



doi 10.26089/NumMet.v25r432

УДК 519.63

О численном моделировании плазменных колебаний с учетом нестандартной вязкости

О. С. Розанова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-4912-3680, e-mail: rozanova@mech.math.msu.su

Е. В. Чижонков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-7194-8451, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Аннотация: Численно анализируется влияние нестандартной вязкости на нерелятивистские колебания холодной плазмы. Нестандартная вязкость может быть интерпретирована как следствие небольшого нагрева электронов при использовании баротропной модели. Для расчетов построена неявная разностная схема типа Мак-Кормака, имеющая более слабое ограничение на устойчивость, чем явная схема, и реализуемая без итераций, что увеличивает ее вычислительную эффективность в десятки раз. Показано, что учет нестандартной вязкости плазмы может быть причиной формирования бегущих волн солитонного типа.

Ключевые слова: численное моделирование, нерелятивистские колебания, нестандартная вязкость, неявная схема Мак-Кормака, бегущие волны.

Благодарности: Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФ (грант № 23-11-00056)

Для цитирования: Розанова О.С., Чижонков Е.В. О численном моделировании плазменных колебаний с учетом нестандартной вязкости // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 4. 427–440. doi 10.26089/NumMet.v25r432.

On numerical simulation of plasma oscillations taking into account non-standard viscosity

Olga S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-4912-3680, e-mail: rozanova@mech.math.msu.su

Evgenii V. Chizhonkov

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-7194-8451, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Abstract: The effect of non-standard viscosity on non-relativistic oscillations of cold plasma is numerically analyzed. The non-standard viscosity can be interpreted as a consequence of low electron heating when using the barotropic model. An implicit McCormack-type difference scheme has been constructed for calculations, which has a weaker stability constraint than the explicit scheme and is implemented without iterations, which increases its computational efficiency tenfold. It is shown that taking into account the non-standard viscosity of the plasma can be the reason for the formation of traveling waves of the soliton type.



Keywords: numerical simulation, non-relativistic oscillations, non-standard viscosity, implicit McCormack scheme, traveling waves.

Acknowledgements: The work was partially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 23-11-00056)

For citation: O. S. Rozanova, E. V. Chizhonkov, “On numerical simulation of plasma oscillations taking into account non-standard viscosity,” Numerical Methods and Programming. 25 (4), 427–440 (2024). doi 10.26089/NumMet.v25r432.

1. Введение. При использовании в качестве гидродинамической модели плазмы соотношений вязкого ионизованного газа в общем случае вязкость в магнитном поле определяется сложными тензорными зависимостями [1]. Однако в простейших случаях (например, для пространственно одномерных движений плазмы) можно ограничиться уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + E + \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x} = \boxed{\frac{\nu}{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad \nu \geq 0,$$

где u — скорость электронов, E — электрическое поле, p — давление, n — плотность, ν — коэффициент вязкости, x и t — координаты по пространству и времени соответственно. При этом под “стандартной” вязкостью понимается слагаемое, пропорциональное второй производной скорости (взято в рамку). В рассматриваемом ниже случае в уравнении для скорости также присутствует слагаемое, пропорциональное второй производной, но от другой функции — E , описывающей электрическое поле. Поэтому такое слагаемое мы будем называть “нестандартной” вязкостью, хотя по физическому смыслу оно ближе к электронному давлению баротропного типа.

Гидродинамическая модель холодной плазмы хорошо известна и достаточно подробно описана в учебниках и монографиях по физике плазмы [2–5]. В настоящее время внимание к этой модели обусловлено в первую очередь задачами, относящимися к распространению сверхмощных лазерных импульсов в плазме [6, 7]. Подобные постановки напрямую связаны с приложением результатов, удостоенных Нобелевской премии по физике 2018 г. В [8] приведены следующие примеры практически важных задач этой тематики: лазерное ускорение электронов и ионов, быстрое зажигание термоядерного синтеза, ядерные реакции в луче лазера, синхротронное и субмиллиметровое излучение и пр. Численному моделированию различных явлений в холодной плазме, например таких как колебания и кильватерные волны, возбуждаемые коротким мощным лазерным импульсом, посвящена монография [9].

Напомним, что гидродинамическая модель “холодной” плазмы, в которой температура электронов формально полагается равной нулю, является точным математическим следствием кинетической модели, основанной на системе уравнений Власова–Максвелла (см., например, [2, 4]). Однако такое гидродинамическое приближение является безусловной идеализацией физических процессов, так как температура плазмы может быть необязательно большой, но необходимо положительной. По этой причине в работе [10] в модель холодной плазмы было внесено уточнение на случай малых температур, т.е. “теплой” плазмы. Главный смысл модификации модели — добавление в уравнение, выражающее закон сохранения импульса, новых слагаемых, описывающих электронное давление, вязкость и электрон-ионные соударения.

Влияние традиционных зависимостей давления от электронной плотности было рассмотрено в [11], причем был сделан вывод, что учет давления трансформирует ленгмюровские колебания в бегущие волны. В свою очередь, влияние электрон-ионных соударений было теоретически исследовано в [12] и численно в работе [13], где было показано затухание амплитуды колебаний при увеличении коэффициента соударений. Влияние стандартной вязкости, отвечающей диагональной матрице вязкости, изучено в [14]. А именно, показано, что в динамике ленгмюровских колебаний не только затухает амплитуда, но и формируется седловая точка, не исчезающая со временем. Однако случай, когда матрица вязкости устроена более сложным образом, в частности не является диагональной, оставался неисследованным как с аналитической, так и с численной точек зрения. В настоящей работе мы рассмотрим простейший пример нестандартной вязкости такого рода. Он, кроме интереса постановки вычислительного эксперимента, имеет также ясную физическую интерпретацию.



Однако здесь следует отметить важное обстоятельство: для численного решения систем гиперболического типа, к которым относятся уравнения холодной плазмы, традиционно используются явные разностные схемы (см., например, [9, 15] и цитируемую там литературу), а учет любой вязкости сразу же приводит в них к жестким ограничениям на устойчивость. Поэтому введение в модель слагаемого, описывающего вязкость, диктует необходимость разработки новых или соответствующих модификаций ранее известных численных алгоритмов (с более слабыми ограничениями на устойчивость вычислений). В настоящей работе с целью моделирования ленгмюровских колебаний при учете нестандартной вязкости плазмы построена новая разностная схема сквозного счета типа неявной схемы Мак-Кормака [16]. Ее главной особенностью является экономичность: замена классической явной схемы Мак-Кормака на неявную в численном алгоритме в данном случае требует незначительного увеличения вычислительной работы (в пределах 10%), причем неявная процедура носит безытерационный характер, что существенно увеличивает ее привлекательность. Требования на устойчивость в неявной схеме качественно ослаблены, что достигается за счет ухудшения асимптотической погрешности аппроксимации. Однако при доминирующем переносе (т.е. при небольших значениях коэффициента вязкости, как это имеет место в “теплой” плазме) этим ухудшением можно пренебречь.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приведена простейшая (плоская, пространственно одномерная) постановка задачи, описывающая нерелятивистские колебания холодной плазмы с учетом нестандартной вязкости в эйлеровых переменных. В разделе 3 построена неявная схема Мак-Кормака для нелинейных уравнений с вязкостью из второго раздела, а также отмечены наиболее важные вычислительные свойства этой схемы. В разделе 4 описаны результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующих влияние вязкого слагаемого на форму ленгмюровских колебаний, порождаемых коротким мощным лазерным импульсом. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

