

Численное моделирование трехмерных нестационарных задач радиационной магнитной гидродинамики

А. Ю. Круковский

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация

ORCID: 000-0003-4188-6904, e-mail: alexander-krukovskiy@yandex.ru

Ю. А. Повещенко

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация

ORCID: 000-0001-9211-9057, e-mail: hecon@mail.ru

В. О. Подрыга

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация

ORCID: 000-0001-7874-6978, e-mail: pvictoria@list.ru

П. И. Рагимли

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация

ORCID: 000-0002-9271-5956, e-mail: pervin@rehimli.info

Аннотация: В работе представлена математическая модель для решения трехмерных радиационных задач магнитной гидродинамики. Для численного решения системы дифференциальных уравнений применена неявная полностью консервативная разностная схема. Используются два метода решения системы разностных уравнений: метод раздельного и метод комбинированного решения уравнений, которые расщеплены по физическим процессам. Произведена программная реализация разработанных численных алгоритмов, выполнены расчеты, моделирующие сжатие плазмы магнитным полем. Изучалась динамика по времени параметров вещества и магнитного поля. В процессе расчета на его различных стадиях были задействованы оба используемых в программе численных метода. Полученные результаты соответствуют физике процесса.

Ключевые слова: математическое моделирование, неявная полностью консервативная разностная схема, численные алгоритмы, вычислительный эксперимент, радиационная магнитная гидродинамика, плазма.

Для цитирования: Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли П.И. Численное моделирование трехмерных нестационарных задач радиационной магнитной гидродинамики // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 4. 378–395. doi 10.26089/NumMet.v25r429.



Numerical modeling of three-dimensional non-stationary problems of radiation magnetohydrodynamics

Alexander Yu. Krukovskiy

Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Moscow, Russia
ORCID: 000-0003-4188-6904, e-mail: alexander-krukovskiy@yandex.ru

Yury A. Poveshchenko

Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Moscow, Russia
ORCID: 000-0001-9211-9057, e-mail: hecon@mail.ru

Viktoriia O. Podryga

Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Moscow, Russia
ORCID: 000-0001-7874-6978, e-mail: pvictoria@list.ru

Parvin I. Rahimly

Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Moscow, Russia
ORCID: 000-0002-9271-5956, e-mail: pervin@rehimli.info

Abstract: This work presents a mathematical model for solving three-dimensional radiation problems of magnetohydrodynamics. An implicit fully conservative difference scheme is used to solve the system of differential equations. Two methods are used to solve the system of difference equations: the method of separate and the method of combined solution of equations, which are split by physical processes. A software implementation of the developed numerical algorithms is carried out, and calculations are performed modeling the compression of plasma by a magnetic field. The time dynamics of the parameters of matter and the magnetic field are studied. During the calculation process, at its various stages, both numerical methods used in the program are involved. The results obtained correspond to the physics of the process.

Keywords: mathematical modeling, implicit fully conservative difference scheme, numerical algorithms, computational experiment, radiation magnetohydrodynamics, plasma.

For citation: A. Yu. Krukovskiy, Yu. A. Poveshchenko, V. O. Podryga, and P. I. Rahimly, “Numerical modeling of three-dimensional non-stationary problems of radiation magnetohydrodynamics,” *Numerical Methods and Programming*. 25 (4), 378–395 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r429.

1. Введение. Исследованию поведения плазмы в магнитном поле посвящено значительное количество работ. Отметим важные работы отечественной и зарубежной научных школ [1–38], которые мы расположили для удобства в хронологическом порядке. Среди них важное место занимают работы, развивающие численные методы расчета задач радиационной магнитной газовой динамики (РМГД). Обсудим некоторые из них, связанные с двумерным и трехмерным моделированием РМГД процессов в областях реальной геометрии.

В статье [20] разработаны и реализованы трехмерные численные методы для решения уравнений сжимаемой РМГД, описывающих процессы в атмосфере Солнца. Применены схемы конечных объемов, эффективные решатели задачи Римана, методы высокого порядка, локальная адаптация сетки и параллельные вычисления. Представлена также скалярная модельная задача с возможностью аналитического решения.

Численное моделирование осесимметричных течений плазмы в коаксиальном ускорителе с продольным магнитным полем, основанное на двумерной одножидкостной МГД модели, выполнено в [21]. Исследования выявили основные закономерности плазмодинамических процессов, включая возникновение токовых слоев в потоке плазмы при значительных величинах продольного поля.

В работе [22] предложена обобщенная схема Лакса–Фридрихса для решения уравнений идеальной магнитной гидродинамики на неструктурированных треугольных сетках. Построенные аппроксимации уравнений МГД являются консервативными и имеют второй порядок аппроксимации по пространству и времени.

В статье [23] исследовано двумерное численное МГД моделирование разлета плазмы во внешнем однородном магнитном поле после воздействия короткого лазерного импульса. МГД расчеты показали, что магнитное поле существенно влияет на структуру плазменного факела, заставляя вещество двигаться ближе к оси симметрии.

В [29] исследуются МГД характеристики плазменного потока, генерируемого компактной геометрией магнитоплазменного компрессора. Анализируются пространственные распределения электрического тока и электромагнитной силы в плазменном потоке, а также плотность и скорость плазмы в зоне сжатия.

В работе [34] проведено 3D МГД моделирование коллапса облачных ядер с эффектом Холла. Изучено его влияние на эволюцию углового момента при разных углах между магнитным полем и вектором углового момента. Выявлены механизмы формирования противовращающихся оболочек, связанные с наблюдаемыми размерами дисков молодых звездных объектов.

В работе [35] предложена комплексная РМГД модель солнечной вспышки, охватывающая процесс от появления до извержения. Модель успешно воспроизводит ключевые наблюдаемые характеристики вспышек в видимом, ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах, включая динамику плазмы и спектральные особенности.

В [37] создана асимптотически устойчивая схема для решения уравнений РМГД. Метод основан на декомпозиции интенсивности излучения и комбинировании явных и неявных дискретизаций. Схема эффективна для различных режимов оптической толщины и задач с радиационными ударными волнами.

В статье [38] выполнено численное моделирование МГД течения Уильямсона–Сакиадиса в пористой среде с учетом различных эффектов. Разработана математическая модель, уравнения решались с помощью функции BVPC пакета прикладных программ MATLAB. Проанализировано влияние параметров на характеристики потока. Результаты валидированы сравнением с опубликованными данными.

Обратимся теперь к сути предлагаемого нами исследования. При моделировании трехмерной задачи РМГД необходимо определить ее специфику и выбрать численный метод ее решения. Созданная на основе этого метода решения разностных уравнений программная реализация будет способна решать только сравнительно узкий класс задач. Другие же задачи будут решаться с помощью этой программы менее эффективно. Создание универсального метода для достаточно широкого класса задач обычно не приводит к положительным результатам из-за сложности программной реализации и огромного количества машинных ресурсов (машинной памяти, времени счета одного варианта и т.д.).

Полностью консервативные разностные схемы (ПКРС) позволяют существенно сократить время расчета каждого варианта задачи за счет выбора расчетных сеток со сравнительно небольшим числом расчетных ячеек и обеспечивают адекватность модели изучаемым физическим процессам [14], а неявность разностной схемы не требует существенных ограничений на временной шаг. В данной работе в качестве базовой рассматривается неявная ПКРС. Новизна представленной работы заключается в следующем. Предложенные алгоритмы решения системы разностных уравнений являются двухэтапными. На первом этапе решается система нелинейных уравнений в переменных Лагранжа. На втором этапе лагранжева сетка корректируется (там, где это необходимо). Затем выполняется перерасчет рассчитанных величин на новой разностной сетке.

В работе реализованы методы отдельного и комбинированного решения систем разностных уравнений. Эти уравнения разбиты на группы по физическим процессам [18, 36] (“динамическая группа”, “тепловая группа” и “электромагнитная группа”). Метод комбинированного решения заключается в том, что эти три группы объединяются следующим образом: в первую группу входят уравнения динамики и электромагнитного поля, во вторую группу — уравнения энергии. Метод отдельного решения заключается в том, что в первую группу входят уравнения динамики, во вторую группу — уравнения Максвелла и в третью группу — уравнения энергии. Уравнение состояния — уравнение-связка между этими двумя (тремя) группами. Уравнения обеих (трех) групп решаются методом Ньютона относительно основных переменных, а остальные переменные каждой группы считаются “замороженными”. Последовательное решение групп уравнений связывается внешним итерационным процессом. Сходимость процесса контролируется по точности выполнения баланса полной энергии и точности распределения этой энергии по ее отдельным видам.

На каждом временном шаге решаемой задачи программа анализирует физическую ситуацию на данный момент времени и, согласно [36], выбирает метод решения разностных уравнений, более оптимальный для данной физической ситуации. Эта процедура позволяет существенно ускорить расчет конкретной задачи.



