 2).



Через устье в трубу осуществляется закачка жидкостей различной плотности и реологии. В поступающей жидкости может находиться определенное количество пропанта. Полученная смесь проходит по всей трубе и выходит с другого ее конца $l = L_{\text{нкт}}$ в пласт. Далее эту точку будем называть забоем скважины. Динамика закачки описывается заданной всюду монотонно возрастающей функцией $q(t)$ накопленного объема закачки — объема смеси, прошедшего к моменту времени t через устье, или строго положительной функцией $\dot{q}(t)$ объемного расхода закачки через устье, при этом $q(0) = 0$. В силу монотонности $q(t)$ верно утверждение о существовании однозначной обратной функции $t(q)$. В этих условиях вместо времени t в задаче можно использовать величину $q(t)$ в качестве временной координаты. Области определения времени $t \geq 0$ должна соответствовать область определения накопленного объема $q \geq 0$.

Использование в качестве временной координаты накопленного объема q позволяет удобно описывать процессы, которые зависят только от закачанного объема, но не зависят от расхода смеси. А выбор в качестве пространственной координаты частичного объема вдоль ствола v удобен для описания переноса объемов вдоль ствола скважины при закачке.

Для большинства типов рассматриваемых операций применяемые жидкости относятся к неньютоновским с очень широким диапазоном реологических параметров [3, 5–7]. Эффектами инерции при движении смеси далее будем пренебрегать, а саму смесь будем считать несжимаемой, поэтому объемный расход в любом сечении трубы постоянного диаметра одинаков. Скорости смесей в трубах и свойства жидкостей на практике таковы, что, за редким исключением, реализуется турбулентный, переходный (турбулентно-ламинарный) или еще более сложный режим течения, включающий наличие пограничного слоя у стенки трубы и распределения скоростей по ее сечению. Практика, однако, показывает, что в рассматриваемых условиях зона изменения скорости течения по радиусу сечения достаточно мала и ее влиянием на перенос смеси можно пренебречь и считать профиль скорости при рассматриваемых скоростях течения в трубе постоянным. Это предположение позволит считать течение одномерным и характеризовать средней по сечению скоростью. Кроме этого, время нахождения закачиваемой жидкости в трубе обычно таково, что диффузионными и конвекционными эффектами в области контакта двух последовательно закачиваемых жидкостей тоже можно пренебречь и считать, что жидкости движутся по трубе в поршневом режиме, не смешиваясь друг с другом.

Пусть $\rho(v, q)$ — плотность смеси в точке трубы v в момент времени q . Будем считать, что задана плотность закачиваемой смеси на устье $\rho(0, q)$ и ее распределение по трубе в начальный момент времени $\rho(v, 0)$ для $v \in [0, V_{\text{нкт}}]$. Кроме этого, задана концентрация пропанта $c(0, q)$ в закачиваемой смеси на устье и она же в начальный момент времени для каждой точки ствола $c(v, 0)$ для $v \in [0, V_{\text{нкт}}]$.

Введем для каждой из $i = \overline{1, n}$ закачиваемых жидкостей индикаторную функцию присутствия i -й жидкости в точке трубы v в момент времени q :

$$e_i(v, q) = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-я жидкость отсутствует в точке } v \text{ трубы в момент времени } q, \\ 1, & \text{если } i\text{-я жидкость находится в точке } v \text{ трубы в момент времени } q. \end{cases}$$

Несмотря на то что в трубу закачиваются разные жидкости, в каждый момент времени закачивается только одна. Будем считать, что для $i = \overline{1, n}$ заданы $e_i(0, q)$ и $e_i(v, 0)$ для $v \in [0, V_{\text{нкт}}]$. Пусть перед началом закачки ствол заполнен первой жидкостью: $e_1(v, 0) = 1$ и $e_i(v, 0) = 0$ для $i = \overline{2, n}$ и $v \in [0, V_{\text{нкт}}]$.

Рассмотрим давление в трубе $P(v, q)$, при этом выделим отдельно устьевое и забойное давление: $P_{\text{уст}}(q) = P(0, q)$ и $P_{\text{заб}}(q) = P(V_{\text{нкт}}, q)$. Предположим, что удельные (по длине) потери давления на трение для каждой жидкости являются только функцией расхода и диаметра $f(\dot{q}, d)$, называемой картой удельных потерь давления на трение или просто картой трения для этой жидкости. Имея трубу постоянного диаметра, будем эту функцию дальше обозначать функцией только расхода \dot{q} . Значения функции $f(\dot{q})$ в единицах СИ имеют размерность Па/м.

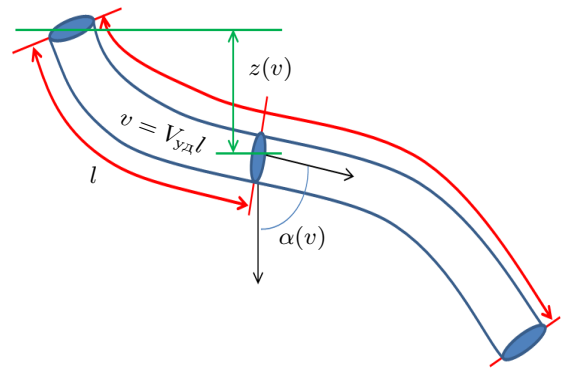


Рис. 2. Траектория скважины и функция зенитного угла

Fig. 2. Well path and the inclination angle function

В инженерной практике ГРП и ГНКТ для расчета перепада давления повсеместно используются корреляционные методы, связывающие удельные потери давления на трение с параметрами потока [8–12]. В некоторых частных случаях используемых моделей жидкостей и режимов течения применяются аналитические зависимости [13–15]. Для произвольного же режима течения такие корреляции имеют самый общий вид и их параметры определяются эмпирически [16] или в результате лабораторных экспериментов [7].