2. Постановка задачи с нестандартной вязкостью. Будем считать плазму нерелятивистской электронной жидкостью, пренебрегая рекомбинационными эффектами и движением ионов. Тогда в рамках модели холодной плазмы ее плоские одномерные колебания можно описать безразмерной системой уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \rho} + E = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} - V = 0, \tag{2}$$

где V — скорость электронов, E — электрическое поле, ρ и θ — безразмерные координаты по пространству и времени соответственно. К системе (1), (2) обычно добавляют уравнение

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho}, \tag{3}$$

характеризующее безразмерную плотность электронов N . Формула (3) является частным случаем теоремы Гаусса [17], которая в дифференциальной размерной форме имеет вид $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n - n_0)$. Здесь $e < 0$ — заряд электрона, n_0 — значение невозмущенной электронной плотности. Подробный вывод уравнений (1)–(3) можно найти в различных источниках (см., например, [9, с. 19]).

Система из двух первых уравнений относится к гиперболическому типу и хорошо изучена как аналитически (см., например, [18, 19]), так и численно [20]. Для таких систем существует локально по времени единственное решение задачи Коши того же класса, что и начальные данные. Также известно, что для таких систем потеря решением гладкости происходит по одному из следующих сценариев: либо сами компоненты решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность, либо они остаются ограниченными, но в бесконечность обращаются их производные [21]. Последняя возможность реализуется, например, для однородных законов сохранения, к которым относятся уравнения газовой динамики, где возникновение особенности соответствует образованию ударной волны.

Как уже говорилось выше, в работе [10] в модель холодной плазмы было внесено уточнение на случай малых температур. В используемых здесь обозначениях модификация модели может быть выражена как добавление в правую часть уравнения (1) новых слагаемых:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \rho} + E = -\frac{1}{N} \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\nu}{N} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \eta V,$$

где P — электронное давление, $\nu \geq 0$ и $\eta \geq 0$ — постоянные коэффициенты вязкости и соударений, зависящие от температуры. С учетом специфического интереса к нестандартной вязкости рассмотрим модификацию уравнения (1), содержащую только одно новое слагаемое:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \rho} + E = -\frac{1}{N} \frac{\partial P}{\partial \rho}.$$

Сравнение бегущих волн в кинетической и гидродинамической постановках рассматривалось в [11], причем в гидродинамике изучались зависимости давления от плотности традиционной для плазмы баротропной формы $P = \hat{\nu}(T) N^\gamma$, $\gamma = 1$ [4] или $\gamma = 3$ [17], с соответствующим коэффициентом $\hat{\nu}$, зависящим от температуры. В настоящей работе первоочередной интерес представляет случай $\gamma = 2$, так как он приводит к появлению нестандартной вязкости в уравнении для скорости (взято в рамку):

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \rho} + E = \left[\nu \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} \right], \quad \nu = 2 \hat{\nu}(T). \quad (4)$$

Формализуем постановку задачи: нас будет интересовать в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}, \theta > 0\}$ решение задачи Коши для уравнений (2), (4) с начальными условиями

$$V(\rho, 0) = V_0(\rho), \quad E(\rho, 0) = E_0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Наиболее естественным выбором начальных условий (5) является имитация возмущений электрического поля, которые порождаются в разреженной плазме коротким мощным лазерным импульсом при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы, см. детали в [22]):

$$E_0(\rho) = \alpha \rho \exp \left\{ -2 \frac{\rho^2}{\rho_*^2} \right\}, \quad V_0(\rho) = 0, \quad (6)$$

где $\alpha = (a_*/\rho_*)^2$, а a_*, ρ_* — амплитуда и ширина импульса.

3. Неявная схема Мак-Кормака для плазмы с нестандартной вязкостью. Приведем систему (2), (4) к удобной в рассматриваемом случае векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} + A(V) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho} = B \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \rho^2} + \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (7)$$

где оператор $A(V)$ является линейным и диагональным: $A = V(\rho, \theta) I$, I — единичная (2×2) -матрица; B — (2×2) -матрица с единственным ненулевым элементом $b_{12} = \nu$; $\mathbf{U} = (V, E)^T$, $\mathbf{S} = (-E, V)^T$ — вектор-функции, рассматриваемые в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}, \theta \geq 0\}$.

Определим дискретизацию независимых переменных с помощью постоянных параметров τ и h так, что

$$\theta^n = n \tau, \quad n \geq 0, \quad \rho_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и будем обозначать зависящую переменную $\mathbf{U}(\rho, \theta)$ в узле сетки (ρ_i, θ^n) через \mathbf{U}_i^n .

Введем полезные обозначения для операторов разностей “вперед” D^+ и “назад” D^- , у которых аргумент может быть как векторным, так и скалярным:

$$D^+ \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i, \quad D^- \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1}.$$

Запишем неявную схему Мак-Кормака для системы (7), считая известными величины V_i^n, E_i^n .

1. Предиктор с результатом \mathbf{U}_i^p реализуется формулами:

положим $V_{i+1/2}^n = (V_{i+1}^n + V_i^n) / 2$, определим матрицу

$$C_{i+1/2}^n = A \left(|V_{i+1/2}^n| \right) + \frac{2}{h} B$$

и последовательно вычислим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_i^n &= -\frac{\tau}{h} A \left(V_{i+1/2}^n \right) D^+ \mathbf{U}_i^n + \frac{\tau}{h^2} B D^+ D^- \mathbf{U}_i^n + \tau \mathbf{S}_i^n, \\ \left(I - \lambda \frac{\tau}{h} C_{i+1/2}^n D^+ \right) \delta \mathbf{U}_i^p &= \Delta \mathbf{U}_i^n, \\ \mathbf{U}_i^p &= \mathbf{U}_i^n + \delta \mathbf{U}_i^p, \end{aligned} \quad (8)$$

где вычисления проводятся в сторону уменьшения индекса $i = \dots, k+1, k, k-1, \dots$.



2. Корректор с результатом U_i^c реализуется формулами:

положим $V_{i-1/2}^p = (V_i^p + V_{i-1}^p) / 2$, определим матрицу

$$C_{i-1/2}^p = A \left(|V_{i-1/2}^p| \right) + \frac{2}{h} B$$

и последовательно вычислим

$$\begin{aligned} \Delta U_i^p &= -\frac{\tau}{h} A \left(V_{i-1/2}^p \right) D^- U_i^p + \frac{\tau}{h^2} B D^- D^+ U_i^p + \tau S_i^p, \\ \left(I + \lambda \frac{\tau}{h} C_{i-1/2}^p D^- \right) \delta U_i^c &= \Delta U_i^p, \\ U_i^c &= U_i^n + \delta U_i^c, \end{aligned} \tag{9}$$

где вычисления проводятся в сторону увеличения индекса $i = \dots, k-1, k, k+1, \dots$.

В формулах (8), (9) верхний индекс p (или c) обозначает шаг предиктор (или корректор) или n – временной слой θ^n , λ – постоянный параметр схемы, который будет определен ниже.