При пересчете рассчитанных величин на новую расчетную сетку сохраняется полная консервативность, т.е. после любого сдвига расчетной сетки сохраняются масса, импульс, кинетическая, внутренняя, магнитная и полная энергии [32].

Для широкого класса задач (см., например, [10]) задействованы процессы сжатия плазмы магнитным полем. Для демонстрации возможностей программы был проведен численный расчет, моделирующий сжатие излучающей плазмы магнитным полем, заданным на границах расчетной области.

Учитывались двухтемпературность, реальные (табличные) уравнения состояния вещества, токи смещения, замагниченность коэффициентов тепло- и электропроводности. Динамика магнитных полей развивается при их вихревой диффузии.

2. Уравнения динамики. Состояния вещества и электромагнитного поля зависят от времени t и пространственных координат x, y, z . Вещество предполагается вязким.

Расчетная область $D \subset \mathbb{R}^3(x, y, z)$ представляет собой трехмерное пространство, ограниченное некой поверхностью.

Движение вещества описывается уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_y)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_z)}{\partial z}, \\ \rho \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(P + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_y)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y^2)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y B_z)}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_z)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y B_z)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_z^2)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность, P — давление, $\mathbf{U} = (u, w, v)$ — вектор скорости, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ — вектор магнитного поля.

Заметим, что наряду с записью уравнений в эйлеровых переменных нам для используемых в программе численных алгоритмов понадобится запись и в переменных Лагранжа.

Лагранжева форма записи динамических уравнений получается непосредственной заменой производных по пространству на производные в плоскости лагранжевых переменных $\mathbb{R}^3(\alpha, \beta, \gamma)$. Будем предполагать, что в любой момент времени определено отображение:

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta, \gamma), & y &= y(\alpha, \beta, \gamma), & z &= z(\alpha, \beta, \gamma), \\ & (\alpha, \beta, \gamma) \in G, & (x, y, z) &\in D, \end{aligned}$$

G — единичный куб, D — область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью (область, занятая веществом). Предположим также, что

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} > 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in G,$$

где $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}$ — якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым.

Изменения координат частицы определяются соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = w, \quad \frac{dz}{dt} = v. \quad (2)$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0. \quad (3)$$

Для решения динамических уравнений необходимо задать граничные и начальные условия.

На границе можно задать внешнее давление $P_{\text{гр}}(t)$ или распределение скоростей $\mathbf{U}_{\text{гр}}(t)$.

В начальный момент времени должны быть заданы начальные распределения плотности и скорости.

3. Уравнения энергии. Гидродинамическое давление, входящее в (1), равно сумме парциальных давлений:

$$P = P_e + P_i, \tag{4}$$

где P_e — давление электронов, P_i — давление ионов.

Распределение по пространству и изменение со временем температур электронов и ионов в области описываются уравнениями для внутренних энергий компонент:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon_e}{dt} &= -\rho P_e \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \frac{\partial(W_e)_x}{\partial x} - \frac{\partial(W_e)_y}{\partial y} - \frac{\partial(W_e)_z}{\partial z} + Q_{ei} + G_{дж} + \bar{G}_e, \\ \rho \frac{d\varepsilon_i}{dt} &= -\rho P_i \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \frac{\partial(W_i)_x}{\partial x} - \frac{\partial(W_i)_y}{\partial y} - \frac{\partial(W_i)_z}{\partial z} - Q_{ei} + G_i, \\ \bar{G}_e &= G_{\text{рад}} + G_e. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon_{e,i}$ — внутренние энергии электронной ε_e и ионной ε_i компонент, отнесенные к единице массы, $\mathbf{W}_{e,i} = ((W_{e,i})_x, (W_{e,i})_y, (W_{e,i})_z)$ — электронный и ионный потоки тепла через поперечное сечение области, Q_{ei} — объем энергии между электронами и ионами, $G_{e,i}$ — источники (стоки) электронной G_e и ионной G_i энергий, $G_{\text{рад}}$ — энергия излучения, $G_{дж}$ — массовая плотность энергии джоулева нагрева:

$$G_{дж} = \frac{1}{4\pi} (E_x \bar{J}_x + E_y \bar{J}_y + E_z \bar{J}_z), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_x + vB_y - wB_z), \\ \bar{J}_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_y - vB_x + uB_z), \\ \bar{J}_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_z - uB_y + wB_x), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ — вектор электрического поля, c — скорость света.

Потоки тепла связаны с градиентом температур соотношениями

$$\begin{aligned} (W_{e,i})_x &= -(\chi_{e,i})_{xx} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial x} - (\chi_{e,i})_{xy} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial y} - (\chi_{e,i})_{xz} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial z}, \\ (W_{e,i})_y &= -(\chi_{e,i})_{yx} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial x} - (\chi_{e,i})_{yy} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial y} - (\chi_{e,i})_{yz} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial z}, \\ (W_{e,i})_z &= -(\chi_{e,i})_{zx} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial x} - (\chi_{e,i})_{zy} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial y} - (\chi_{e,i})_{zz} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial z}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$(\chi_{e,i})_{\alpha\alpha} = (\chi_{e,i})_{\parallel} \left(\frac{B_\alpha}{|\mathbf{B}|} \right)^2 + (\chi_{e,i})_{\perp} \left(1 - \left(\frac{B_\alpha}{|\mathbf{B}|} \right)^2 \right), \quad \alpha = x, y, z,$$

$$(\chi_{e,i})_{\alpha\beta} = (\chi_{e,i})_{\beta\alpha} = [(\chi_{e,i})_{\parallel} - (\chi_{e,i})_{\perp}] \frac{B_\alpha B_\beta}{B^2}, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad \alpha \neq \beta.$$

Здесь $\chi_{e,i}$ — тензоры электронной χ_e и ионной χ_i теплопроводности, $T_{e,i}$ — температуры электронов T_e и ионов T_i , $()_{\parallel}$ и $()_{\perp}$ обозначают компоненты, параллельную и перпендикулярную магнитному полю соответственно.

Для уравнений энергии рассматриваются следующие граничные условия: на границе могут задаваться потоки тепла или распределения температур.

В начальный момент в области должно быть задано распределение температур T_e и T_i .



4. Уравнения электромагнитного поля. Уравнения электромагнитного поля с учетом тока смещения имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_x}{\rho} \right) &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \left(B_x \frac{\partial u}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_y}{\rho} \right) &= \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \left(B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_y \frac{\partial w}{\partial y} + B_z \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_z}{\rho} \right) &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \left(B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial v}{\partial y} + B_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{1}{4\pi\sigma_\perp} \bar{J}_\alpha + \frac{\sigma_\perp - \sigma_\parallel}{4\pi\sigma_\perp\sigma_\parallel} \frac{B_\alpha}{\mathbf{B}^2} (\mathbf{j}, \mathbf{B}), \quad \alpha = x, y, z, \\ (\mathbf{j}, \mathbf{B}) &= \bar{J}_x B_x + \bar{J}_y B_y + \bar{J}_z B_z. \end{aligned}$$

Здесь σ — тензор электропроводности, $\mathbf{j} = (\bar{J}_x, \bar{J}_y, \bar{J}_z)$ — плотность тока.

Граничные условия для уравнений поля формируются следующим образом: на границе задается распределение либо магнитного, либо электрического поля.

Для решения уравнений Максвелла в начальный момент времени t_0 необходимо знать начальное распределение магнитного поля. Уравнения МГД (1)–(9) аппроксимированы на лагранжевой разностной сетке полностью консервативной разностной схемой.

5. Система разностных уравнений. Произведем дискретизацию переменных следующим образом. В кубе $G(\alpha, \beta, \gamma)$ вводится равномерная кубическая сетка:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h : \alpha_i &= ih_\alpha, \quad i = \overline{1, NM}, \quad h_\alpha = 1/(NM - 1), \\ \beta_j &= jh_\beta, \quad j = \overline{1, NL}, \quad h_\beta = 1/(NL - 1), \\ \gamma_k &= kh_\gamma, \quad k = \overline{1, NN}, \quad h_\gamma = 1/(NN - 1), \end{aligned}$$

где NM, NL, NN — количества ячеек по x, y, z соответственно, $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ — шаги сетки по пространству по x, y, z соответственно.

Обозначим через ω множество ячеек сетки, Ω — множество узлов, θ — множество граней. Соответственно введем пространства сеточных функций, определенных в ячейках, в узлах и на гранях, обозначив их H_ω, H_Ω и H_θ . Для записи сеточных функций $f \in H_\Omega$ используем индексы $(i, j, k) : f_{i,j,k} = f \in H_\Omega$.