Наличие в жидкости твердых частиц пропанта с концентрацией c приводит к изменению удельных потерь давления на трение в соответствии с некоторым множителем $h(c)$, зависящим от концентрации c . Этот множитель может определяться различными аналитическими корреляциями или с использованием явно задаваемой табулированной функции [17]. Такая постановка для задачи расчета потери давления на трение является типовой для многих инженерных задач, связанных с моделированием ГРП и ГНКТ [18, 19].

В любой момент времени перепад давления в трубе на любом ее достаточно малом участке Δv , заполненном одной жидкостью с постоянной концентрацией пропанта c , определяется изменением гидростатического давления и потерями давления на трение:

$$\Delta P(v, q) = \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} [\rho(v, q) \cdot g \cdot \cos(\alpha(v)) - f(\dot{q}) \cdot h(c(v, q))] \Delta v, \quad (2)$$

где $\rho(v, q) \cdot g \cdot \cos(\alpha(v))$ есть часть перепада давления на участке Δv , определяемая гидростатическим давлением, а $f(\dot{q}) \cdot h(c(v, q))$ — часть перепада давления, определяемая потерями давления на трение.

Для всех закачиваемых жидкостей считаем известными их карты трения $f_i(\dot{q})$ и одну общую функцию множителя $h(c)$. Как правило, $h(c)$ — монотонная неубывающая функция концентрации пропанта, причем $h(0) = 1$.

Для нескольких жидкостей, находящихся в разных частях ствола, изменение давления необходимо суммировать. В этом случае формулу (1) с учетом (2) можно переписать следующим образом:

$$P_{\text{заб}}(q) - P_{\text{уст}}(q) = \int_0^{V_{\text{НКТ}}} \frac{\Delta P(v, q)}{\Delta v} dv = P_{\text{ГС}}(q) - P_{\text{ТР}}(q),$$

где

$$P_{\text{ГС}}(q) = \int_0^{V_{\text{НКТ}}} \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} \rho(v, q) \cdot g \cdot \cos(\alpha(v)) dv, \quad (3)$$

$$P_{\text{ТР}}(q) = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{V_{\text{НКТ}}} \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} f(\dot{q}) \cdot h(c(v, q)) \cdot e_i(v, q) dv \right]. \quad (4)$$

Задачей данной работы является разработка эффективной вычислительной схемы расчета (3) и (4) для всех значений переменной q .

3. Закон переноса свойства и безразмерное время. В указанных условиях одномерного поршневого течения в трубе некоторые характеристики смеси $s(v, q)$ переносятся по трубе согласно следующему свойству:

$$s(v, q) = s(0, q - v). \quad (5)$$

Характеристики, удовлетворяющие свойству (5), будем называть переносимыми. К ним относятся, например, плотность смеси $\rho(v, q)$, концентрация пропанта $c(v, q)$, индикаторные функции $e_i(v, q)$.

Таким образом, в рассматриваемой задаче $q - v$ играет роль характеристической переменной. Свойство (5), кроме прочего, позволяет естественным образом расширить область определения функции $s(v, q)$ на интервал $-V_{\text{НКТ}} < q < 0$. Так, для $q \in [0, V_{\text{НКТ}}]$ в соответствии с (5) имеем $s(0, -q) = s(q, 0)$.

Кроме этого, (5) позволяет представить любое переносимое свойство функцией одной характеристической переменной, которую удобнее нормировать на $V_{\text{НКТ}}$:

$$s(v, q) = s(0, q - v) = \tilde{s} \left(\frac{q - v}{V_{\text{НКТ}}} \right).$$