Окончательные формулы, формирующие решение U вместе с плотностью N (из соотношения (3)) на следующем временном слое с номером $(n+1)$, имеют вид:

$$U_i^{n+1} = \frac{U_i^p + U_i^c}{2}, \quad N_i^{n+1} = 1 - \frac{D^+ + D^-}{2h} E_i^{n+1}. \tag{10}$$

Напомним [14] полезные свойства неявной схемы Мак-Кормака для простейшего уравнения конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами a и $\nu \geq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

снабженного начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ таким, что $u_0(x) = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

При $\lambda = 0$ неявная схема трансформируется в обычную явную схему Мак-Кормака [16] с условием устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{|a|/h + 2\nu/h^2}$$

и первым дифференциальным приближением [23] вида

$$u_t = L_0 u - \frac{\tau^2}{6} L_0^3 u - \frac{ah^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\nu h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\tau^2 + h^2),$$

где $L_0 u = \nu u_{xx} - a u_x$.

Если же выбирать λ из условия [16]

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \max \left\{ |a| + \frac{2\nu}{h} - \frac{h}{\tau}, 0 \right\},$$

то неявная схема (при $\lambda > 0$) будет безусловно устойчивой, а в правую часть первого дифференциального приближения добавятся слагаемые [24]

$$\tau^2 \left[\nu \lambda \left(\lambda + \frac{h}{2\tau} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a \lambda \left(\lambda + \frac{h}{\tau} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right].$$

Иными словами, в неявной схеме на гладких решениях качественное ослабление требований на устойчивость достигается за счет ухудшения асимптотической погрешности аппроксимации. Однако при доминирующем переносе (т.е. достаточно малых ν , как это имеет место в “теплой” плазме) этим ухудшением можно пренебречь.

4. Численные эксперименты. Для однозначного задания начальных условий и сохранения преимущества с предыдущими расчетами (см., например, [9, 11, 25]) зафиксируем параметры в (6): $\rho_* = 0.5$, $\alpha = 0.2$ и заметим, что на больших расстояниях от прямой $\rho = 0$ возмущения отсутствуют:

$$V(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad E(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0.$$

Однако в целях численного моделирования расчетную область необходимо ограничить, учитывая скорость распространения бегущих волн. Определим область по переменной θ как отрезок $[0, \Theta]$, $\Theta = 20$, считая, что примерно трех периодов достаточно для наблюдения за решением. Тогда зададим ограничение расчетной области по переменной ρ как отрезок $[-d, d]$, на концах которого следует задать однородные граничные условия первого рода:

$$V(\pm d, \theta) = E(\pm d, \theta) = 0.$$

Отметим, что такой выбор одинаково удобен при использовании как явной, так и неявной разностной схемы типа Мак-Кормака. Конечно, параметр d следует выбирать достаточно большим.

В силу экспоненциального затухания функции $E_0(\rho)$ для моделирования колебаний холодной плазмы достаточно положить $d = 4.5\rho_*$. В рассматриваемом случае “теплой” плазмы область должна позволять сформироваться бегущей волне; положим для этого $d = 5\rho_* + \sqrt{\nu}\Theta$.

Выбор такого увеличения d обусловлен следующими соображениями. При достаточно малых значениях a_* линейаризация уравнений (2), (4) с последующим исключением $V^l(\rho, \theta)$ порождает линейное уравнение Клейна–Гордона для возмущения электрического поля $E^l(\rho, \theta)$

$$\frac{\partial^2 E^l}{\partial \theta^2} + E^l = a^2 \frac{\partial^2 E^l}{\partial \rho^2}, \quad \nu = a^2,$$

задача Коши для которого, снабженная начальными условиями

$$E^l(\rho, \theta = 0) = E_0^l(\rho), \quad E_\theta^l(\rho, \theta = 0) = 0,$$

имеет решение типа бегущих со скоростями $\pm a$ волн [25]:

$$E^l(\rho, \theta) = \frac{1}{2} [E_0^l(\rho + a\theta) + E_0^l(\rho - a\theta)] + \int_{-a\theta}^{a\theta} dy E_0^l(\rho + y) \frac{\partial}{\partial \theta} J_0 \left\{ \sqrt{\theta^2 - \frac{y^2}{a^2}} \right\},$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. В рассматриваемом диапазоне времени волны не должны достигать границ расчетной области, чтобы не “портить” однородные граничные условия.

Следует отметить, что наличие дополнительного вязкого слагаемого в уравнении (4) приводит к существенному изменению закона сохранения энергии (см. вывод при $\nu = 0$ в [26]):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{E^2 + NV^2}{2} \right\} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{NV^3}{2} = \nu NV \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2}.$$

После интегрирования этого соотношения по отрезку $[-d, d]$, на концах которого заданы указанные выше однородные граничные условия, получим сохранение по времени величины

$$En^d(\theta) = \int_{-d}^d d\rho \{ E^2(\rho, \theta) + N(\rho, \theta)V^2(\rho, \theta) + \nu N^2(\rho, \theta) \} \equiv \text{const}.$$

Обе схемы Мак-Кормака (как явная, так и неявная) сохраняют величину $En^d(\theta)$ с точностью до слагаемых порядка аппроксимации, указанных в дифференциальном приближении, а суммарный заряд (интеграл от электронной плотности по тому же отрезку) — на сеточном уровне, т.е. с точностью до ошибок округлений.

Прежде чем обсуждать результаты расчетов, отметим их достоверность с точки зрения устойчивости. В отличие от модельной постановки (см. раздел 3), когда явная схема Мак-Кормака имеет ограничение вида $\tau = O(h^2)$, а неявная схема абсолютно устойчива, здесь ситуация более сложная.

Как уже отмечалось в других работах (см., например, [9, 11]), для адекватного отображения динамики электронной плотности требуются достаточно подробные пространственные сетки. Типичной является



ситуация, когда $h \approx 10^{-3}$ при использовании безразмерной переменной ρ . В представленных ниже расчетах выбиралось значение $h = 2.5 \cdot 10^{-3}$ по причине небольшой амплитуды колебаний ($\alpha = 0.2$). Из соображений аппроксимации задачи небольшие шаги по пространственной переменной требуют небольших шагов по времени: здесь $\tau = h/2$. Но дело не только в аппроксимации. Рассматриваемая нелинейная постановка по существу отличается от модельной из раздела 3, поэтому безусловной устойчивости у неявной схемы (при $\lambda = 1$) оснований ожидать здесь нет. Более конкретно, расчет при $\tau = h$ приводит к неограниченному возрастанию ошибок округлений (численной неустойчивости), следовательно, речь может идти только об условной устойчивости.

Необходимо отметить, что при использовании явной схемы Мак-Кормака (при $\lambda = 0$) ситуация обстоит существенно хуже: явная схема устойчива только при $\tau \leq h/10$ (эксперимент демонстрирует неустойчивость при $\tau = h/8$). Иными словами, проводить надежные (устойчивые!) численные эксперименты можно только на основе неявной схемы, в противном случае это приводит к неоправданной утилизации вычислительных ресурсов.

Обратим также внимание на другое различие между явной и неявной схемами Мак-Кормака, весьма существенное при моделировании разрывных решений. Хорошо известно, что при расчете разрывов по явной схеме возникают ложные осцилляции, не имеющие никакого отношения к физическим решениям. А неявная схема обладает свойством монотонизации разностного решения, особенно заметным при наличии вязкости (см. пример в [24]). В рассматриваемой постановке с нестандартной вязкостью при увеличении коэффициента ν формирование разрывных бегущих волн представляется достаточно естественным [11], поэтому отмеченное выше свойство монотонизации увеличивает привлекательность неявной схемы.