Функции $\varphi \in H_\omega$ будем отмечать индексами $(m, l, n) : \varphi \in H_\omega$, а функции $\psi \in H_\theta$ будем отмечать индексами $(i, l, n), (m, j, n)$ и $(m, l, k) : \psi \in H_\theta$. Сетка в области H_Ω получается отображением

$$x_{ijk} = x(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}), \quad y_{ijk} = y(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}), \quad z_{ijk} = z(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk})$$

и состоит из шестигранников. Ячейка ω_{mln} своими вершинами имеет

$$\begin{aligned} (x, y, z)_{ijk}, (x, y, z)_{i+1jk}, (x, y, z)_{ij+1k}, (x, y, z)_{ijk+1}, (x, y, z)_{i+1j+1k}, (x, y, z)_{ij+1k+1}, \\ (x, y, z)_{i+1jk+1}, (x, y, z)_{i+1j+1k+1}. \end{aligned}$$

Уравнения (1)–(9) аппроксимируются на пространстве сеточных функций H_ω полностью консервативной неявной разностной схемой [39]:

$$x_t = u^{(0.5)}, \quad y_t = w^{(0.5)}, \quad z_t = v^{(0.5)}, \quad (10)$$

$$\Delta m = \rho V = \hat{\rho} \hat{V}, \quad (11)$$

$$P = (P_e) + (P_i) + q; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M_* u_t &= \sum_{p \in \text{III}_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{B_p \hat{B}_p}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \sum_{p \in \text{III}_2} \left(B_{x_p}^{(0.5)} \hat{B}_{xyz} \right), \\ M_* w_t &= \sum_{p \in \text{III}_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{B_p \hat{B}_p}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \sum_{p \in \text{III}_2} \left(B_{y_p}^{(0.5)} \hat{B}_{xyz} \right), \\ M_* v_t &= \sum_{p \in \text{III}_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{B_p \hat{B}_p}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \sum_{p \in \text{III}_2} \left(B_{z_p}^{(0.5)} \hat{B}_{xyz} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{B}_{xyz} = \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial \alpha} \hat{B}_{\alpha p}, \quad M_* = \frac{1}{8} \sum_{p \in \text{III}_2} \Delta m_p,$$

$$(\varepsilon_e)_t = -\hat{P}_e \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + \hat{Q}_{ei} + \hat{G}_e + \frac{1}{\Delta m} \sum_{g \in \text{III}_3} \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{W}_{e,\alpha g} \hat{S}_{\alpha g} + \hat{G}_{\text{дж}} + \hat{G}_{\text{рад}},$$

$$(\varepsilon_i)_t = -(\hat{P}_i + \hat{q}) \left(\frac{1}{\rho} \right)_t - \hat{Q}_{ei} + \frac{1}{\Delta m} \sum_{g \in \text{III}_3} \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{W}_{i,\alpha g} \hat{S}_{\alpha g} + \hat{G}_i,$$
(14)

$S_g = (S_{xg}, S_{yg}, S_{zg})$ — площади граней, прилегающих к ячейке (m, l, n) , $g = \overline{1, 6}$;

$$(VB_x)_t = \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{B}_\alpha \sum_{r \in \text{III}_1} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \alpha_r} u_r^{(0.5)} + \sum_{r \in \text{III}_1} \left[\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial z_r} \right) \hat{E}_{y_r} - \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial y_r} \right) \hat{E}_{z_r} \right],$$

$$(VB_y)_t = \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{B}_\alpha \sum_{r \in \text{III}_1} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \alpha_r} w_r^{(0.5)} + \sum_{r \in \text{III}_1} \left[\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_r} \right) \hat{E}_{z_r} - \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial z_r} \right) \hat{E}_{x_r} \right],$$

$$(VB_z)_t = \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{B}_\alpha \sum_{r \in \text{III}_1} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \alpha_r} v_r^{(0.5)} + \sum_{r \in \text{III}_1} \left[\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial y_r} \right) \hat{E}_{x_r} - \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_r} \right) \hat{E}_{y_r} \right],$$
(15)

$$\hat{E}_\alpha = \frac{1}{4\pi \hat{\sigma}_\perp} \tilde{J}_\alpha + \frac{(\hat{\sigma}_\perp - \hat{\sigma}_\parallel) \hat{B}_\alpha}{4\pi \hat{\sigma}_\perp \hat{\sigma}_\parallel \hat{B}^2} B^{***}, \quad \alpha = x, y, z,$$

$$B^{***} = \hat{B}_x \tilde{J}_x + \hat{B}_y \tilde{J}_y + \hat{B}_z \tilde{J}_z,$$

$$\tilde{J}_x = -\frac{1}{\hat{V}} \sum_{P \in \text{III}_2} \left[\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y} \hat{B}_{z_p} - \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z} \hat{B}_{y_p} \right] - \frac{1}{c^2} (\hat{E}_x + \hat{v} \hat{B}_y - \hat{w} \hat{B}_z)_t,$$

$$\tilde{J}_y = -\frac{1}{\hat{V}} \sum_{P \in \text{III}_2} \left[\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z} \hat{B}_{x_p} - \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x} \hat{B}_{z_p} \right] - \frac{1}{c^2} (\hat{E}_y - \hat{v} \hat{B}_x + \hat{u} \hat{B}_z)_t,$$
(16)

$$\tilde{J}_z = -\frac{1}{\hat{V}} \sum_{P \in \text{III}_2} \left[\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x} \hat{B}_{y_p} - \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y} \hat{B}_{x_p} \right] - \frac{1}{c^2} (\hat{E}_z - \hat{u} \hat{B}_y + \hat{w} \hat{B}_x)_t;$$

$$\hat{G}_{\text{дж}} = \frac{1}{128\pi^2} \left[\frac{1}{\sigma_\perp} \sum_{r \in \text{III}_1} (\tilde{J}_{x_r}^2 + \tilde{J}_{y_r}^2 + \tilde{J}_{z_r}^2) + \left(\frac{\hat{\sigma}_\perp - \hat{\sigma}_\parallel}{\hat{\sigma}_\perp \hat{\sigma}_\parallel} \right) \sum_{r \in \text{III}_1} \left(\frac{\hat{B}_{x_r} \tilde{J}_{x_r} + \hat{B}_{y_r} \tilde{J}_{y_r} + \hat{B}_{z_r} \tilde{J}_{z_r}}{\hat{B}_r^2} \right) \right].$$
(17)

Уравнения системы записаны на разностных шаблонах III_1 , III_2 и III_3 : III_1 — шаблон ячейки (рис. 1), III_2 — шаблон узла (рис. 2), III_3 — шаблон граней, прилегающих к ячейке (m, l, n) .

При записи системы уравнений (10)–(17) использованы безындексные представления сеточных функций [14]. В частности, $\hat{f} = f^{N+1}$, $f^{(0.5)} = 0.5(f + \hat{f})$.

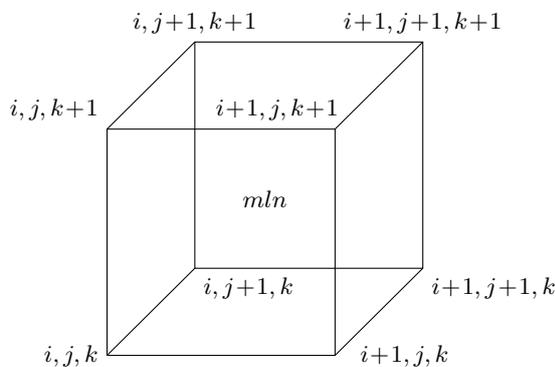


Рис. 1. III_1 — шаблон ячейки
 Fig. 1. III_1 — cell template

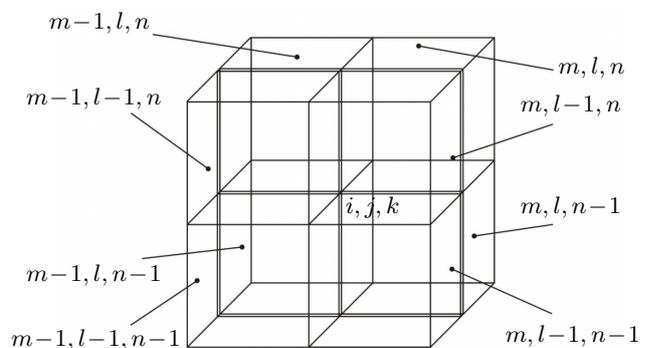


Рис. 2. III_2 — шаблон узла
 Fig. 2. III_2 — node template



Сеточные функции $x, y, z, u, w, v, \mathbf{E}$ определены в узлах разностной сетки, сеточные функции $\rho, P_e, P_i, q, V, T_e, T_i, \mathbf{B}, G_e, G_i, Q_{ei}, \chi_e, \chi_i, \sigma$ — в ячейках (q — давление искусственной вязкости, V — объем ячейки), а сеточные функции $\mathbf{W}_e, \mathbf{W}_i, S$ — на гранях ячеек.