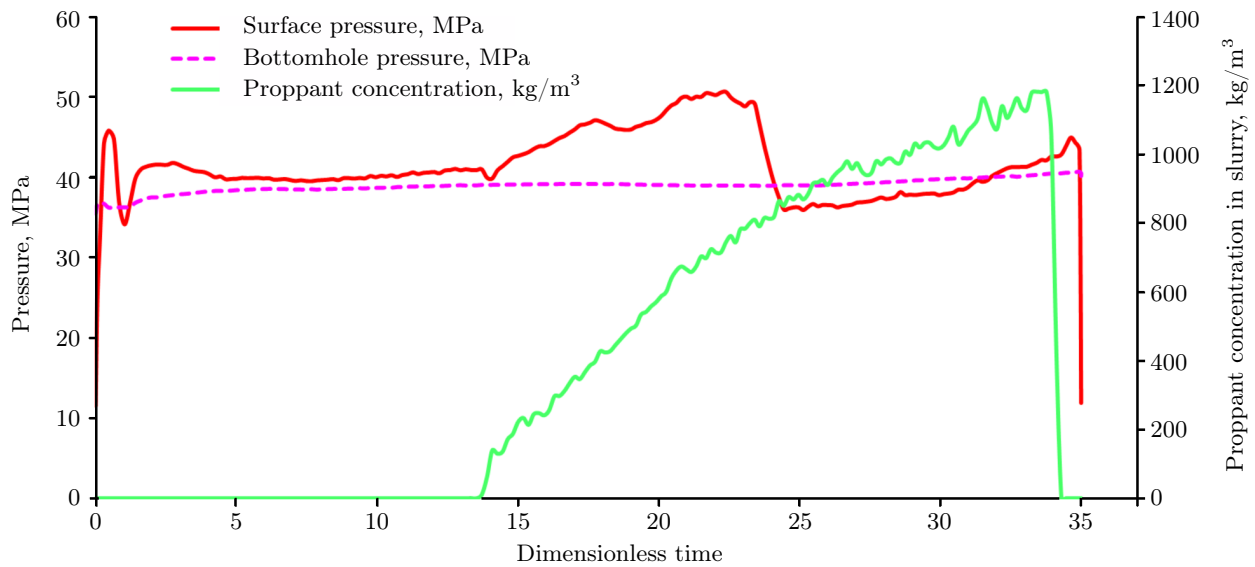


Рис. 3. График закачки как функция безразмерного времени

Fig. 3. Injection plot as a function of dimensionless time

Функция $\tilde{s}(\tilde{t})$ имеет физический смысл значения свойства s закачиваемой на устье смеси в момент безразмерного времени \tilde{t} , численно равного отношению закачанного к этому времени объема к объему трубы:

$$\tilde{t}(t) = \frac{q(t)}{V_{\text{нкт}}}.$$

На рис. 3 приведены те же данные, что на рис. 1, но в координатах безразмерного времени по горизонтальной оси, поэтому на этом рисунке отсутствуют интервалы с нулевым расходом (без закачки). В данном случае рисунки похожи, потому что закачка выполнялась с расходом, близким к постоянному. Чем сильнее изменяется функция расхода, тем сильнее будут отличаться графики в координатах обычного и безразмерного времени. Безразмерное время \tilde{t} удобно использовать для описания явлений во время закачки, которые зависят только от накопленного объема в предположении поршневого режима течения. Для подтверждения рассмотрим следующие ситуации.

1. В начальный момент времени $\tilde{t} = 0$. При $\tilde{t} \in [0, 1]$ жидкость, заполнявшая трубу перед началом закачки, все еще находится в трубе, при $\tilde{t} \geq 1$ она полностью вышла из трубы.
2. Любое свойство смеси на забое тривиально выражается через это же свойство на устье: $s(V_{\text{нкт}}, \tilde{t}) = s(0, \tilde{t} - 1)$.
3. Разность между двумя моментами времени $\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 > 1$ означает, что между этими моментами времени был закачан объем, превышающий объем трубы.
4. Если какое-то событие (например, смена жидкости) происходит на устье в момент времени \tilde{t} , то оно произойдет на забое в момент $\tilde{t} + 1$. Последнее позволяет по графикам фактических данных контролировать обоснованность предположений о режиме течения.

Используя свойство переноса (5), можно записать:

$$\int_0^{V_{\text{нкт}}} s(v, q) dv = \int_{q-V_{\text{нкт}}}^q s(0, \omega) d\omega = V_{\text{нкт}} \int_{q/V_{\text{нкт}}-1}^{q/V_{\text{нкт}}} \tilde{s}(\tau) d\tau = V_{\text{нкт}} \int_{\tilde{t}-1}^{\tilde{t}} \tilde{s}(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Формула (6) означает, что в любой момент времени q интеграл свойства s по объему трубы равен интегралу по времени от $q - V_{\text{нкт}}$ до q . Правая часть в (6) показывает, что интегрирование производится по одной и той же функции безразмерного времени $\tilde{s}(\tilde{t})$, со сдвигом окна интегрирования единичной ширины. Эта же формула показывает, что в стволе объемом $V_{\text{нкт}}$ всегда находится жидкость, закачанная за предшествующий моменту \tilde{t} единичный интервал безразмерного времени.

Используя формулу (6), можно показать, что

$$\int_0^{V_{\text{нкт}}} s(v, q) dv = \int_0^{V_{\text{нкт}}} s(v, 0) dv + \int_0^q s(0, \omega) d\omega - \int_0^q s(V_{\text{нкт}}, \omega) d\omega. \quad (7)$$

Таким образом, для вычисления интеграла по объему трубы в любой момент q нужно рассчитать его по объему трубы один раз в начальный момент времени. Для остальных моментов времени нужны только интегралы по времени, но не по объему трубы. Более того, интегралы свойства s по времени можно переписать так, что они будут зависеть только от значений функции s на устье. В частном случае, когда свойство s представляет собой плотность $\rho(v, q)$, (7) представляет собой еще одну формулировку закона сохранения массы. Однако все сказанное справедливо для любого свойства $s(v, q)$, переносимого вместе с потоком смеси по трубе и удовлетворяющего свойству переноса (5).

Таким образом, правильный выбор переменных позволяет рассчитывать интегралы переносимого свойства по пространству через интегралы по времени и наоборот, а также записывать произвольную функцию переносимого свойства как функцию одной переменной безразмерного времени. Это утверждение будет далее использовано для расчета $P_{\text{тр}}(q)$ и $P_{\text{гс}}(q)$.