Уточним, что приводимые ниже иллюстрации были получены с помощью неявной схемы, хотя для контроля наиболее важных расчетов регулярно применялась явная (более затратная!) схема.

Рассмотрим изменение решения в зависимости от коэффициента вязкости ν . На рис. 1 а для самой чувствительной функции (электронной плотности N) приведены пространственные распределения с интервалом 2π по времени для очень маленькой скорости распространения волны ($a = \sqrt{\nu} = 0.05$). Легко заметить, что волновой перенос энергии здесь практически отсутствует, т.е. отличия от невязких ленгмюровских колебаний [9, 20] малозаметны. Для сравнения на рис. 1 б показаны распределения электронной плотности в те же моменты времени, но при $a = 0.1$. Разница хорошо наблюдается: фронт волны движется с практически удвоенной скоростью, а в его окрестности видны “гидродинамические” осцилляции, которые являются характерным отличием от кинетической модели [25]. При этом само решение является достаточно гладким, т.е. вязкость еще мала, чтобы изменить форму решения.

Полезным сигнализатором качественного изменения решения может служить динамика относительной погрешности величины $En^d(\theta)$. Для гладкого решения ($\nu = 0.01$) на рис. 2 а приведена ее зависимость от времени наблюдения при $h = 1/4000$, $\tau = h/2$; при уменьшении сеточного параметра h в два

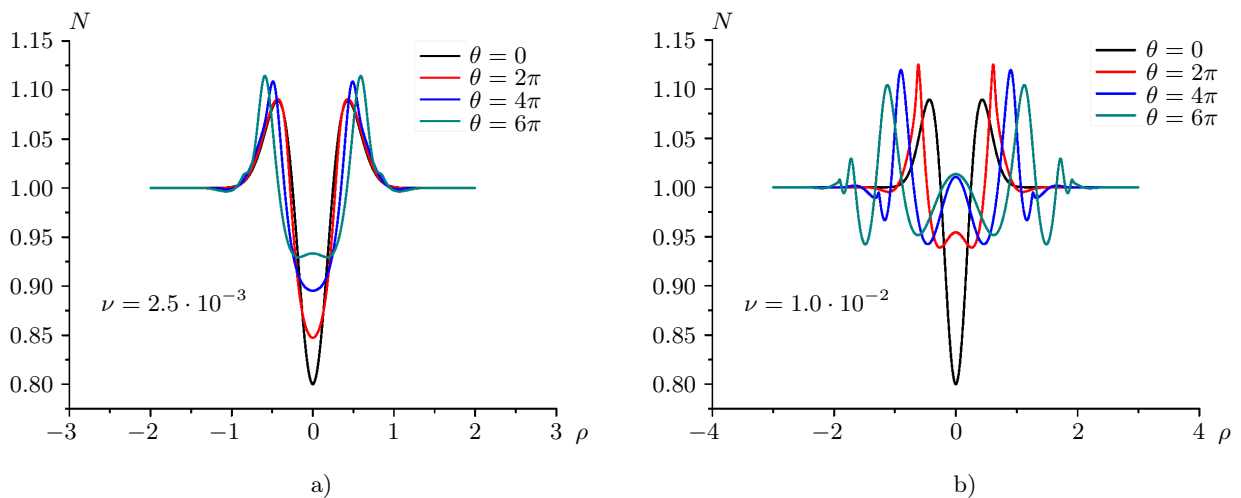


Рис. 1. Распределение плотности электронов $N(\rho, \theta)$ в различные моменты времени ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$):
 а) при $\nu = 0.0025$; б) при $\nu = 0.01$

Fig. 1. Electron density distribution $N(\rho, \theta)$ at different time points ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$):
 а) when $\nu = 0.0025$; б) when $\nu = 0.01$

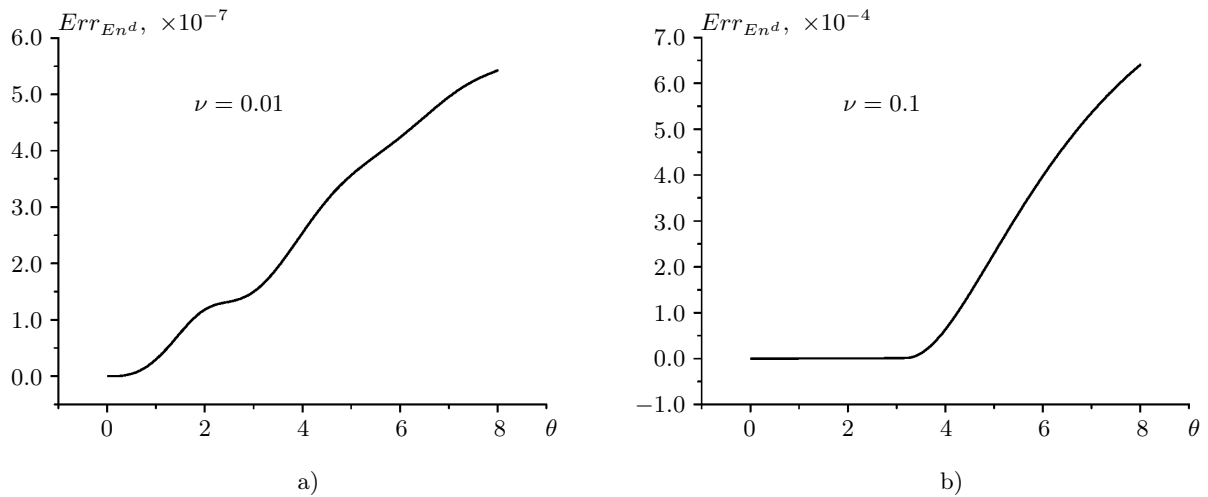


Рис. 2. Динамика относительной погрешности величины $En^d(\theta)$ при различных значениях ν :
 а) $\nu = 0.01$; б) $\nu = 0.1$

Fig. 2. Dynamics of the relative error of the value $En^d(\theta)$ for different values of ν :
 а) $\nu = 0.01$; б) $\nu = 0.1$