Граничные значения давления, температур и магнитного поля будем считать отнесенными к граням граничных ячеек.

Давление искусственной вязкости q вводится в разностную схему для обеспечения сквозного счета течений с возможными разрывами. Оно берется в виде комбинации линейной и квадратичной вязкостей и отлично от нуля только в области волн сжатия.

Под f_* понимается значение (проекция) сеточной функции: $f_* \in H_\omega$, если $f \in H_\Omega$, и $f_* \in H_\Omega$, если $f \in H_\omega$.

На границах могут быть заданы следующие условия: для уравнений движения задается давление или условие непротекания (“жесткая стенка”) или распределение скорости, для уравнений Максвелла задается магнитная индукция или распределение электрического поля.

Для уравнений энергии на границах задается распределение температуры или потоков тепла.

6. Сохранение полной энергии. Разностная схема (10)–(17) полностью консервативна, т.е. из разностных уравнений движения, энергии и поля вытекает закон сохранения полной энергии системы. Введем следующие сеточные функционалы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{NM-1} \sum_{l=1}^{NL-1} \sum_{n=1}^{NN-1} \Delta m_{mln} (u_{mln}^2 + w_{mln}^2 + v_{mln}^2), \\ u_{mln} &= \frac{1}{8} \sum_{r \in \text{Ш}_1} u_r, \quad w_{mln} = \frac{1}{8} \sum_{r \in \text{Ш}_1} w_r, \quad v_{mln} = \frac{1}{8} \sum_{r \in \text{Ш}_1} v_r, \\ E_{\text{tot}} &= \sum_{mln} \Delta m_{mln} \left(\varepsilon_{e_{mln}} + \varepsilon_{i_{mln}} + \frac{u_{mln}^2 + w_{mln}^2 + v_{mln}^2}{2} + \frac{B_{x_{mln}}^2 + B_{y_{mln}}^2 + B_{z_{mln}}^2}{8\pi\rho_{mln}} \right), \\ u_{mln}^2 &= \frac{1}{8} \sum_{r \in \text{Ш}_1} u_r^2, \quad \text{аналогично для } w, v. \end{aligned}$$

Здесь ε_{kin} и E_{tot} — кинетическая и полная энергии системы.

Обозначим: $i, j, k \in G$ — граничные узлы, p' — приграничные, p'' — фиктивные ячейки расчетной области. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \text{Ш}_2} &= \sum_{p' \in \text{Ш}_2} + \sum_{p'' \in \text{Ш}_2}, \\ \mu'_{ijk} &= \frac{1}{8M_{ijk}} \sum_{p' \in \text{Ш}_2} \Delta m_{p'}, \quad \mu''_{ijk} = \frac{1}{8M_{ijk}} \sum_{p'' \in \text{Ш}_2} \Delta m_{p''} = 1 - \mu'_{ijk}, \\ \eta'_{ijk} &= \frac{1}{8\hat{V}_{ijk}} \sum_{p' \in \text{Ш}_2} \hat{V}_{p'}, \quad \eta''_{ijk} = 1 - \eta'_{ijk}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\text{tot}} - E_{\text{tot}} &= -\Delta t \sum_{mln} \left(\hat{G}_{e_{mln}} + \hat{G}_{i_{mln}} \right) \hat{V}_{mln} + \\ &+ \Delta t \sum_{ijk \in G} \left[-u_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{p' \in \text{Ш}_2} \mu''_{ijk} - \sum_{p'' \in \text{Ш}_2} \mu'_{ijk} \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{\hat{B}_p B_p}{8\pi} \right) - \right. \\ &\quad - w_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{p' \in \text{Ш}_2} \mu''_{ijk} - \sum_{p'' \in \text{Ш}_2} \mu'_{ijk} \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{\hat{B}_p B_p}{8\pi} \right) - \\ &\quad \left. - v_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{p' \in \text{Ш}_2} \mu''_{ijk} - \sum_{p'' \in \text{Ш}_2} \mu'_{ijk} \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{\hat{B}_p B_p}{8\pi} \right) + \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u_{ijk}^{(0.5)}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in \Pi_2} \mu''_{ijk} - \sum_{p'' \in \Pi_2} \mu'_{ijk} \right) B_{x_p}^{(0.5)} \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \hat{B}_{x_p} + \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \hat{B}_{y_p} + \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \hat{B}_{z_p} \right) + \\
& + \frac{w_{ijk}^{(0.5)}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in \Pi_2} \mu''_{ijk} - \sum_{p'' \in \Pi_2} \mu'_{ijk} \right) B_{y_p}^{(0.5)} \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \hat{B}_{x_p} + \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \hat{B}_{y_p} + \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \hat{B}_{z_p} \right) + \\
& + \frac{v_{ijk}^{(0.5)}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in \Pi_2} \mu''_{ijk} - \sum_{p'' \in \Pi_2} \mu'_{ijk} \right) B_{z_p}^{(0.5)} \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \hat{B}_{x_p} + \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \hat{B}_{y_p} + \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \hat{B}_{z_p} \right) + \\
& + \frac{\hat{E}_{x_{ijk}}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in \Pi_2} \eta''_{ijk} - \sum_{p'' \in \Pi_2} \eta'_{ijk} \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \hat{B}_{z_p}^{(0.5)} - \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \hat{B}_{y_p}^{(0.5)} \right) + \\
& + \frac{\hat{E}_{y_{ijk}}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in \Pi_2} \eta''_{ijk} - \sum_{p'' \in \Pi_2} \eta'_{ijk} \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \hat{B}_{x_p}^{(0.5)} - \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \hat{B}_{z_p}^{(0.5)} \right) + \\
& + \frac{\hat{E}_{z_{ijk}}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in \Pi_2} \eta''_{ijk} - \sum_{p'' \in \Pi_2} \eta'_{ijk} \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \hat{B}_{y_p}^{(0.5)} - \frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \hat{B}_{x_p}^{(0.5)} \right) \Big].
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, в результате тождественных преобразований из системы разностных уравнений (10)–(17) следует, что изменение полной энергии определяется:

- работой внешних сил давления и магнитного поля;
- притоком (оттоком) тепла через границу области;
- притоком магнитной энергии через внешнюю границу;
- вносом (выносом) энергии источниками (стоками).

7. Алгоритм решения системы разностных уравнений методом комбинированного решения. Пусть значения разностных функций заданы на N -м временном слое. Тогда, чтобы определить значения этих функций на $(N + 1)$ -м временном слое, необходимо решить систему разностных уравнений (10)–(17). Разностные уравнения представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, для решения которых используется итерационный метод с отдельным расчетом групп уравнений, выделяемых по характеру физических процессов.

Структура алгоритма состоит в следующем.

1. Задаются приближенные значения скорости, плотности, температуры и магнитного поля на $(N + 1)$ -м временном слое.
2. При фиксированном значении температуры решаются уравнения движения (10), (11), (13) и Максвелла (15), (16) и находятся приближенные значения скорости, плотности и параметры электромагнитного поля.
3. При фиксированных значениях скорости, плотности и компонент электрического поля решаются уравнения энергии (14), (17) и находятся приближенные значения электронной и ионной температур на $(N + 1)$ -м слое.
4. Проверяется выполнение условия закона сохранения энергии (18). Если он выполнен с требуемой точностью, то значения функций на момент времени t^{N+1} считаются найденными. В противном случае необходимо вернуться к выполнению пункта 2 и снова повторить описанный выше процесс.
5. Проводится (если нужно) коррекция лагранжевой сетки и выполняется пересчет всех величин на новую разностную сетку. Алгоритм пересчета подробно описан в [32].

Уравнение состояния является уравнением-связкой между уравнениями “первой группы” (уравнения динамики и электромагнитного поля) и “второй группы” (уравнения энергии).