4. Потери давления на трение. Рассмотрим задачу расчета $P_{\text{тр}}(q)$ согласно определению (4). Поскольку функции $c(v, q)$ и $e_i(v, q)$ обладают свойством (5), а функции $f_i(\dot{q})$ не зависят от переменной v , то, используя (7), можно записать:

$$\begin{aligned} P_{\text{тр}}(q) = & \sum_{i=1}^n \left[\frac{f_i(\dot{q})}{S_{\text{нкт}}} \int_0^{V_{\text{нкт}}} h(c(v, 0)) \cdot e_i(v, 0) dv \right] \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\frac{f_i(\dot{q})}{S_{\text{нкт}}} \int_0^q h(c(0, \omega)) \cdot e_i(0, \omega) d\omega \right] \\ & - \sum_{i=1}^n \left[\frac{f_i(\dot{q})}{S_{\text{нкт}}} \int_0^q h(c(0, \omega - V_{\text{нкт}})) \cdot e_i(0, \omega - V_{\text{нкт}}) d\omega \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Первая сумма в (8) представляет собой потери давления на трение в трубе в начальный момент времени. Как правило, в начале закачки в трубе нет пропанта, то есть $c(v, 0) = 0$ для $v \in [0, V_{\text{нкт}}]$. Перед началом закачки ствол заполнен первой жидкостью, т.е. $e_1(v, 0) = 1$ и $e_i(v, 0) = 0$ для $v \in [0, V_{\text{нкт}}]$, $i = \overline{2, n}$. А значит, первая сумма упростится до выражения

$$\frac{f_1(\dot{q})}{S_{\text{нкт}}} V_{\text{нкт}} = f_1(\dot{q}) L_{\text{нкт}}.$$

Если во второй и третьей сумме в (8) внести функции удельных потерь давления на трение $f_i(\dot{q})$ под знак интеграла, то может создаться впечатление, что это, соответственно, увеличение и уменьшение потери давления на трение за время закачки q .

Однако это впечатление ошибочно, потому что величина $f_i(\dot{q})$ не обладает свойством (5). Потери давления на трение для любого элементарного объема смеси будут меняться в процессе перемещения его по трубе, потому что зависят от $f_i(\dot{q})$ в момент расчета потерь давления на трение, а не в момент прохождения этим элементарным объемом устья. Другими словами, вызванный гидравлическим трением перепад давления в элементарном объеме жидкости при движении его по трубе не сохраняется, в отличие от его массы или концентрации пропанта в нем.

Если оставить величину $f_i(\dot{q})$ вне интеграла, то подынтегральные выражения как во второй, так и в третьей сумме (8) являются переносимыми характеристиками. В случае если пропанта нет, $c(0, \omega) = 0$, $h(c(0, \omega)) = 1$ и эти интегралы представляют собой, соответственно, увеличение и уменьшение части полной длины ствола, занятой i -й жидкостью. Их разность $L_i(q)$ назовем пробегом жидкости без пропанта. Это будет справедливо для всех жидкостей, кроме первой, которая заполняла весь ствол перед началом



закачки. Для удобства определим эту функцию отдельно для первой жидкости, включив дополнительное слагаемое $L_{\text{НКТ}}$:

$$L_i(q) = \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} \left[\int_0^q e_i(0, \omega) d\omega - \int_0^q e_i(0, \omega - V_{\text{НКТ}}) d\omega \right], \quad i = \overline{2, n},$$

$$L_1(q) = L_{\text{НКТ}} + \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} \left[\int_0^q e_1(0, \omega) d\omega - \int_0^q e_1(0, \omega - V_{\text{НКТ}}) d\omega \right]. \quad (9)$$

При наличии пропанта удельный вклад в трение жидкости, заходящей в ствол, увеличивается пропорционально коэффициенту $h(c(0, \omega))$. В этом случае вместо (9) можно говорить о величине $L_i^p(q)$, тоже имеющей размерность длины и определяемой аналогично (9):

$$L_i^p(q) = \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} \left[\int_0^q h(c(0, \omega)) \cdot e_i(0, \omega) d\omega - \int_0^q h(c(0, \omega - V_{\text{НКТ}})) \cdot e_i(0, \omega - V_{\text{НКТ}}) d\omega \right], \quad i = \overline{2, n},$$

$$L_1^p(q) = L_{\text{НКТ}} + \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} \left[\int_0^q h(c(0, \omega)) \cdot e_1(0, \omega) d\omega - \int_0^q h(c(0, \omega - V_{\text{НКТ}})) \cdot e_1(0, \omega - V_{\text{НКТ}}) d\omega \right]. \quad (10)$$

Величину $L_i^p(q)$ назовем пробегом жидкости с пропантом. Она тем больше, чем большая длина ствола занята i -й жидкостью и чем большую концентрацию пропанта эта жидкость переносит. В итоге формула для расчета потерь давления на трение в НКТ в любой момент q выглядит следующим образом:

$$P_{\text{тр}}(q) = \sum_{i=1}^n [f_i(\dot{q}) L_i^p(q)]. \quad (11)$$

5. Гидростатическое давление. Рассмотрим задачу расчета $P_{\text{Гс}}(q)$ согласно определению (3). Поскольку функция плотности $\rho(v, q)$ обладает свойством (5), выразим ее через плотность $\rho(0, q)$ на устье как $\rho(v, q) = \rho(0, q - v)$. Следовательно, по определению операции свертки (*) имеем:

$$P_{\text{Гс}}(q) = \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} \int_0^{V_{\text{НКТ}}} \rho(0, q - v) \cdot g \cdot \cos(\alpha(v)) dv = g \cdot \frac{1}{S_{\text{НКТ}}} (\rho(0, q) * \cos(\alpha(q))). \quad (12)$$