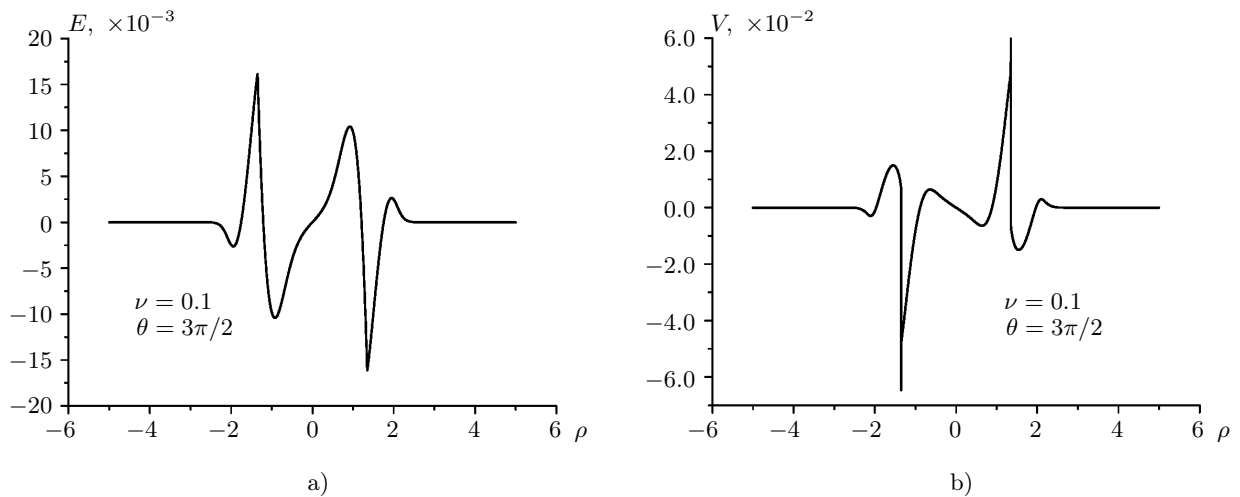


Рис. 3. Пространственные распределения функций для $\nu = 0.1$ в момент времени $\theta = 3\pi/2$:
 а) электрическое поле $E(\rho, \theta)$; б) скорость $V(\rho, \theta)$

Fig. 3. Spatial distributions of functions for $\nu = 0.1$ at time $\theta = 1.5\pi$:
 а) electric field $E(\rho, \theta)$; б) velocity $V(\rho, \theta)$

раза график зависимости визуально не изменяется, зато верхняя граница погрешности уменьшается в два раза. Такая ситуация полностью определяется свойствами неявной схемы Мак-Кормака: точность второго порядка наблюдается для функций скорости V и электрического поля E , а использование численного дифференцирования (10) для плотности N понижает этот порядок на единицу. По этой причине величина $En^d(\theta)$ имеет на гладком решении относительную погрешность порядка $O(h)$.

Совершенно другая картина наблюдается при $\nu = 0.1$. На рис. 2 б ($\nu = 0.1$) относительная погрешность до момента времени $\theta \approx \pi$ подобна константе. Этот этап отражает изменение погрешности в соответствии с порядком точности, как на рис. 2 а, только ее рост малозаметен по причине малых абсолютных значений. Зато на следующем этапе ($\theta > \pi$) наблюдается отклонение от $En^d(0)$, существенно (по порядку!) превышающее погрешность численного решения. Это означает, что изменилась сама структура решения непрерывной задачи: прежняя гладкость уступила место слабым разрывам, которые продолжают перемещаться в пространстве. Обратим внимание, что изменение относительной погрешности величины $En^d(\theta)$ (рис. 2 б) указывает на убывание самой $En^d(\theta)$, что имеет аналогию с убыванием полной энергии

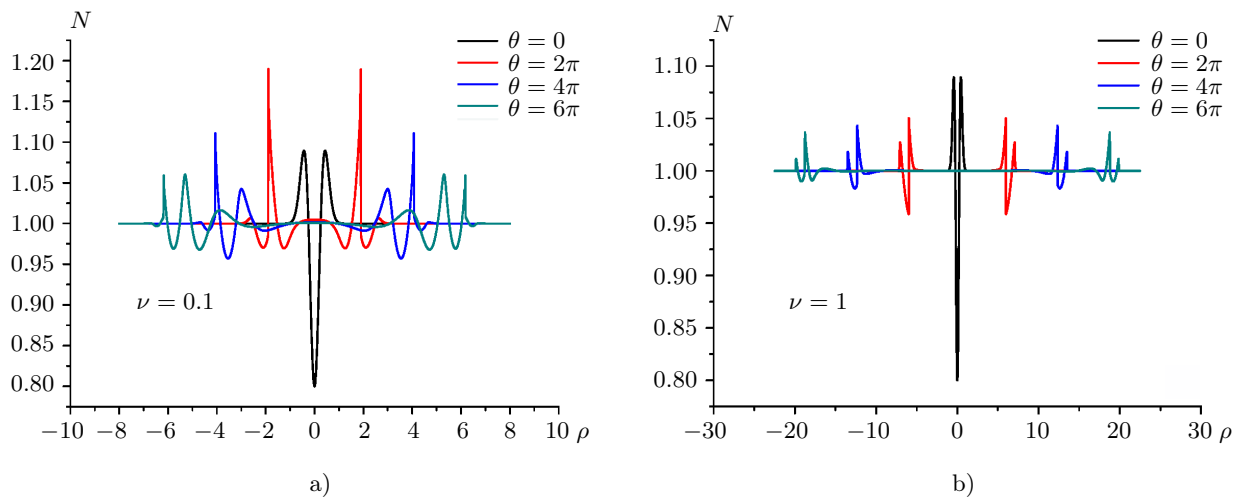


Рис. 4. Распределение плотности электронов $N(\rho, \theta)$ в различные моменты времени ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$):
 а) при $\nu = 0.1$; б) при $\nu = 1$

Fig. 4. Electron density distribution $N(\rho, \theta)$ at different time points ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$):
 a) when $\nu = 0.1$; b) when $\nu = 1$

на разрыве для случая уравнений газовой динамики. Действительно, для иллюстрации формирования и движения разрывов на рис. 3 приведены пространственные распределения функций скорости V и электрического поля E в момент времени $\theta = 3\pi/2$. Легко заметить, что формирование разрыва происходит сначала у скорости, что является прямым следствием слагаемого, описывающего нестандартную вязкость.

Продолжим наблюдение за решением при увеличении коэффициента вязкости ν . На рис. 4 а в удобные для наблюдения моменты времени (прежние, с интервалом 2π) приведены пространственные зависимости плотности, которые имеют сформировавшиеся “пики”, перемещающиеся с заметной скоростью от начала координат. Если сравнивать решение на рис. 4 а с решением на рис. 4 б, можно уловить тенденцию ухудшения гладкости, т.е. процесс формирования разрывных волн, связанный с увеличением коэффициента вязкости ν и отмеченный выше.

Действительно, рис. 4 б иллюстрирует новый тип решения, обусловленный исключительно нестандартной вязкостью при $\nu = 1$. Исходное локальное возмущение, приведенное на рис. 4 а, раздробилось на изолированные солитоноподобные волны, движущиеся с достаточно большими скоростями. Легко видеть, что выбранный пространственный диапазон $[-d, d]$ за 6π безразмерных единиц времени практически полностью оказывается за фронтом волны. При этом уединенные решения являются разрывными, что легко проверяется контрольным пересчетом по явной схеме (при устойчивых сеточных параметрах): каждый разрыв сразу же покрывается набором ложных осцилляций, количество которых увеличивается при уменьшении пространственного шага.

Таким образом, из проведенных вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что увеличение коэффициента нестандартной вязкости приводит к следующим изменениям обычных ленгмюровских плазменных колебаний:

- 1) ухудшается гладкость решения, вплоть до формирования разрывов;
- 2) формируются уединенные бегущие волны солитонного типа;
- 3) увеличивается скорость распространения начальных возмущений.