8. Решения уравнений динамики и Максвелла. Разностные уравнения движения и электромагнитного поля решаются с разделением по физическим процессам: сначала рассчитывается движение вещества в предположении вмерзности магнитного поля (бездиссипативные процессы); затем учиты-



ваются конечная проводимость — диффузия магнитного поля. Уравнения решаются методом Ньютона с редукцией неизвестных величин [40, 41]. Вначале, при переходе от итерации s к итерации $s + 1$, мы оставляем только те переменные, входящие в уравнения движения (10), (11), (13) (в том числе и \mathbf{B}), которые зависят только от компонент скорости $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}$ (“основных” переменных в уравнениях первой группы). Предполагается также, что давление вещества в ячейках изменяется локально-баротропно, т.е. температура фиксирована. Таким образом, уравнения динамики решаются относительно u, w, v . Отмечая верхним индексом номер итерации, запишем для каждой функции в уравнениях движения формулу перехода от s -й итерации к $(s + 1)$ -й:

$$\begin{aligned} u_{ijk}^{s+1} &= u_{ijk}^s + \delta u_{ijk}, \\ w_{ijk}^{s+1} &= w_{ijk}^s + \delta w_{ijk}, \\ v_{ijk}^{s+1} &= v_{ijk}^s + \delta v_{ijk}, \\ x_{ijk}^{s+1} &= x_{ijk}^s + \delta x_{ijk} = x_{ijk}^s + \frac{\partial x_{ijk}}{\partial u_{ijk}} \delta u_{ijk} = x_{ijk}^s + \frac{\Delta t}{2} \delta u_{ijk}, \\ y_{ijk}^{s+1} &= y_{ijk}^s + \delta y_{ijk} = y_{ijk}^s + \frac{\partial y_{ijk}}{\partial w_{ijk}} \delta w_{ijk} = y_{ijk}^s + \frac{\Delta t}{2} \delta w_{ijk}, \\ z_{ijk}^{s+1} &= z_{ijk}^s + \delta z_{ijk} = z_{ijk}^s + \frac{\partial z_{ijk}}{\partial v_{ijk}} \delta v_{ijk} = z_{ijk}^s + \frac{\Delta t}{2} \delta v_{ijk}, \\ \Phi_{mln}^{s+1} &= \Phi_{mln}^s + \delta \Phi_{mln} = \Phi_{mln}^s + \sum_{r \in \text{III}_1} \left(\frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial u_r} \delta u_r + \frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial w_r} \delta w_r + \frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial v_r} \delta v_r \right), \end{aligned}$$

где Φ_{mln} — функция в ячейке, пробегающая значения $P_{mln}, q_{mln}, \mathbf{B}_{mln}$; δf — соответствующие приращения f , Δt — временной шаг.

Подставляя значения функций на $(s + 1)$ -й итерации в уравнения движения системы (10)–(17) и пренебрегая квадратами приращений функций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений компонент скорости $\delta u_{ijk}, \delta w_{ijk}, \delta v_{ijk}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(a_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + b_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + c_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(1)}, \\ \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(a_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + b_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + c_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(2)}, \quad (19) \\ \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(a_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + b_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + c_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(3)}, \end{aligned}$$

$$i = \overline{1, NM}, \quad j = \overline{1, NL}, \quad k = \overline{1, NN}.$$

Здесь $a_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, b_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, c_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, F_{ijk}^{(1,2,3)}$ — числовые множители. Система уравнений (19) имеет матрицу блочной структуры.

Для решения уравнений (19) можно использовать эффективные итерационные методы [40, 41].

После нахождения приращения скорости на $(s+1)$ -й итерации определяются величины $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}, V_{mln}, \rho_{mln}, P_{mln}, q_{mln}$, а также промежуточное значение \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_{mln} = \mathbf{B}(\rho_{mln}^{s+1}, \mathbf{E}^s).$$

Следующим шагом является решение системы уравнений (15), (16), описывающих электрические и магнитные поля. Здесь учитывается конечная проводимость среды. При вычислении коэффициента электропроводности берется промежуточное значение индукции магнитного поля:

$$\delta_{ijk}^{s+1} = \delta_h(\rho_{mln}^{s+1}, \mathbf{B}_{mln}, T_{mln}^{s=0}),$$

тогда система разностных уравнений относительно $\mathbf{B}_{mln}^{s+1}, \mathbf{E}_{mln}^{s+1}$ будет линейной. Учитывая, что в некоторых подобластях течения плазмы ее проводимость может оказаться близкой к нулю (например, вакуумная

область), целесообразно решать систему уравнений поля, исключив из нее магнитную индукцию, в результате чего получается система линейных уравнений относительно E_x, E_y, E_z :

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(\bar{a}_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_x)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + \bar{b}_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_y)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + \bar{c}_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_z)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} \right) &= \bar{F}_{ijk}^{(1)}, \\ \sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(\bar{a}_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_x)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + \bar{b}_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_y)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + \bar{c}_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_z)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} \right) &= \bar{F}_{ijk}^{(2)}, \\ \sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(\bar{a}_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_x)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + \bar{b}_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_y)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} + \bar{c}_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_z)_{i+k_1 j+k_2 k+k_3} \right) &= \bar{F}_{ijk}^{(3)}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$i = \overline{1, NM}, \quad j = \overline{1, NL}, \quad k = \overline{1, NN}.$$

Здесь $\bar{a}_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{b}_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{c}_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{F}_{ijk}^{(1,2,3)}$ — числовые множители.

Система линейных уравнений (20) имеет блочную структуру. После нахождения электрических полей имеем:

$$\mathbf{B}_{mln}^{s+1} = \mathbf{B}(\rho_{mln}^{s+1}, \mathbf{E}^{s+1}).$$

Система уравнений движения и поля считается решенной, если приращения скоростей на итерациях удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} |\delta u_{ijk}| &\leq \varepsilon_\mu |u_{ijk}| + u_{\min}, \\ |\delta w_{ijk}| &\leq \varepsilon_\mu |w_{ijk}| + w_{\min}, \\ |\delta v_{ijk}| &\leq \varepsilon_\mu |v_{ijk}| + v_{\min}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь ε_μ — относительная, а u_{\min} , w_{\min} , v_{\min} — абсолютные погрешности компонент скорости.

9. Решение уравнений энергии. При решении уравнений энергии полагаем, что все функции, входящие в эти уравнения, зависят только от температуры электронной и ионной компонент плазмы. Уравнения энергии решаются методом Ньютона. Запишем для функций в уравнениях энергии формулу перехода от s -й итерации к $(s+1)$ -й итерации:

$$\begin{aligned} (T_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (T_{e,i})_{mln}^s + \delta(T_{e,i})_{mln}, \\ (P_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (P_{e,i})_{mln}^s + \delta(P_{e,i})_{mln} = (P_{e,i})_{mln}^s + \left(\frac{\partial P_{e,i}}{\partial T_{e,i}} \right)_{mln} \delta(T_{e,i})_{mln}, \\ (Q_{ei})_{mln}^{s+1} &= (Q_{ei})_{mln}^s + \left(\frac{\partial Q_{ei}}{\partial T_e} \right)_{mln} \delta(T_e)_{mln} + \left(\frac{\partial Q_{ei}}{\partial T_i} \right)_{mln} \delta(T_i)_{mln}, \\ (\chi_{e,i})_g^{s+1} &= (\chi_{e,i})_g^s + \sum_{q \in \text{Ш}_4} \left(\frac{\partial \chi_{e,i}}{\partial T_{e,i}} \right)_q \delta(T_{e,i})_q, \end{aligned}$$

где Ш_4 — шаблон, состоящий из прилегающих к грани g ячеек.

Подставляя значения функций на $(s+1)$ -й итерации в уравнения энергии и пренебрегая квадратами приращений функций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений температур $\delta(T_{e,i})_{mln}$, $\delta(T_i)_{mln}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(\bar{a}_{(mln)}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta(T_e)_{m+k_1 l+k_2 n+k_3} \right) + \bar{b}_{mln}^{(0,0,0)} \delta(T_i)_{mln} &= \bar{F}_{mln}^{(1)}, \\ \bar{c}_{(mln)}^{(0,0,0)} \delta(T_e)_{mln} + \sum_{k=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(\bar{d}_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta(T_i)_{m+k_1 l+k_2 n+k_3} \right) &= \bar{F}_{mln}^{(2)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\bar{a}_{(mln)}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{b}_{mln}^{(0,0,0)}$, $\bar{c}_{(mln)}^{(0,0,0)}$, $\bar{d}_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{F}_{mln}^{(1,2)}$ — числовые множители.

Аналогичные уравнения на границе получаются в соответствии с типом граничных условий. Например, при заданной температуре все приращения температур на границе тождественно равны 0.



Система разностных уравнений (22) решается аналогично системам (19) и (20).

Уравнения энергии считаются решенными, если приращения температур на итерации удовлетворяют условиям

$$|\delta(T_{e,i})_{mln}| \leq \varepsilon_r(T_{e,i})_{mln} + T_{\min}, \quad m = \overline{1, NM - 1}, \quad l = \overline{1, NL - 1}, \quad n = \overline{1, NN - 1}.$$

Здесь ε_r — относительная, а T_{\min} — абсолютная погрешности температуры.

Уравнение переноса решается согласно [2].

10. Алгоритм решения системы разностных уравнений методом раздельного решения.

Решаем систему уравнений (10)–(17). Структура данного алгоритма состоит в следующем.