Заслуживает внимания также тот факт, что функцию пробега жидкости с пропантом $L_i^p(q)$, а значит и функцию потери давления на трение $P_{\text{тр}}(q)$, тоже можно выразить через свертку функции $h(c(0, q)) \cdot e_i(0, q)$ и оконной функции $\varphi(v)$ следующего вида:

$$\varphi(v) = \begin{cases} 0 & \text{для } v < 0, \\ 1 & \text{для } v \in [0, V_{\text{НКТ}}], \\ 0 & \text{для } v > V_{\text{НКТ}}. \end{cases}$$

Однако ввиду простоты одной из участвующих в свертке функций, а именно $\varphi(v)$, для численной схемы расчета $P_{\text{тр}}(q)$ удобнее пользоваться (10).

6. Численная схема, алгоритм расчета и вычислительная сложность. Обычно в инженерной постановке входные данные для задачи расчета трения в трубе и гидростатического давления для операций ГРП и ГНКТ являются функциями координаты вдоль ствола l и времени t . Как правило, они определены для N_l дискретных координат l и N_t дискретных моментов времени t :

- 1) накопленная закачка $q(t)$ или расход $\dot{q}(t)$;
- 2) концентрация пропанта $c(0, t)$ и $c(l, 0)$;
- 3) плотность смеси $\rho(0, t)$ и $\rho(l, 0)$;
- 4) индикаторные функции жидкостей $e_i(0, t)$ и $e_i(l, 0)$.

Для дискретно определенной монотонно возрастающей функции $q(t)$ существует обратная ей функция $t(q)$, и с ее помощью переход к функциям $c(v, q)$, $\rho(v, q)$ и $e_i(v, q)$ пространственной координаты v и временной координаты q выполняется за линейное алгоритмическое время $O(N_t)$.

Сначала рассмотрим численную схему расчета трения. Алгоритм расчета трения $P_{\text{тр}}(t)$ для каждого момента дискретного времени состоит из следующих шагов.

1. Перевести все входные данные из домена времени t в домен накопленной закачки q .
2. Рассчитать все требуемые интегралы по q .
3. Рассчитать функции $f_i(\dot{q})$.
4. Рассчитать потери давления на трение в соответствии с формулой (11).
5. Перевести полученные потери обратно в домен времени t .

Полученный алгоритм имеет минимально возможную линейную вычислительную сложность $O(N_t)$, соответствующую временной размерности самих входных данных N_t . Альтернативный алгоритм прямого вычисления потерь давления на трение по формуле (4) имеет алгоритмическую сложность $O(N_l \cdot N_t)$.

Далее рассмотрим численную схему расчета гидростатического давления. Траектория скважины обычно описывается N_l дискретными замерами зенитного угла $\alpha(l)$ вдоль ствола скважины. Выполним за линейное алгоритмическое время переход к функции $\alpha(v)$ зенитного угла от пространственной координаты v .

В отличие от задачи расчета трения, где все входные данные имеют одну и ту же дискретизацию, в задаче расчета гидростатического давления данные по времени и по длине вдоль траектории скважины различаются. Величины $\rho(0, t)$ и $q(t)$ имеют дискретизацию, связанную с частотой записи данных давления, концентрации и расхода на станции управления. Величина азимута $\alpha(l)$ имеет дискретизацию, связанную с частотой записи зенитного угла скважинным прибором (инклинометром) в процессе бурения скважины. После перехода от координат (t, l) к координатам (q, v) необходимо привести $\rho(0, q)$ и $\alpha(v)$ к одной и той же пространственной дискретизации.

Расчет свертки двух дискретизованных функций в (12) может выполняться с помощью двух вложенных циклов, что дает алгоритмическую сложность $O(N_l \cdot N_t)$ со сравнительно небольшой константой. Однако для расчета свертки двух функций можно также воспользоваться тем свойством, что $F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$, где под F понимается преобразование Фурье. Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), обладающий линейно-логарифмической алгоритмической сложностью, можно вычислить свертку двух функций в (12) за время $O(N_t \cdot \log N_t) + O(N_l \cdot \log N_l)$, но со сравнительно большой константой. Для малого числа точек вычислительно выгоднее использовать два вложенных цикла, но с ростом чисел N_l и N_t линейно-логарифмический алгоритм становится выгоднее. Реализация алгоритмов свертки в библиотеке численных алгоритмов SciPy автоматически, в зависимости от размерности входных данных, выбирает прямое вычисление свертки двумя вложенными циклами для малых N_t и N_l или предварительное построение БПФ тогда, когда размерности данных таковы, что это становится вычислительно выгоднее. Согласно документации SciPy [20], граница применимости методов соответствует $N_t = 500$. Это означает, что уже для входных данных с дискретизацией 1 с и длительностью записи 500 с, то есть 8.3 мин, использование свертки с БПФ дает выигрыш по времени в сравнении с вложенными циклами. Это время характерно для небольших тестовых закачек и гораздо меньше, чем типовое время закачки основного ГРП, которое может составлять часы. После расчета $P_{\text{гс}}(q)$ за линейное алгоритмическое время переводится обратно в домен обычного времени.

Важно, что представление гидростатического давления в виде (12) возможно только в том случае, когда обе функции приведены к одному и тому же аргументу — объему, а численный расчет свертки требует приведения этих функций к одной и той же пространственной дискретизации.

В итоге алгоритм расчета гидростатического давления $P_{\text{гс}}(t)$ для каждого момента дискретного времени состоит из следующих шагов.

1. Перевести все входные данные из домена (t, l) в домен (q, v) .
2. Интерполировать $\rho(0, q)$ и $\alpha(v)$ на единую шкалу координаты v с заданной дискретизацией, не менее точной, чем исходная дискретизация q и v , для расчета свертки.
3. Рассчитать свертку (12) с помощью БПФ.
4. Перевести полученное гидростатическое давление $P_{\text{гс}}(q)$ в домен времени t .



В некоторых случаях может понадобиться рассчитывать перепад давления при движении смеси по нескольким последовательно состыкованным трубам разной длины и диаметра. В инженерной практике карты трения $f_i(\dot{q}, d)$ для всех жидкостей задаются отдельно для нескольких разных диаметров, а для промежуточных диаметров используется интерполяция. Модификация методики и алгоритма расчета для такого случая приводит к следующим требованиям:

- 1) нужно суммировать трение не только по жидкостям, но и по трубам;
- 2) функции $\hat{c}(0, q)$ и $\hat{e}_i(0, q)$ для любой трубы, перед которой находятся другие трубы суммарным объемом V , должны выражаться через $c(0, q)$ и $e_i(0, q)$ на устье: $\hat{c}(0, q) = c(0, q - V)$ и $\hat{e}_i(0, q) = e_i(0, q - V)$.

В отличие от расчета трения, где требуется суммирование по всем трубам, расчет гидростатического давления может быть выполнен одной сверткой, для которой нужно только сформировать единую функцию зенитного угла от объема $\alpha(v)$.

Для составной трубы можно определить функцию диаметра от глубины $d = d(l)$. Тогда объем части составной трубы v как функция координаты l будет выражаться интегралом $v(l) = \int_0^l \frac{\pi d(x)^2}{4} dx$, а это монотонно возрастающая функция. С помощью обратной к ней функции из исходной функции зенитного угла $\alpha(l)$ можно получить требуемую функцию $\alpha(v)$ от объема.

Важным вопросом является также потенциал распараллеливания предложенных алгоритмов. Как видно из предыдущего раздела, все шаги предложенных алгоритмов относятся к одному из следующих типов вычислений:

- 1) поэлементному применению операции к массиву или двум массивам одинаковой длины;
- 2) расчету суммы элементов массива или массива частичных накопленных сумм;
- 3) расчету дискретного БПФ.

Все эти операции могут быть очевидным образом распараллелены, включая расчет БПФ. Однако на практике необходимо в каждом конкретном случае для каждой операции и каждой целевой аппаратной архитектуры оценивать целесообразность такого распараллеливания. Например, для операции расчета суммы элементов массива узким местом может стать пропускная способность памяти, и в этом случае распараллеливание вычислений на несколько ядер не даст никакого прироста производительности.

Таким образом, приведенная вычислительная схема расчета изменяющихся во времени потерь давления на трение и гидростатического давления имеет линейную вычислительную сложность $O(N_t)$ для трения и линейно-логарифмическую вычислительную сложность $O(N_t \cdot \log N_t) + O(N_l \cdot \log N_l)$ для гидростатического давления. В следующем разделе приводится оценка фактического времени работы этих алгоритмов для типовых входных данных.

7. Апробация. Разработанные алгоритмы были использованы для решения различных инженерных обратных задач, связанных с подбором неизвестных параметров жидкостей для минимизации расчетных и измеренных потерь давления на трение, и на практике подтвердили свою эффективность для типовых размерностей исходных данных.

Например, для ГРП с массой пропанта 170 тонн и длительностью 120 мин в наклонно-направленной скважине запись фактических технологических данных содержит порядка 10000 точек. Автоматическое решение оптимизационной задачи подбора 10 неизвестных параметров карт трения для 5 разных идентифицированных в закачке жидкостей и 2 параметров для поправки на пропант (итого 12 параметров оптимизационной задачи) потребовало, с использованием предложенных эффективных алгоритмов и библиотеки для научных расчетов SciPy:

- в локальной постановке (для нахождения ближайшего локального оптимума) 3300 операций вычисления целевой функции невязки за 5 с;
- в глобальной постановке (для нахождения глобально лучшего решения) 184000 операций вычисления целевой функции за 316 с.

Для типовых размерностей использованных входных данных расчет одной целевой функции, включающий расчет гидростатического давления и гидравлических потерь давления на трение по предложенным алгоритмам, занимает примерно 0.001–0.002 с. При использовании обычного алгоритма сложностью $O(N_l \cdot N_t)$ один расчет в разных оптимизационных задачах требовал в 300–500 раз больше времени (что

примерно соответствует размерности N_l), а это не позволяет в разумные сроки решать обратные инженерные задачи.

8. Заключение. Описанный в данной статье выбор переменных позволяет реализовать эффективные алгоритмы расчета потерь давления на гидравлическое трение и гидростатического давления смеси для изменяющейся плотности закачиваемой жидкости. Показано, что расчет потерь давления на трение можно свести к алгоритму линейной сложности, а расчет гидростатического давления — к алгоритму линейно-логарифмической сложности. Применение разработанных алгоритмов позволяет эффективно решать обратные задачи, связанные с идентификацией неизвестных параметров физических процессов в стволе скважины, для типовых размерностей входных данных.

Предложенные в работе алгоритмы применяются для решения задач, связанных с моделированием различных технологических операций на скважинах, при разработке инженерного ПО: симулятор ГРП “РН-ГРИД” [21] и симулятор операций с ГНКТ “РН-ВЕКТОР” [2].

Список литературы

1. Ахтямов А.А., Макеев Г.А., Байдюков К.Н. и др. Корпоративный симулятор гидроразрыва пласта “РН-ГРИД”: от программной реализации к промышленному внедрению // Нефтяное хозяйство. 2018. № 5. 94–97. https://www.oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?ID=11354&art=231840. Cited June 10, 2024.
2. Желтова И.С., Филиппов А.А., Пестриков А.В. и др. Разработка симулятора для моделирования технологических операций с гибкими НКТ // Нефтяное хозяйство. 2020. № 7. 120–126. https://oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?ID=11934&art=235668. Cited June 10, 2024.
3. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir stimulation. Chichester: Wiley, 2000.
4. Деговцов А.В., Ивановский В.Н., Карелина С.А. и др. Техника и технология проведения операций на нефтяных и газовых скважинах с помощью колтюбинга. М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2020.
5. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. СПб.: Профессия, 2007.
6. Barbati A.C., Desroches J., Robisson A., McKinley G.H. Complex fluids and hydraulic fracturing // Annual Review of Chemical and Biomolecular Engineering. 2016. 7. 415–453. doi 10.1146/annurev-chembioeng-080615-033630.
7. Баттыршин Э.С., Шарипов Р.Р., Волков М.Г. и др. Особенности реологии шитых гуаровых гелей, применяемых для гидроразрыва пласта // Нефтяное хозяйство. 2022. № 11. 127–131. https://oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?art=237977. Cited June 10, 2024.
8. Yi Y., Lund B., Aas B., et al. An advanced coiled tubing simulator for calculations of mechanical and flow effects; model advancements, and full-scale verification experiments // Proc. SPE/ICoTA Coiled Tubing Conference and Exhibition, Houston, USA, March 2004. Paper Number SPE-89455-MS. doi 10.2118/89455-MS.
9. Reed T.D., Pilehvari A.A. A new model for laminar, transitional, and turbulent flow of drilling muds // Proc. SPE Production Operations Symposium, Oklahoma, USA, March 1993. Paper Number SPE-25456-MS. doi 10.2118/25456-MS.
10. Осипов П.Ф. Гидроаэромеханика бурения и крепления скважин. Ухта: Ухтинский гос. техн. универ., 2004.
11. Маковей Н. Гидравлика бурения. М.: Недра, 1986.
12. Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М. Основы теории течений бингамовских сред. М.: Физматлит, 2004.
13. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992.
14. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. Гидромеханика, перемешивание и теплообмен. М.: Мир, 1964.
15. Kandlikar S.G., Garimella S., Li D., et al. Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels. Amsterdam: Elsevier, 2014. doi 10.1016/B978-0-08-044527-4.X5000-2.
16. Климанов В.И., Байдюков К.Н. Построение карт трений жидкости ГРП по данным забойных манометров горизонтальной скважины сложной конструкции // Нефтяное хозяйство: материалы науч.-техн. конф.: электр. версия, 2020. http://new.oil-industry.ru/SD_Prezent/2020/10/01-32%20%D0%9A%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2.pdf. (Cited June 11, 2024).
17. Shah S., Zhou Y., Bailey M., Hernandez J. Correlations to predict frictional pressure loss of hydraulic-fracturing slurry in coiled tubing // SPE Prod. & Oper. 2009. 24, N 03. 381–395. doi 10.2118/104253-PA.
18. Keck R.G., Nehmer W.L., Strumolo G.S. A new method for predicting friction pressures and rheology of proppant-laden fracturing fluids // SPE Prod. Eng. 1992. 7, N 01. 21–28. doi 10.2118/19771-PA.
19. Nolte K.G. Fluid flow considerations in hydraulic fracturing // Proc. SPE Eastern Regional Meeting, Charleston, USA, November 1988. Paper Number SPE-18537-MS. doi 10.2118/18537-MS.



20. SciPy Library Technical Documentation. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.fftconvolve.html>. (Cited June 11, 2024).
21. Аксаков А.В., Борщук О.С., Желтова И.С. и др. Корпоративный симулятор гидроразрыва пласта: от математической модели к программной реализации // Нефтяное хозяйство. 2016. № 11. 35–40.

Поступила в редакцию
 13 марта 2024 г.

Принята к публикации
 7 июня 2024 г.

Информация об авторе

Григорий Анатольевич Макеев — к.т.н., зам. нач. управления разработки ПО для моделирования; ООО “РН–БашНИПИнефть”, ул. Ленина, д. 86/1, 450006, Уфа, Российская Федерация.