Для проверки солитонного свойства решения (когда возмущения проходят сквозь друг друга, не взаимодействуя) был проведен следующий численный эксперимент. Рассматривалась пространственная область $[0, d]$, в которой задавалось начальное возмущение вида (6). Учитывая нечетность функций E, V и четность функции N , на границе $x = 0$ задавались однородные граничные условия $E(0, \theta) = V(0, \theta) = 0$. Тогда аналогично полученным выше решениям происходило формирование и распространение волны в направлении увеличения координаты x . Кроме того, из соображений симметрии задавалось подобное начальное возмущение при $x = d$ (функция E бралась со знаком минус) и соответствующие граничные условия, которые приводили к формированию и распространению волны во встречном направлении, т.е.

в направлении уменьшения координаты x . Результат встречного движения возмущений при одинаковых параметрах амплитуд $\alpha = 0.2$ приведен на рис. 5 а. В целях сохранения преемственности с предыдущими расчетами были сохранены моменты времени для наблюдения за решением ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$). Легко заметить полную симметрию (четность!) функции электронной плотности N относительно прямой $x = d/2$, что порождает гипотезу о невяззаимодействии проходящих сквозь друг друга волн, порожденных нестандартной вязкостью. Эта гипотеза находит свое подтверждение, когда навстречу друг другу движутся волны, порожденные начальными возмущениями с существенно различающимися амплитудами (слева $\alpha = 0.4$, справа $\alpha = 0.2$). Этому случаю соответствует рис. 5 б, на котором после встречи возмущений, движущихся навстречу, волны с различными амплитудами не изменяют направлений своего движения. Иными словами, на рис. 5 можно наблюдать типичное поведение решений солитонного типа: имеются структурно устойчивые уединенные волны, распространяющиеся в нелинейной среде; причем ведут они себя подобно частицам, т.е. при взаимодействии друг с другом они не разрушаются, а продолжают движение, сохраняя свою структуру неизменной.

Отметим, что на рис. 1, 2, 4, 5 в качестве иллюстраций приведены изображения наименее гладкой функции — функции электронной плотности, которая вычисляется по формуле (10) в процессе численного решения уравнений (2), (4), но не является их решением. Поэтому определенный интерес представляют сами решения указанных уравнений: функция электрического поля $E(\rho, \theta)$ и скорость $V(\rho, \theta)$. Их вид для случая встречного движения, когда начальные возмущения различны (соответствует электронной плотности на рис. 5 б), приведен на рис. 6. Здесь следует обратить внимание на формирование и движение сильного разрыва функции скорости и слабого разрыва (производной) функции электрического поля. Возможно, это окажется полезным для построения автомодельных решений типа классических бегущих волн, т.е. решений, зависящих только от переменной $\xi = \rho - w\theta$, где w определяет скорость волны. В невязском случае ($\nu = 0$) подобные примеры приведены в [19].

5. Заключение. В работе численно анализируется влияние нестандартной вязкости на нерелятивистские колебания холодной плазмы, возбуждаемые коротким мощным лазерным импульсом. С этой целью построена неявная разностная схема типа Мак-Кормака, имеющая более слабое ограничение на устойчивость, чем явная схема. При этом неявная схема имеет безытерационный характер реализации, что увеличивает ее вычислительную эффективность в десятки раз. Показано, что учет нестандартной вязкости плазмы может быть причиной формирования решений солитонного типа.

Отметим, что представленный алгоритм разработан для нахождения достаточно гладкого решения. С его помощью установлено, что решение может терять гладкость, но в работе мы не претендуем на полностью корректное описание движения разрывов. Действительно, хорошо известно, что разрывное

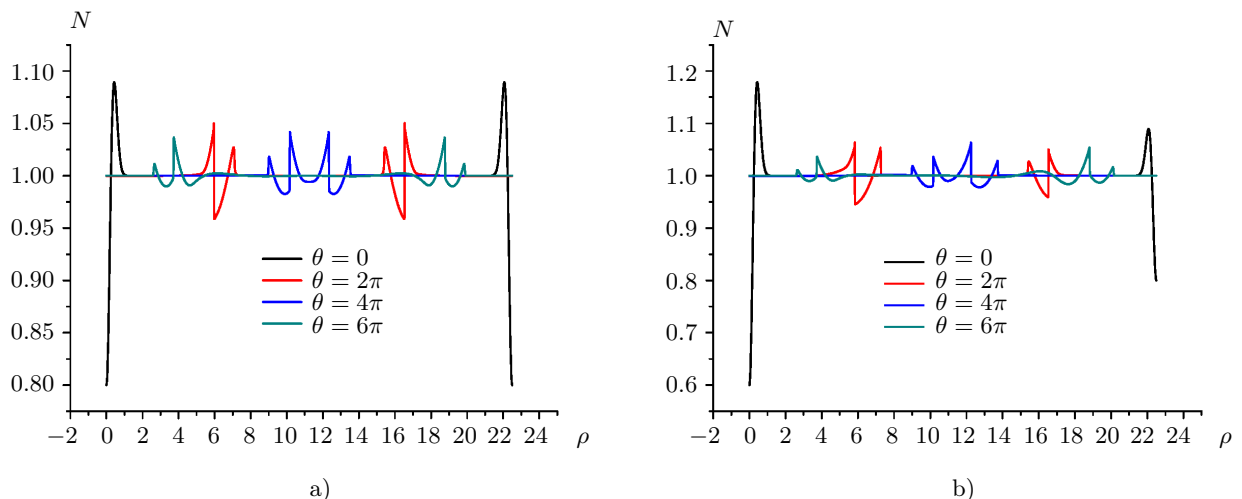


Рис. 5. Распределение плотности электронов $N(\rho, \theta)$ в различные моменты времени ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$) при встречном перемещении возмущений для $\nu = 1$: а) начальные возмущения слева и справа одинаковы $\alpha = 0.2$; б) начальные возмущения различны (слева $\alpha = 0.4$, справа $\alpha = 0.2$)

Fig. 5. Electron density distribution $N(\rho, \theta)$ at different points in time ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$) with the oncoming movement of perturbations for $\nu = 1$: a) the initial perturbations left and right are the same $\alpha = 0.2$; b) the initial perturbations are different (left $\alpha = 0.4$, right $\alpha = 0.2$)

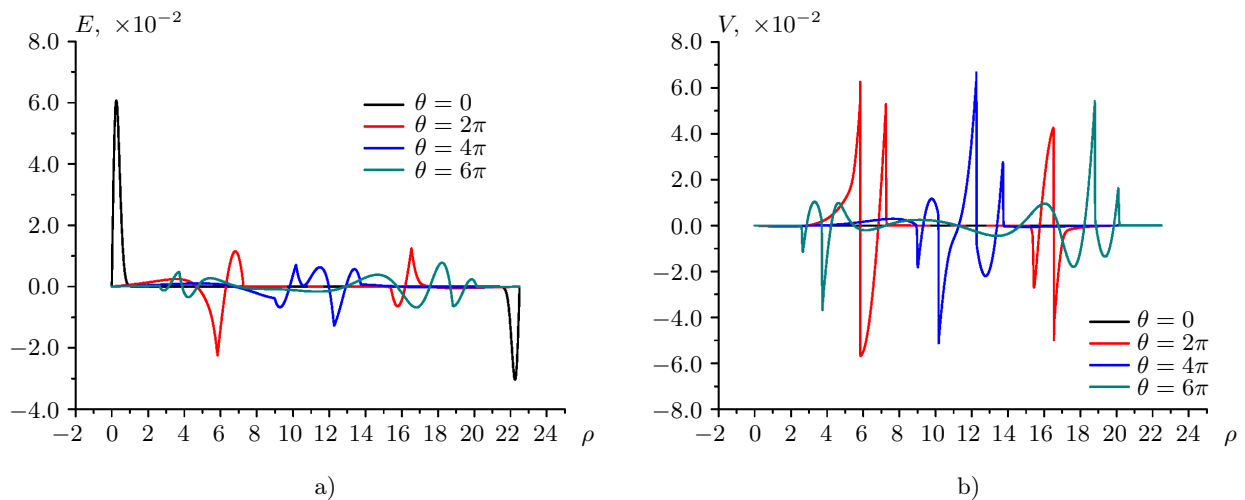


Рис. 6. Распределения функций в различные моменты времени ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$) при встречном перемещении возмущения для $\nu = 1$, когда начальные возмущения различны (слева $\alpha = 0.4$, справа $\alpha = 0.2$):
 а) электрическое поле $E(\rho, \theta)$; б) скорость $V(\rho, \theta)$