1. Задаются приближенные значения скорости, плотности, температуры и магнитного поля на $(N + 1)$ -ом временном слое.
2. При фиксированных значениях температуры и электромагнитного поля решаются уравнения движения (10), (11), (13) и находятся приближенные значения скорости и плотности.
3. При фиксированных значениях скорости, плотности и температуры решаются уравнения Максвелла (15), (16) и находятся приближенные значения параметров электромагнитного поля.
4. При фиксированных значениях скорости, плотности и компонент электромагнитного поля решается система уравнений энергии (14), (17) и находятся приближенные значения электронной и ионной температур на $(N + 1)$ -ом слое.
5. Проверяется выполнение закона сохранения энергии (18). Если он выполнен с требуемой точностью, то значения функций на момент времени t^{N+1} считаются найденными. В противном случае необходимо вернуться к выполнению пункта 2 и снова повторить описанный выше процесс.
6. Проводится (если нужно) коррекция лагранжевой сетки, и выполняется пересчет всех величин на новую разностную сетку.

Отличие реализации метода раздельного решения от комбинированного состоит в следующем.

1. При решении уравнений движения в систему уравнений (10)–(17) подставляются функции $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}, x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}, P_{mln}, q_{mln}$ с $(s+1)$ -й итерации, а функции $B_{mln}, x_{mln}, y_{mln}, z_{mln}$ — с s -й итерации.
2. Полученная в результате этого система уравнений (19) решается до выполнения условия (21). После каждой итерации по движению не решаются уравнения Максвелла.
3. После решения системы уравнений (19) решается линейная система уравнений Максвелла (20).

11. Вычислительный эксперимент.

Рассмотрим динамику магнитных полей, которая развивается на фоне вихревой диффузии вектора магнитного поля.

Исследуем сжатие сильно излучаемой вольфрамовой плазмы магнитными полями. В начальный момент времени неподвижная плазма с плотностью $\rho = \rho_0$ занимает цилиндр $\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} \leq 0.36$ см с осью $0 \leq z \leq 0.5$ см. Данный цилиндр вписан в параллелепипед с размерами $0 \leq x \leq 1$ см, $0 \leq y \leq 1$ см, $0 \leq z \leq 0.5$ см, внутри которого находится плазма с плотностью вне цилиндра $\rho = 0.35\rho_0$, где $\rho_0 = (3 \cdot 10^{-2})/\pi$ г/см³. Во всей расчетной области начальная температура $T_e = T_i = 0.7$ эВ.

Профиль начальной плотности ($t = 0$) при $z = 0.25$ см изображен на рис. 3 а.

В работе исследуются компоненты вектора магнитного поля B_x, B_y, B_z . В начальный момент времени

$$B_x = B_y = B_z = 0.$$

На внешней границе определены значения компонент вектора магнитного поля:

$$B_{x\text{гр}} = B_{x0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.2}\right), \quad B_{y\text{гр}} = B_{y0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.2}\right), \quad B_{z\text{гр}} = B_{z0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.2}\right),$$

где $B_{x0} = 2.2$ МГс, $B_{y0} = 1.6$ МГс, $B_{z0} = 2.5$ МГс. При $t > 0.2$ мкс все граничные поля равны нулю.

Уравнения состояния электронного и ионного газов, коэффициенты электронной и ионной теплопроводностей, электропроводности и другие необходимые коэффициенты приводятся в [1, 42]. Производился учет излучения в электронной плазме. Учитывались также токи смещения и замагниченность коэффициентов тепло- и электропроводности.

Заметим, что при численном решении данной задачи использовались оба реализованных в программе численных метода. В начале расчета, когда в каждой расчетной ячейке гидродинамическое давление

меньше магнитного [36], использовался более простой метод раздельного решения разностных уравнений. Поскольку со временем магнитные поля растут, то физическая ситуация меняется. Когда хотя бы в одной расчетной ячейке магнитное давление больше гидродинамического, в программе происходит автоматический переход к решению разностных уравнений более универсальным комбинированным методом [36]. Данная процедура позволяет ускорить расчет на 20% по сравнению с проведением всего расчета методом комбинированного решения. Провести весь расчет методом раздельного решения невозможно, поскольку если магнитное давление много больше гидродинамического, временной шаг при раздельном решении будет стремиться к нулю [36].

На рис. 3–5 представлены результаты расчетов плотности и компонент магнитных полей в момент времени 0.051 мкс. На рис. 3 б изображено распределение плотности. Под воздействием магнитных полей происходит сжатие вещества к центру расчетной области.

На рис. 4, 5 представлены компоненты магнитной индукции. Как следует из уравнений Максвелла, на рис. 4 а распределение компоненты магнитной индукции B_x носит выраженный профильный характер. На рис. 4 б видно, что магнитная индукция B_y распределена латеральным образом, что соответствует физике процесса.

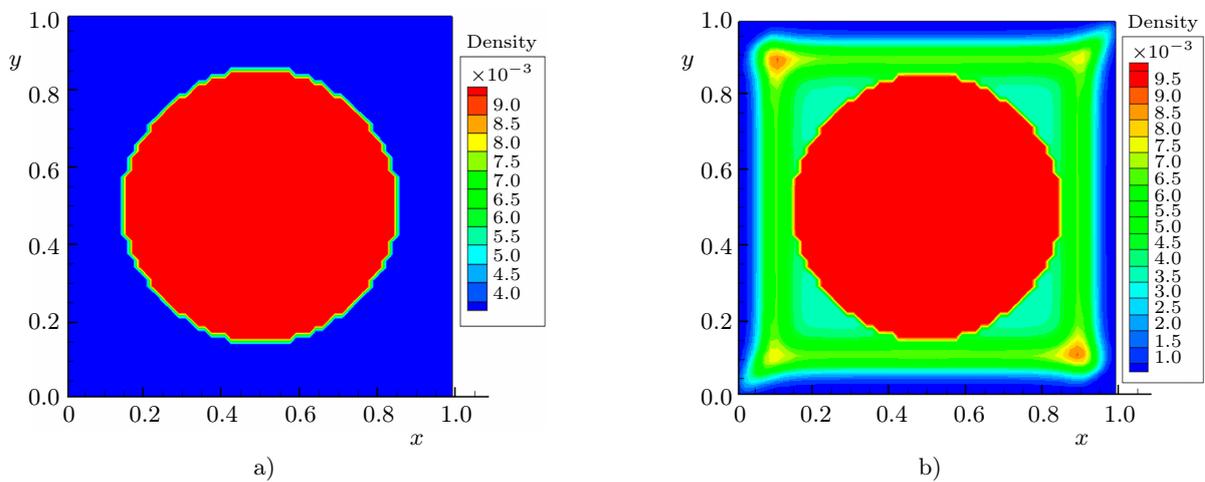


Рис. 3. Распределение плотности, $z = 0.25$: а) в начальный момент; б) в момент времени 0.051 мкс

Fig. 3. Density distribution, $z = 0.25$: а) at initial time; б) at time 0.051 μs

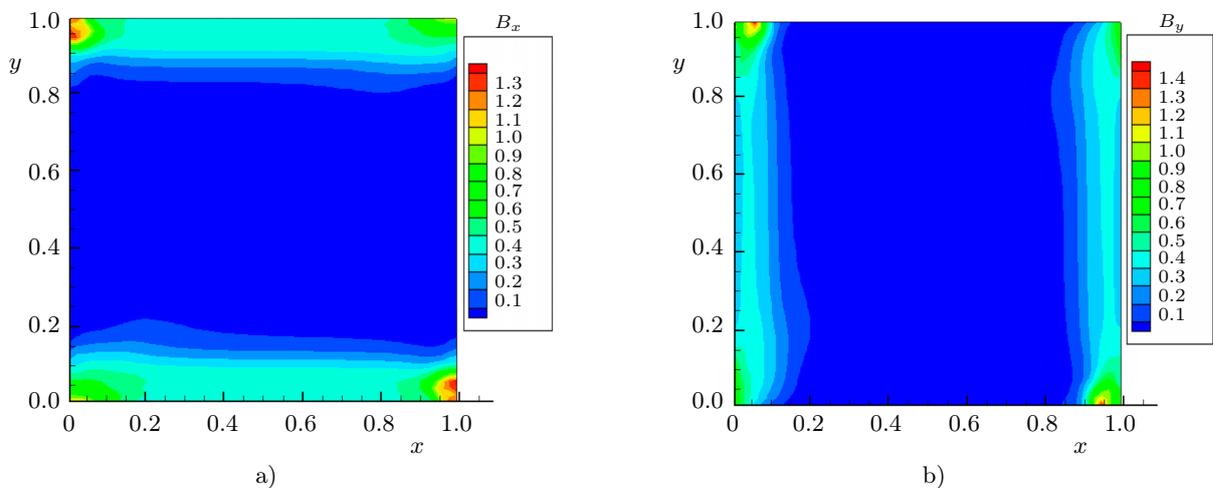


Рис. 4. Распределение компонент магнитной индукции в момент времени 0.051 мкс, $z = 0.25$: а) B_x ; б) B_y

Fig. 4. Distribution of the magnetic induction components at time 0.051 μs , $z = 0.25$: а) B_x ; б) B_y

12. Заключение. В работе описана математическая модель динамики замагниченной плазмы на основе полностью консервативной разностной схемы для трехмерных уравнений радиационной магнитной гидродинамики. В программе используются два метода численного решения систем разностных уравнений. Осуществлен автоматический выбор конкретного алгоритма, оптимального для физической ситуации на каждом шаге по времени. Проведен расчет сжатия вольфрамовой плазмы магнитным полем. Для рассматриваемой задачи скорость движения вещества, магнитные и электрические поля имеют полную конфигурацию. Расчет, в частности, подтвердил, что автоматический выбор численного метода на каждом временном шаге, в зависимости от физической ситуации, эффективнее, чем расчет всей задачи одним численным методом.