References

1. A. A. Akhtyamov, G. A. Makeev, K. N. Baydyukov, et al., “Corporate Fracturing Simulator RN-GRID: from Software Development to in-Field Implementation,” *Neftyanoye Khozyaistvo*, No. 5, 94–97 (2018). doi 10.24887/0028-2448-2018-5-94-97.
2. I. S. Zheltova, A. A. Filippov, A. V. Pestrikov, et al., “Coiled Tubing Simulation Software Development,” *Neftyanoye Khozyaistvo*, No. 7, 120–126 (2020). doi 10.24887/0028-2448-2020-7-120-126.
3. M. J. Economides and K. G. Nolte, *Reservoir Stimulation* (Wiley, Chichester, 2000).
4. A. V. Degovtsov, V. N. Ivanovskiy, S. A. Karelina, et al., *Equipment and Technologies of Operations on Oil and Gas Wells Using Coiled Tubing* (Gubkin Oil and Gas University, Moscow, 2020) [in Russian].
5. A. Ya. Malkin and A. I. Isaev, *Rheology: Concepts, Methods, Applications* (Professiya, St. Petersburg, 2007) [in Russian].
6. A. C. Barbati, J. Desroches, A. Robisson, and G. H. McKinley, “Complex Fluids and Hydraulic Fracturing,” *Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng.* **7**, 415–453 (2016). doi 10.1146/annurev-chembioeng-080615-033630.
7. E. S. Batyrshin, R. R. Sharipov, M. G. Volkov, et al., “Rheological Features of Guar Gum Based Cross-Linked Fracturing Gels,” *Neftyanoye Khozyaistvo*, №. 11, 127–131 (2022). doi 10.24887/0028-2448-2022-11-127-131.
8. Y. Yi, B. Lund, B. Aas, et al., “An Advanced Coiled Tubing Simulator for Calculations of Mechanical and Flow Effects; Model Advancements, and Full-Scale Verification Experiments,” in *SPE/ICoTA Coiled Tubing Conference and Exhibition, Houston, USA, March 2004*. Paper Number SPE-89455-MS. doi 10.2118/89455-MS.
9. T. D. Reed and A. A. Pilehvari, “A New Model for Laminar, Transitional, and Turbulent Flow of Drilling Muds,” in *SPE Production Operations Symposium, Oklahoma, USA, March 1993*. Paper Number SPE-25456-MS. doi 10.2118/25456-MS.
10. P. F. Osipov, *Hydroaeromechanics of Drilling and Fastening Wells* (Ukhta State Technical University, Ukhta, 2004) [in Russian].
11. N. Makovei, *Drilling Hydraulics* (Nedra, Moscow, 1986) [in Russian].
12. A. V. Gnoevoy, D. M. Klimov, and V. M. Chesnokov, *Fundamentals of the Theory of Flows of Bingham Media* (Fizmatlit, Moscow, 2004) [in Russian].
13. I. E. Idel’chik, *Handbook of Hydraulic Resistance* (Mashinostroenie, Moscow, 1992; Begell House, Danbury, 1996).
14. W. L. Wilkinson, *Non-Newtonian Liquids: Fluid Mechanics, Mixing and Heat Transfer* (Pergamon, London, 1960; Mir, Moscow, 1964).
15. S. G. Kandlikar, S. Garimella, D. Li, et al., *Heat Transfer and Fluid Flow in Minichannels and Microchannels* (Elsevier, Amsterdam, 2014). doi 10.1016/B978-0-08-044527-4.X5000-2.
16. V. I. Klimanov and K. N. Baidyukov, “Constructing Maps of Hydraulic Fracturing Fluid According to Downhole Pressure Gauges of a Horizontal Well of Complex Design,” *Neftyanoye Khozyaistvo: Scientific and Technical Materials Conference: Electronic Version* (2020). http://new.oil-industry.ru/SD_Prezent/2020/10/01-32%20%D0%9A%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2.pdf. (Cited June 11, 2024).
17. S. Shah, Y. Zhou, M. Bailey, and J. Hernandez, “Correlations to Predict Frictional Pressure Loss of Hydraulic Fracturing Slurry in Coiled Tubing,” *SPE Prod. & Oper.* **24** (03), 381–395 (2009). doi 10.2118/104253-PA.
18. R. G. Keck, W. L. Nehmer, and G. S. Strumolo, “A New Method for Predicting Friction Pressures and Rheology of Proppant-Laden Fracturing Fluids,” *SPE Prod. Eng.* **7** (01), 21–28 (1992). doi 10.2118/19771-PA.



19. K. G. Nolte, “Fluid Flow Considerations in Hydraulic Fracturing,” in *SPE Eastern Regional Meeting, Charleston, USA, November 1988*. Paper Number SPE-18537-MS. doi 10.2118/18537-MS.
20. SciPy Library Technical Documentation. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.fftconvolve.html>. (Cited June 11, 2024).
21. A. V. Aksakov, O. S. Borshchuk, I. S. Zheltova, et al., “Corporate Fracturing Simulator: from a Mathematical Model to the Software Development,” *Neftyanoye Khozyaistvo*, No. 11, 35–40 (2016).

Received
March 13, 2024

Accepted for publication
June 7, 2024

Information about the author

Grigory A. Makeev — Ph.D., Deputy head of Simulation software development department; RN–BashNIPIneft LLC, Lenina ulitsa, 86/1, 450006, Ufa, Russia.