Fig. 6. Distributions of functions at different points in time ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$) with oncoming movement of perturbations for $\nu = 1$, when the initial perturbations are different (left $\alpha = 0.4$, right $\alpha = 0.2$):
 a) electric field $E(\rho, \theta)$; b) speed $V(\rho, \theta)$

решение зависит от выбранной консервативной формы системы, причем физически естественная форма выражает сохранение полного заряда и линейного момента. Проверка показывает, что предложенная разностная аппроксимация сохраняет полный заряд, однако линейный момент сохраняется лишь в форме среднего по временному периоду. Это значит, что форма волны после потери решением гладкости в какой-то степени может исказиться и для ее восстановления нужно использовать полностью консервативную схему. Такая работа, необходимая для детального исследования движения сформировавшихся структур, относится к нашим дальнейшим планам.

Результаты работы могут быть распространены на постановки задач большей размерности и учет дополнительных физических факторов в модели плазмы (электрон-ионные соударения, обычная вязкость, внешнее магнитное поле и пр.). Однако, кроме того, они могут быть обобщены на постановки, очень далекие по сути от волновых и колебательных плазменных процессов [27]. В частности, представляет определенный интерес моделирование квазиодномерного кровотока в сосудах, также описываемого нестрогим гиперболической системой уравнений [28, 29]. Представляется правдоподобным, что решения солитонного типа могут внести разнообразие в уже известный набор решений, характеризующих кровотоки.

Список литературы

1. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. 183–285.
2. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
3. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
4. Силлин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
5. Силлин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: ЛИБРОКОМ, 2012.
6. Esarey E., Schroeder C.B., Leemans W.P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**, N 3. 1229–1285. doi 10.1103/RevModPhys.81.1229.
7. Bulanov S.V., Esirkepov T.Zh., Hayashi Y., et al. On some theoretical problems of laser wake-field accelerators // J. Plasma Phys. 2016. **82**, N 3. Article Number 905820308. doi 10.1017/S0022377816000623.
8. Горбунов Л.М. Зачем нужны сверхмощные лазерные импульсы? // Природа. 2007. **21**, № 4. 11–20.
9. Чижонков Е.В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018.

10. *Skorupski A.A., Infeld E.* Nonlinear electron oscillations in a viscous and resistive plasma // *Phys. Rev. E.* 2010. **81**, N 5. Article Number 056406. doi [10.1103/PhysRevE.81.056406](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.056406).
11. *Chizhonkov E.V., Frolov A.A.* Effect of electron temperature on formation of travelling waves in plasma: kinetic and hydrodynamic models // *Rus. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2023. **38**, № 2. 63–74. doi [10.1515/rnam-2023-0006](https://doi.org/10.1515/rnam-2023-0006).
12. *Rozanova O., Chizhonkov E., Delova M.* Exact thresholds in the dynamics of cold plasma with electron–ion collisions // *AIP Conf. Proc.* 2020. **2302**. Article Number 060012. doi [10.1063/5.0033619](https://doi.org/10.1063/5.0033619).
13. *Chizhonkov E.V., Delova M.I., Rozanova O.S.* High precision methods for solving a system of cold plasma equations taking into account electron–ion collisions // *Rus. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2021. **36**, № 3. 139–155. doi [10.1515/rnam-2021-0012](https://doi.org/10.1515/rnam-2021-0012).
14. *Чижонков Е.В.* О численном моделировании колебаний в холодной, но вязкой плазме // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.* 2024. № 4. 32–41. doi [10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-5](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-5).
15. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
16. *MacCormack R.W.* A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // *AIAA J.* 1982. **20**, N 9. 1275–1281.
17. *Davidson R.C.* *Methods in nonlinear plasma theory.* New York: Academic Press, 1972.
18. *Розанова О.С., Чижонков Е.В.* О существовании глобального решения одной гиперболической задачи // *Доклады РАН.* 2020. **492**, № 1. 97–100. doi [10.31857/S2686954320030169](https://doi.org/10.31857/S2686954320030169).
19. *Rozanova O.S., Chizhonkov E.V.* On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP).* 2021. **72**, N 1. Article Number 13. doi [10.1007/s00033-020-01440-3](https://doi.org/10.1007/s00033-020-01440-3).
20. *Розанова О.С., Чижонков Е.В.* Об аналитическом и численном решении одномерных уравнений холодной плазмы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики.* 2021. **61**, № 9. 1508–1527. doi [10.31857/S0044466921090155](https://doi.org/10.31857/S0044466921090155).
21. *Dafermos C.M.* *Hyperbolic conservation laws in continuum physics.* Berlin: Springer, 2016.
22. *Sheppard C.J.R.* Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review [Invited] // *Applied Optics.* 2013. **52**, N 4. 538–545. doi [10.1364/AO.52.000538](https://doi.org/10.1364/AO.52.000538).
23. *Шокин Ю.И., Яценко Н.Н.* *Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике.* Новосибирск: Наука, 1985.
24. *Fürst J., Furmánek P.* An implicit MacCormack scheme for unsteady flow calculations // *Computers & Fluids.* 2011. **46**, N 1. 231–236. doi [10.1016/j.compfluid.2010.09.036](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.036).
25. *Фролов А.А., Чижонков Е.В.* О численном моделировании бегущих ленгмюровских волн в теплой плазме // *Матем. моделирование.* 2023. **35**, № 11. 21–34. doi [10.20948/mm-2023-11-02](https://doi.org/10.20948/mm-2023-11-02).
26. *Фролов А.А., Чижонков Е.В.* О применении закона сохранения энергии в модели холодной плазмы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики.* 2020. **60**, № 3. 503–519. doi [10.31857/S0044466920030096](https://doi.org/10.31857/S0044466920030096).
27. *Rozanova O.* On nonstrictly hyperbolic systems and models of natural sciences reducible to them // *AIP Conference Proceedings.* 2023. **2953**, Article Number 040011. 040011-1–040011-13. doi [10.1063/5.0177487](https://doi.org/10.1063/5.0177487).
28. *Brook B.S., Falle S.A.E.G., Pedley T.J.* Numerical solutions for unsteady gravity-driven flows in collapsible tubes: evolution and roll-wave instability of a steady state // *Journal of Fluid Mechanics.* 1999. **396**. 223–256. doi [10.1017/S0022112099006084](https://doi.org/10.1017/S0022112099006084).
29. *Sherwin S.J., Formaggia L., Peiró J., Franke V.* Computational modelling of 1D blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the human arterial system // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2003. **43**, N 6–7. 673–700. doi [10.1002/flid.543](https://doi.org/10.1002/flid.543).

Поступила в редакцию
18 сентября 2024 г.

Принята к публикации
11 октября 2024 г.

Информация об авторах

Ольга Сергеевна Розанова — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

Евгений Владимирович Чижонков — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.



References

1. S. I. Braginskii, “Transfer Phenomena in Plasma,” in *Problems in the Theory of Plasma* (Gosatomizdat, Moscow, 1963), Vol. 1, pp. 183–285 [in Russian].
2. A. F. Aleksandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1978; Springer, Berlin, 1984).
3. V. L. Ginsburg and A. A. Rukhadze, *Waves in Magnetoactive Plasma* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
4. V. P. Silin, *Introduction to the Kinetic Theory of Gases* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].
5. V. P. Silin and A. A. Rukhadze, *Electromagnetic Properties of Plasma and Plasma-Like Media* (Librokom, Moscow, 2012) [in Russian].
6. E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans, “Physics of Laser-Driven Plasma-Based Electron Accelerators,” *Rev. Mod. Phys.* **81** (3), 1229–1285 (2009). doi [10.1103/RevModPhys.81.1229](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1229).
7. S. V. Bulanov, T. Zh. Esirkepov, Y. Hayashi, et al., “On Some Theoretical Problems of Laser Wake-Field Accelerators,” *J. Plasma Phys.* **82** (3), Article Number 905820308 (2016). doi [10.1017/S0022377816000623](https://doi.org/10.1017/S0022377816000623).
8. L. M. Gorbunov, “Why Do We Need Super-Powerful Laser Pulses?” *Priroda* **21** (4), 11–20 (2007).
9. E. V. Chizhonkov, *Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and Wake Waves in Plasma* (Fizmatlit, Moscow, 2018; CRC Press, Boca Raton, 2019).
10. A. A. Skorupski and E. Infeld, “Nonlinear Electron Oscillations in a Viscous and Resistive Plasma,” *Phys. Rev. E* **81** (5), Article Number 056406 (2010). doi [10.1103/PhysRevE.81.056406](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.056406).
11. E. V. Chizhonkov and A. A. Frolov, “Effect of Electron Temperature on Formation of Travelling Waves in Plasma: Kinetic and Hydrodynamic Models,” *Rus. J. Numer. Anal. Math. Model.* **38** (2), 63–74 (2023). doi [10.1515/rnam-2023-0006](https://doi.org/10.1515/rnam-2023-0006).
12. O. Rozanova, E. Chizhonkov, and M. Delova, “Exact Thresholds in the Dynamics of Cold Plasma with Electron–Ion Collisions,” *AIP Conf. Proc.* **2302**, Article Number 060012 (2020). doi [10.1063/5.0033619](https://doi.org/10.1063/5.0033619).
13. E. V. Chizhonkov, M. I. Delova, and O. S. Rozanova, “High Precision Methods for Solving a System of Cold Plasma Equations Taking into Account Electron–Ion Collisions,” *Rus. J. Numer. Anal. Math. Model.* **36** (3), 139–155 (2021). doi [10.1515/rnam-2021-0012](https://doi.org/10.1515/rnam-2021-0012).
14. E. V. Chizhonkov, “Numerical Modeling of Oscillations in a Cold but Viscous Plasma,” *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. No. 4*, 32–41 (2024) [Moscow Univ. Math. Bull. **79** (4), 182–191 (2024)]. doi [10.3103/S0027132224700244](https://doi.org/10.3103/S0027132224700244).
15. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Y. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
16. R. W. MacCormack, “A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow,” *AIAA J.* **20** (9), 1275–1281 (1982).
17. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic Press, New York, 1972).
18. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “On the Existence of a Global Solution of a Hyperbolic Problem,” *Dokl. Akad. Nauk* **492** (1), 97–100 (2020) [Dokl. Math. **101** (3), 254–256 (2020)]. doi [10.1134/S1064562420030163](https://doi.org/10.1134/S1064562420030163).
19. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “On the Conditions for the Breaking of Oscillations in a Cold Plasma,” *Z. Angew. Math. Phys.* **72** (1), Article Number 13 (2021). doi [10.1007/s00033-020-01440-3](https://doi.org/10.1007/s00033-020-01440-3).
20. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “Analytical and Numerical Solutions of One-Dimensional Cold Plasma Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **61** (9), 1508–1527 (2021) [Comput. Math. Math. Phys. **61** (9), 1485–1503 (2021)]. doi [10.1134/S0965542521090141](https://doi.org/10.1134/S0965542521090141).
21. C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics* (Springer, Berlin, 2016).
22. C. J. R. Sheppard, “Cylindrical Lenses — Focusing and Imaging: A Review [Invited],” *Appl. Opt.* **52** (4), 538–545 (2013). doi [10.1364/AO.52.000538](https://doi.org/10.1364/AO.52.000538).
23. Yu. I. Shokin and N. N. Yanenko, *The Method of Differential Approximation. Application to Gas Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1985) [in Russian].
24. J. Fürst and P. Furmánek, “An Implicit MacCormack Scheme for Unsteady Flow Calculations,” *Comput. Fluids* **46** (1), 231–236 (2011). doi [10.1016/j.compfluid.2010.09.036](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.036).
25. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “On the Numerical Simulation of Traveling Langmuir Waves in Warm Plasma,” *Mat. Model.* **35** (11), 21–34 (2023) [Math. Models Comput. Simul. **16** (2), 169–176 (2024)]. doi [10.1134/S207004822402008X](https://doi.org/10.1134/S207004822402008X).

26. A. A. Frolov and E. V. Chizhonkov, “Application of the Energy Conservation Law in the Cold Plasma Model,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **60** (3), 503–519 (2020) [*Comput. Math. Math. Phys.* **60** (3), 498–513 (2020)]. doi [10.1134/S0965542520030094](https://doi.org/10.1134/S0965542520030094).
27. O. Rozanova, “On Nonstrictly Hyperbolic Systems and Models of Natural Sciences Reducible to Them,” *AIP Conf. Proc.* **2953**, Article Number 040011, 040011-1–040011-13 (2023). doi [10.1063/5.0177487](https://doi.org/10.1063/5.0177487).
28. B. S. Brook, S. A. E. G. Falle, and T. J. Pedley, “Numerical Solutions for Unsteady Gravity-Driven Flows in Collapsible Tubes: Evolution and Roll-Wave Instability of a Steady State,” *J. Fluid Mech.* **396**, 223–256 (1999). doi [10.1017/S0022112099006084](https://doi.org/10.1017/S0022112099006084).
29. S. J. Sherwin, L. Formaggia, J. Peiró, and V. Franke, “Computational Modelling of 1D Blood Flow with Variable Mechanical Properties and Its Application to the Simulation of Wave Propagation in the Human Arterial System,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **43** (6–7), 673–700 (2003). doi [10.1002/flid.543](https://doi.org/10.1002/flid.543).

Received
September 18, 2024

Accepted for publication
October 11, 2024

Information about the authors

Olga S. Rozanova — Dr. Sci, Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

Evgenii V. Chizhonkov — Dr. Sci, Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.