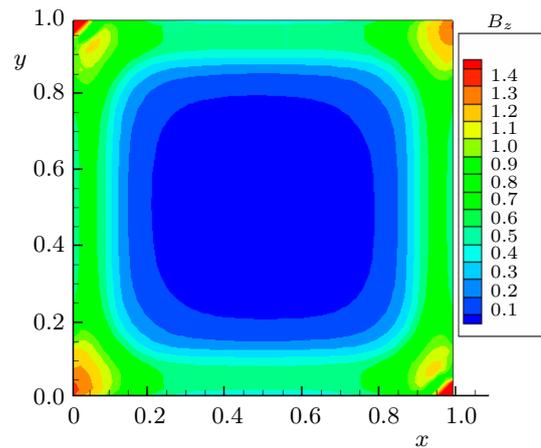


Рис. 5. Распределение компоненты магнитной индукции B_z в момент времени 0.051 мкс, $z = 0.25$

Fig. 5. Distribution of the magnetic induction component B_z at time 0.051 μs , $z = 0.25$

Список литературы

1. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. 183–272.
2. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературной гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
3. Гольдин В.Я., Четверушкин Б.Н. Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1972. 12, № 4. 990–1000.
4. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. 3–87.
5. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. 88–163.
6. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
7. Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977.
8. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
9. Гольдин В.Я. О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом // Современные проблемы матем. физики и вычисл. матем. М.: Наука, 1982. 13–127.
10. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984.
11. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.
12. Гольдин В.Я., Гольдина Д.А., Колтаков А.В., Шильков А.В. Математическое моделирование газодинамических процессов при высокой плотности энергии излучения // ВАНТ, Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 2. 59–66.
13. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. 1990. 16, № 2. 147–157.
14. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
15. Суржиков С.Т. Вычислительный эксперимент в построении радиационных моделей механики излучающего газа. М.: Наука, 1992.
16. Гольдин В.Я. Методы расчета переноса нейтронов и горения в термоядерном изделии (1948–1960 гг.) // Международный симпозиум, Дубна, 14–17 мая 1996г. В сб: “Наука и общество: история советского атомного проекта (49–50-е годы)”, 1999. 2. 497–501.
17. Суржиков С.Т. Радиационный перенос тепла в низкотемпературной плазме // ЭНТП, МАИК Наука/Интерпериодика. 2000. 1. 417–462.
18. Гасилов В.А., Чувагин А.С., Круковский А.Ю., Карташева Е.А., и др. Комплекс программ РАЗРЯД: Моделирование ускорения плазмы в сильноточных импульсных системах // Математическое моделирование. 2003. 15, № 9. 107–124.

19. *Суржиков С.Т.* Тепловое излучение газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
20. *Dedner A., Kröner D., Rohde C., Wesenberg M.* Radiation Magnetohydrodynamics: Analysis for Model Problems and Efficient 3d-Simulations for the Full System. In: Analysis and Numerics for Conservation Laws. Warnecke G. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. doi 10.1007/3-540-27907-5_8.
21. *Козлов А.Н.* Исследование вращающихся потоков плазмы на основе двумерной одножидкостной МГД-модели // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2005. № 69. 27 с.
22. *Гасилов В.А., Дьяченко С.В.* Квазимонотонная двумерная схема МГД для неструктурированных сеток // Математическое моделирование. 2005. 17, № 12. 87–109.
23. *Устюгов Д.О., Мажукин В.И., Устюгов С.Д.* Моделирование лазерной плазмы во внешнем магнитном поле // Тезисы докладов IV Международного научного семинара “Математические модели и моделирование в лазерно-плазменных процессах”. М.: Изд-во Моск. гуманитарного ун-та, 2007.
24. *Баранов В.Б.* Газодинамика и магнитная гидродинамика взаимодействия межпланетной и межзвездной сред. Теория и эксперимент // Известия Саратовского университета. 2008. 8, Сер. Математика. Механика. Информатика, Вып. 3. 18–25.
25. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008.
26. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009.
27. *Аристова Е.Н.* Моделирование взаимодействия излучения с веществом. Применение метода квазидиффузии. Saarbrücken: Изд-во Lambert, Academic Publishing, 2011.
28. *Суржиков С.Т.* Гиперзвуковое обтекание разреженным газом поверхностного тлеющего разряда с внешним магнитным полем. М.: ИПМех РАН, 2011.
29. *Chebotaev V.V., Cherednychenko T.N., Eliseev D.V., et al.* MHD characteristics of compression zone in plasma stream generated by MPC // Probl. At. Sci. Technol. 2012. № 6. 123–125.
30. *Суржиков С.Т.* Радиационная газовая динамика спускаемых космических аппаратов. Многотемпературные модели. М.: ИПМех РАН, 2013.
31. *Козлов А.Н., Коновалов В.С.* 3D модель переноса излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 86. doi 10.20948/prepr-2016-86.
32. *Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Цыгвинцев И.П.* Устойчивый алгоритм согласования потоков импульса и кинетической энергии при перестройке сетки // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 48. 11 с. doi 10.20948/prepr-2017-48.
33. *Моисеев Н.Я.* Модифицированный метод расщепления по физическим процессам для решения уравнений радиационной газовой динамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. 57, № 2. 303–315. doi 10.7868/S0044466917020120.
34. *Tsukamoto Y., Okuzumi S., Iwasaki K., Machida M.N., Inutsuka S.* The impact of the Hall effect during cloud core collapse: implications for circumstellar disk evolution // PAS. 2017. 69, No 6. 95. doi 10.1093/pasj/psx113.
35. *Cheung M.C.M., Rempel M., Chintzoglou G., et al.* A comprehensive three-dimensional radiative magnetohydrodynamic simulation of a solar flare // Nat Astron. 2019. 3. 160–166. doi 10.1038/s41550-018-0629-3.
36. *Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Клочкова Л.В., Сузан Д.В.* Оценки сходимости итерационных алгоритмов численного решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 94. 17 с. doi 10.20948/prepr-2019-94
37. *Jin S., Tang M., Zhang X.* A spatial-temporal asymptotic preserving scheme for radiation magnetohydrodynamics in the equilibrium and non-equilibrium diffusion limit // Journal of Computational Physics. 2022. 452. 110895. doi 10.1016/j.jcp.2021.110895.
38. *Abbas A., Khan A., Abdeljawad T., Aslam M.* Numerical simulation of variable density and magnetohydrodynamics effects on heat generating and dissipating Williamson Sakiadis flow in a porous space: Impact of solar radiation and Joule heating // Heliyon. 2023. 9, No 11. doi 10.1016/j.heliyon.2023.e21726.
39. *Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П.* Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике // ДАН СССР. 1977. 235, № 6. 1285–1288.
40. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
41. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
42. *Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000.



Информация об авторах

Александр Юрьевич Круковский — старший научный сотрудник; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

Юрий Андреевич Повещенко — ведущий научный сотрудник; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

Виктория Олеговна Подрыга — ведущий научный сотрудник; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

Парвин Ильгар кызы Рагимли — научный сотрудник; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

References

1. S. I. Braginskii, *Problems of Plasma Theory*, Vol. 1: *Transport Phenomena in a Plasma* (Atomizdat, Moscow, 1963) [in Russian].
2. Ya. B. Zeldovich and Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Nauka, Moscow, 1966) [in Russian].
3. V. Ya. Goldin and B. N. Chetverushkin, “Methods for Solving One-Dimensional Problems of Radiation Gas Dynamics,” *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **12** (4), 177–189 (1972). doi [10.1016/0041-5553\(72\)90122-X](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90122-X).
4. A. I. Morozov and L. S. Soloviev, “Steady-state plasma flows in a magnetic field,” in *Reviews of Plasma Physics*, Ed. by M. A. Leontovich (Atomizdat, Moscow, 1974), Vol. 8, 3–87 [in Russian].
5. K. V. Brushlinskii and A. I. Morozov, “Calculation of two-dimensional plasma flows in channels,” in *Reviews of Plasma Physics*, Ed. by M. A. Leontovich (Atomizdat, Moscow, 1974), Vol. 8, 88–163 [in Russian].
6. N. Krall and A. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (Mir, Moscow, 1975) [in Russian].
7. V. B. Baranov and K. V. Krasnobaev, *Hydrodynamic Theory of Cosmic Plasma* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
8. G. I. Marchuk and V. I. Lebedev, *Numerical Methods in the Theory of Neutron Transport* (Atomizdat, Moscow, 1981) [in Russian].
9. V. Ya. Goldin, “On mathematical modeling of continuum problems with non-equilibrium transport,” in *Modern Problems of Mathematical Physics and Computational Mathematics* (Nauka, Moscow, 1982), 13–127 [in Russian].
10. J. Duderstadt and G. Moses, *Inertial Confinement Fusion* (New York: John Wiley & Sons, 1982).
11. B. N. Chetverushkin, *Mathematical Modeling of Radiating Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1985) [in Russian].
12. V. Ya. Goldin, D. A. Goldina, A. V. Kolpakov, and A. V. Shilkov, “Mathematical Modeling of Gas-Dynamic Processes at High Radiation Energy Density,” *VANT, Ser. Methods and Programs for Numerical Solution of Mathematical Physics Problems*, Vol. 2, 59–66 (1986) [in Russian].
13. K. V. Brushlinskii, *Mathematical and Computational Problems of Magnetohydrodynamics* (Binom. Laboratoriya Znaniy, Moscow, 2009) [in Russian].
14. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Finite Difference Methods for Solving Problems of Gas Dynamics* (Moscow: Nauka, 1992) [in Russian].
15. S. T. Surzhikov, *Computational Experiment in Constructing Radiation Models of Radiating Gas Mechanics* (Nauka, Moscow, 1992) [in Russian].
16. V. Ya. Goldin, “Methods for Calculating Neutron Transfer and Burning in a Thermonuclear Device (1948-1960),” in *Science and Society: History of the Soviet Atomic Project (40-50s)* (Dubna, 1999), **2**, pp. 497–501 [in Russian].
17. S. T. Surzhikov, “Radiative Heat Transfer in Low-Temperature Plasma,” *ENTP* **1**, 417–462 (2000) [in Russian].
18. V. A. Gasilov, A. S. Chuvatin, A. Yu. Krukovsky, E. L. Kartasheva, et al., “A program Package "Razryad": Modeling of Plasma Acceleration in Pulsed-Power Systems,” *Matem. Modeling.* **15** (9), 107–124 (2003) [in Russian].
19. S. T. Surzhikov, *Thermal Radiation of Gases and Plasma* (Bauman Moscow State Technical University Publishing, Moscow, 2004) [in Russian].

20. A. Dedner, D. Kröner, C. Rohde, and M. Wesenberg, *Radiation Magnetohydrodynamics: Analysis for Model Problems and Efficient 3d-Simulations for the Full System*, in Analysis and Numerics for Conservation Laws, Ed. by G. Warnecke (Springer, Berlin, Heidelberg, 2005). doi [10.1007/3-540-27907-5_8](https://doi.org/10.1007/3-540-27907-5_8).
21. A. N. Kozlov, “Investigation of rotating plasma flows based on a two-dimensional single-fluid MHD model,” KIAM Preprints, **69**, 27 p. (2005) [in Russian].
22. V. A. Gasilov and S. V. Dyachenko, “Quasi-monotone two-dimensional MHD scheme for unstructured grids,” Math. Models Comput. Simul. **17** (12), 87–109 (2005) [in Russian].
23. D. O. Ustyugov, V. I. Mazhukin, and S. D. Ustyugov, “Modeling of laser plasma in an external magnetic field,” in Proc. IV Int. Sci. Seminar “Mathematical Models and Modeling in Laser-Plasma Processes”, Moscow, Russia, 2007 (Moscow Humanitarian University, Moscow, 2007) [in Russian].
24. V. B. Baranov, “Gas dynamics and magnetohydrodynamics of the interaction between interplanetary and interstellar media. Theory and experiment,” Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform. **8** (3), 18–25 (2008) [in Russian].
25. A. I. Morozov, *Introduction to Plasmadynamics* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
26. K. V. Brushlinskii, *Mathematical and Computational Problems of Magnetohydrodynamics* (Binom. Laboratoriya Znaniy, Moscow, 2009) [in Russian].
27. E. N. Aristova, *Modeling the Interaction of Radiation with Matter. Application of the Quasi-Diffusion Method* (Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2011) [in Russian].
28. S. T. Surzhikov, *Hypersonic Flow of Rarefied Gas around a Surface Glow Discharge with an External Magnetic Field* (IPMech RAS, Moscow, 2011) [in Russian].
29. V. V. Chebotarev, T. N. Cherednychenko, D. V. Eliseev, et al. “MHD characteristics of compression zone in plasma stream generated by MPC,” Probl. At. Sci. Technol. **6**, 123–125 (2012).
30. S. T. Surzhikov, *Radiation Gas Dynamics of Descent Spacecraft. Multi-Temperature Models* (IPMech RAS, Moscow, 2013) [in Russian].
31. A. N. Kozlov and V. S. Konovalov, “3D Model of Radiation Transfer in Ionizing Gas and Plasma Flows,” KIAM Preprints, **86**, 32 p. (2016). doi [10.20948/prepr-2016-86](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-86) [in Russian].
32. V. A. Gasilov, A. Yu. Krukovskiy, and I. P. Tsygvintsev, “Stable Algorithm for Matching the Fluxes of Momentum and Kinetic Energy during Remeshing,” KIAM Preprints. **48**, 11 p. (2017) doi [10.20948/prepr-2017-48](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-48) [in Russian].
33. N. Ya. Moiseev, “Modified Method of Splitting by Physical Processes for Solving Radiation Gas Dynamics Equations,” Comput. Math. Math. Phys. **57** (2), 301–313 (2017). doi [10.1134/S0965542517020117](https://doi.org/10.1134/S0965542517020117)
34. Y. Tsukamoto, S. Okuzumi, K. Iwasaki, M. N. Machida, and S. Inutsuka, “The impact of the Hall effect during cloud core collapse: implications for circumstellar disk evolution,” PAS. **69** (6), 95 (2017). doi [10.1093/pasj/psx113](https://doi.org/10.1093/pasj/psx113).
35. M. C. M. Cheung, M. Rempel, G. Chintzoglou, et al., *A Comprehensive Three-Dimensional Radiative Magnetohydrodynamic Simulation of a Solar Flare* (Nature Publishing Group, 2019). doi [10.1038/s41550-018-0629-3](https://doi.org/10.1038/s41550-018-0629-3).
36. A. Yu. Krukovskiy, Yu. A. Poveschenko, L. V. Klochkova, and D. V. Suzan, “Convergence Assessment of Iterative Algorithms for Solving Three-Dimensional Nonstationary Problems of Magnetohydrodynamics,” KIAM Preprints. **94**, 17 p. (2019) doi [10.20948/prepr-2017-94](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-94) [in Russian].
37. S. Jin, M. Tang, and X. Zhang, “A spatial-temporal asymptotic preserving scheme for radiation magnetohydrodynamics in the equilibrium and non-equilibrium diffusion limit,” J. Comput. Phys. **452**, 110895 (2022). doi [10.1016/j.jcp.2021.110895](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110895).
38. A. Abbas, A. Khan, T. Abdeljawad, and M. Aslam, “Numerical simulation of variable density and magnetohydrodynamics effects on heat generating and dissipating Williamson Sakiadis flow in a porous space: Impact of solar radiation and Joule heating,” Heliyon. **9** (11), e21726 (2023). doi [10.1016/j.heliyon.2023.e21726](https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e21726).
39. V. M. Goloviznin, A. A. Samarskii, and A. P. Favorskii, “Variational approach to the construction of finite-difference models in hydrodynamics,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **235** (6), 1285–1288 (1977) [in Russian].
40. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Methods for Solving Grid Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
41. A. A. Samarskii and A. V. Gulin, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
42. A. F. Nikiforov, V. G. Novikov, and V. B. Uvarov, *Quantum-Statistical Models of High-Temperature Plasma and Methods for Calculating Rosseland Mean Free Paths and Equations of State* (Fizmatlit, Moscow, 2000) [in Russian].



Information about the authors

Alexander Yu. Krukovskiy — Senior Scientist; Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia.

Yury A. Poveshchenko — Leading Scientist; Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia.

Viktoria O. Podryga — Leading Scientist; Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia.

Parvin I. Rahimly — Scientist; Keldysh Institute of Applied Mathematics (RAS), Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia.