



doi 10.26089/NumMet.2024s01

УДК 535.4;
517.984.54

Обратная задача Штурма–Лиувилля и ее приложения к обратным задачам оптики слоистых покрытий

А. В. Тихонравов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский вычислительный центр, Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-7773-7068, e-mail: tikh@srcc.msu.ru

А. А. Шкаликов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-9138-6628, e-mail: ashkalikov@yahoo.com

Аннотация: Показано значение результатов общей теории обратной задачи Штурма–Лиувилля для развития теории и численных методов решения обратных задач оптики слоистых покрытий. Дается краткий обзор наиболее эффективных методов проектирования оптических покрытий. Показывается, что с помощью развитых методов могут быть рассчитаны наиболее востребованные на практике типы покрытий с большим числом оптимизируемых параметров, а уникальные спектральные свойства этих покрытий достигаются на основе построенной теории.

Ключевые слова: обратные задачи, задача Штурма–Лиувилля, операторы преобразования, слоистые покрытия, спектральные характеристики.

Благодарности: Работа была поддержана Междисциплинарной научно-образовательной школой Московского университета “Математический анализ сложных систем”, проект 23–Ш05–23 “Прямые и обратные спектральные задачи в математической физике”.

Для цитирования: Тихонравов А.В., Шкаликов А.А. Обратная задача Штурма–Лиувилля и ее приложения к обратным задачам оптики слоистых покрытий // Вычислительные методы и программирование. 2024. Специальный выпуск. 1–10. doi 10.26089/NumMet.2024s01.

Inverse Sturm–Liouville Problem and its application to inverse problems in thin film optics

Alexander V. Tikhonravov

Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0001-7773-7068, e-mail: tikh@srcc.msu.ru

Andrey A. Shkalikov

Lomonosov Moscow State University,

Mechanics and Mathematics Department, Moscow, Russia

ORCID: 0000-0002-9138-6628, e-mail: ashkalikov@yahoo.com

Abstract: The application of the results of the inverse Sturm–Liouville problem for the development of the theory and numerical methods for solving inverse problems in thin film optics is shown. A brief overview of the most effective methods for designing optical coatings is given. It is shown that with the help of developed methods the most demanding types of coatings with a large number of optimized parameters can be designed. The unique spectral properties of these coatings are achieved on the basis of the developed theory.

Keywords: inverse problems, Sturm–Liouville problem, transformation operators, optical coatings, spectral characteristics.

Acknowledgements: The work was supported by the Interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University “Mathematical Analysis of Complex Systems”, project 23–Ш05–23 “Direct and Inverse Spectral Problems in Mathematical Physics”.

For citation: A. V. Tikhonravov, A. A. Shkalikov, “Inverse Sturm–Liouville Problem and its application to inverse problems in thin film optics,” Numerical Methods and Programming. 2024. Special Issue. 1–10. doi 10.26089/NumMet.2024s01.

1. Введение. Исследование обратных задач для оператора Штурма–Лиувилля берет свое начало от работы В. А. Амбарцумяна [1]. Важнейшую роль в развитии теории этих задач имела последовавшая почти через двадцать лет фундаментальная работа Й. Борга [2], в которой была доказана теорема единственности восстановления потенциала по двум спектрам. В. А. Марченко впервые использовал для исследования данного класса обратных задач операторы преобразования [3, 4] и доказал единственность решения обратной задачи восстановления потенциала по спектральной функции для различных ее постановок, включая задачу Борга [5]. В работе [6] А. Н. Тихонов доказал свою знаменитую теорему единственности решения обратной задачи электропроводимости. Огромную роль в дальнейшем развитии теории сыграли работы И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана, М. Г. Крейна, Л. Д. Фаддеева и ряда других.

Одним из наиболее крупных достижений математики 20-го столетия явилось открытие возможности интегрирования нелинейных уравнений Кортевега–де Фриза, Бусинеска, уравнения \sin -Gordon, нелинейного уравнения Шредингера и др. методами теории обратных задач. Работа К. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала и Р. Миуры [7] инициировала большой поток исследований по решениям нелинейных уравнений методами теории обратных задач для уравнения Штурма–Лиувилля или Шредингера. Обсуждение истории развития теоретических работ в этой области и изложение теории с доказательствами можно найти в книгах В. А. Марченко [5], Б. М. Левитана [8], В. А. Юрко [9], В. В. Кравченко [10]. Полезную дополнительную информацию можно найти в статье А. М. Савчука и А. А. Шкаликова [11]. Отметим, что в монографии Кравченко предложены эффективные численные методы решения классических обратных задач, а последняя глава монографии Юрко посвящена различным приложениям теории обратных задач Штурма–Лиувилля к уравнениям математической физики и, в частности, к конкретным задачам теории упругости и гидродинамики.

В настоящей работе мы рассматриваем еще одно направление приложения результатов общей теории обратных задач Штурма–Лиувилля, которое имеет важное значение для развития современных оптических и оптоэлектронных технологий.



2. Сведение обратных задач оптики слоистых покрытий к обратной задаче Штурма–Ливилля. Оптическое слоистое покрытие [12] представляет собой среду, стратифицированную в одном пространственном направлении z и однородную по двум другим направлениям. По оси z эта среда ограничена областью $[0, z_a]$, по осям x, y она считается неограниченной. В области $z < 0$ расположена однородная неограниченная среда, называемая подложкой. Среда в области $z > z_a$, называемая внешней средой, также однородна и не ограничена. Из нее на слоистое покрытие падает электромагнитная волна, которая частично отражается назад во внешнюю среду и частично проходит в подложку. Распространение этой волны описывается уравнениями Максвелла.

Мы выпишем уравнения Максвелла для простейшего случая, когда электромагнитная волна распространяется вдоль оси z . Будем рассматривать диэлектрические среды, свойства которых полностью описываются диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z)$. Во внешней среде и подложке диэлектрические проницаемости постоянны. Они обозначаются ε_a и ε_s соответственно.

При решении прямых и обратных задач оптики слоистых покрытий принято раскладывать электромагнитное поле по монохроматическим волнам с круговой частотой ω . При этом электрические и магнитные составляющие поля могут быть записаны в виде

$$E(z) \exp^{i\omega t}, \quad H(z) \exp^{i\omega t},$$

где $E(z)$ и $H(z)$ — скалярные функции, представляющие собой тангенциальные составляющие поля в плоскости (x, y) .

Уравнения Максвелла в рассматриваемом простейшем случае сводятся к скалярным уравнениям

$$\frac{dE}{dz} = ikH, \quad \frac{dH}{dz} = ik\varepsilon(z)E, \quad (1)$$

где введен спектральный параметр k (волновое число), выражающийся через круговую частоту ω следующим образом:

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

Здесь c — скорость распространения света.

В дальнейшем мы будем рассматривать спектральный параметр в комплексной области. Сразу же отметим, что поскольку в оптике λ используется для обозначения длины волны, мы будем записывать спектральный параметр в виде

$$\nu = k + i\sigma.$$

В качестве основной характеристики оптического покрытия удобно рассматривать зависимость ее показателя преломления от координаты z — функцию $n(z)$. Показатель преломления связан с диэлектрической проницаемостью формулой

$$n^2(z) = \varepsilon(z).$$

Для внешней среды и подложки аналогичным образом вводятся их показатели преломления n_a и n_s .

Введем переменную x , связанную с координатой z соотношением

$$x = \int_0^z n(z) dz.$$

Эта переменная называется оптической толщиной покрытия.

Вместо электрической и магнитной компонент поля введем следующие две функции:

$$u_1(x) = E(x) \left[\frac{n(x)}{n_s} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad u_2(x) = H(x) / \left[\frac{n(x)}{n_s} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для этих функций из (1) получим уравнения

$$\frac{d^2 u_{1,2}}{dx^2} - q_{1,2}(x) u_{1,2} + k^2 u_{1,2} = 0, \quad (2)$$

где “потенциалы” выражаются через зависимость показателя преломления от оптической толщины следующим образом:

$$q_1(x) = -\frac{1}{4} \left[\frac{n'(x)}{n(x)} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{n''(x)}{n(x)}, \quad q_2(x) = \frac{3}{4} \left[\frac{n'(x)}{n(x)} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{n''(x)}{n(x)}. \quad (3)$$

Основными спектральными характеристиками слоистого покрытия являются амплитудные коэффициенты пропускания и отражения t и r , определяемые, соответственно, как отношение амплитуды проходящей волны в подложке к амплитуде падающей из внешней среды волны и отношение амплитуд отраженной и падающей волн во внешней среде.

Можно показать [13], что амплитудные коэффициенты выражаются через решения задач Коши для уравнений (2) с граничными условиями, заданными на границе слоистого покрытия с подложкой:

$$u_1(0, k) = 1, \quad u_1'(0, k) = -ik, \quad u_2(0, k) = -1, \quad u_2'(0, k) = ik. \quad (4)$$

Выражения для амплитудных коэффициентов пропускания и отражения имеют следующий вид:

$$t(k) = \frac{2}{u_1(x_a, k) - u_2(x_a, k)}, \quad r(k) = \frac{u_1(x_a, k) + u_2(x_a, k)}{u_1(x_a, k) - u_2(x_a, k)}. \quad (5)$$

Величина x_a в этих выражениях связана с толщиной покрытия z_a формулой

$$x_a = \int_0^{z_a} n(z) dz. \quad (6)$$

Она называется полной оптической толщиной покрытия и, как будет показано в следующем разделе, играет важнейшую роль при решении обратных задач проектирования оптических покрытий.

Таким образом, решение прямой задачи определения амплитудных коэффициентов пропускания и отражения слоистого покрытия сводится к решению двух специфических задач Коши для уравнений (2) на конечном отрезке $[0, x_a]$. При этом в граничные условия (4) этих задач входит спектральный параметр k .

Перейдем к рассмотрению связи обратных задач оптики слоистых покрытий с обратной задачей Штурма–Лиувилля. Эта связь устанавливается по стандартной схеме.

В предположении, что $n(x)$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция, введем операторы преобразования

$$u_1(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-x}^x K_1(x, t) e^{-ikt} dt, \quad u_2(x, k) = -e^{-ikx} + \int_{-x}^x K_2(x, t) e^{-ikt} dt.$$

Ядра операторов преобразования удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 K_{1,2}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K_{1,2}}{\partial t^2} - q_{1,2}(x) K_{1,2} = 0$$

с начальными условиями

$$K_{1,2}(x, -x) = 0, \quad K_{1,2}(x, x) = \int_0^x q_{1,2}(x) dx. \quad (7)$$

При этом ядро оператора преобразования $K_1(x, t)$ удовлетворяет уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко:

$$F(x+y) + K_1(x, y) + \int_{-x}^x K_1(x, t) F(t+y) dt = 0, \quad (8)$$

где $F(t)$ — образ Фурье функции

$$S(k) = e^{2ikx_a} - \frac{u_1(x_a, -k)}{u_1(x_a, k)}. \quad (9)$$

Аналогичные уравнения можно записать и для ядра $K_2(x, t)$.



Общая схема решения обратных задач оптики слоистых покрытий с использованием уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко могла бы выглядеть так. Задавая амплитудные коэффициенты пропускания и отражения, из выражений (5) находим функцию $u_1(x_a, k)$. С ее помощью строим функцию (9) и находим ее фурье-образ $F(t)$. Далее, решая уравнение (8), получаем $K_1(x, t)$. Затем дифференцированием (7) находим $q_1(x)$. Первое из уравнений в (3) связывает распределение показателя преломления в слоистом покрытии $n(x)$ с этой функцией. Тем самым, решая первое уравнение в (3) относительно $n(x)$, мы получаем решение обратной задачи восстановления $n(x)$ по заданным $t(k)$ и $r(k)$.

Возможность численной реализации описанной схемы обсуждается в следующем разделе работы. Там же рассматриваются наиболее важные следствия из построенной теории для наиболее важного класса обратных задач оптики слоистых покрытий — задач проектирования данных покрытий.

3. Задачи проектирования оптических покрытий. Рассматриваемые в этом разделе задачи представляют наибольший интерес для развития современных оптических и оптоэлектронных технологий. Речь идет об обратных задачах проектирования оптических покрытий с заданными спектральными свойствами в требуемом спектральном диапазоне длин волн или, что эквивалентно, в требуемом диапазоне волновых чисел $[k_1, k_2]$. Наиболее часто в данном диапазоне задаются целевые зависимости энергетических коэффициентов пропускания T или отражения R , которые связаны с амплитудными коэффициентами равенствами

$$T = \frac{n_s}{n_a} |t|^2, \quad R = |r|^2.$$

Сразу же отметим, что задаваемые целевые функции $T(k)$ и $R(k)$, как правило, неаналитические: они имеют разрывы, области постоянных значений и т.д. Таким образом, задача построения функции $n(z)$ по любой из таких функций неразрешима: реализуемые зависимости спектральных коэффициентов должны быть аналитическими функциями. Отсюда следует, что вопрос о разрешимости обратной задачи проектирования можно ставить только в плане аппроксимационной разрешимости этой задачи. Соответственно и любой численный метод решения этой задачи также будет аппроксимировать заданные целевые функции.

Далее будем считать, что в спектральной области $[k_1, k_2]$ задана целевая функция $T(k)$, которая является кусочно-непрерывной и удовлетворяет очевидному энергетическому соотношению

$$0 \leq T(k) \leq 1. \tag{10}$$

Для диэлектрической среды коэффициент пропускания не может быть отрицательным и не может превосходить единицы.

Прежде чем обсуждать вопрос о численной реализации той или иной схемы решения обратной задачи, следует обсудить вопрос о принципиальной разрешимости этой задачи. Ответ на этот вопрос был получен в работе [13] на основе изложенной в предыдущем разделе схемы редукции рассматриваемой задачи к обратной задаче Штурма–Лиувилля.

Для формулировки одной из полученных теорем разрешимости нам необходимо перейти к рассмотрению амплитудного коэффициента отражения в комплексной плоскости спектрального параметра

$$\nu = k + i\sigma.$$

Теорема. Пусть $r(\nu)$ — мероморфная функция, для которой выполняются следующие условия:

- 1) $r(\nu)$ не имеет полюсов в области $\sigma \leq 0$,
- 2) $r(-\nu^*) = r(\nu)$,
- 3) $|r(\nu)| < 1$,
- 4) $r(k) = o(1/k^2)$, $k \rightarrow \infty$,
- 5) $[1 + r(\nu)][1 + r(-\nu)] / [1 + r(\nu)r(-\nu)]$ — целая функция конечной степени,

тогда существует слоистое покрытие с вещественным показателем преломления $n(x) > 0$, коэффициент отражения которого $r(\nu)$.

В условиях этой теоремы следует отметить, пожалуй, наиболее непривычное условие 5. Оно обеспечивает конечность толщины слоистого покрытия x_a . Эта толщина оказывается равной $1/2$ степени целой функции в условии 5.

На основе сформулированной теоремы решается вопрос и об аппроксимационной разрешимости обратной задачи проектирования по заданной в области $[k_1, k_2]$ функции $T(k)$, удовлетворяющей условию (10).

Доказывается, что если $T(k)$ — непрерывная функция, то она может быть аппроксимирована с любой наперед заданной точностью в метрике C ; если $T(k)$ кусочно-непрерывна, то такое же утверждение справедливо в метрике L_2 .

Перейдем теперь к вопросу о возможности построения численного метода решения обратной задачи проектирования на основе описанной в конце предыдущего раздела схемы. К сожалению, на пути ее построения оказываются слишком серьезные трудности. Они видны уже из условий приведенной выше теоремы. Ясно, что построение по заданной функции $T(k)$ амплитудного коэффициента отражения $r(\nu)$, удовлетворяющего условиям теоремы 1–5, — весьма непростая задача. И это не единственная проблема. Даже если нам удастся построить требуемую функцию и найти потенциал $q_1(x)$, а за ним и функцию $n(x)$, то это вовсе не означает, что мы сможем использовать полученное решение на практике. Дело в том, что на показатель преломления слоистого покрытия накладываются очень жесткие условия его практической реализуемости

$$n_L \leq n(x) \leq n_H,$$

которые не учитываются в обсуждаемой схеме решения.

Для численного решения обратной задачи проектирования оптических покрытий был предложен специальный оптимизационный метод, названный методом игольчатых вариаций [12]. Этот метод рассматривает кусочно-постоянные зависимости показателя преломления $n(x)$, т.е. с практической точки зрения — оптические покрытия, состоящие из конечной последовательности однородных слоев с постоянными показателями преломления. Пусть m — число слоев такого покрытия. Для оценки качества решения обратной задачи проектирования вводится функционал качества F , оценивающий близость коэффициента пропускания покрытия к требуемой целевой характеристике в заданном спектральном диапазоне. В простейшем случае показатели преломления слоев заданы и введенный функционал зависит только от толщин слоев покрытия.

Традиционные методы решения обратной задачи проектирования оптических покрытий основывались на минимизации функционала качества по толщинам слоев в конечномерном пространстве заданной размерности m . Тем самым число слоев покрытия задавалось из некоторых соображений априорно. К сожалению, вводимые для решения обратной задачи функционалы качества являются многоэкстремальными и поиск “достаточно глубокого локального минимума” функционала уже при числе слоев больше 10–15 оказывается практически неразрешимой задачей при использовании всего современного арсенала методов оптимизации в конечномерных пространствах.

В отличие от обычных методов оптимизации метод игольчатых вариаций не фиксирует число слоев покрытия, т.е. размерность пространства, в котором ищется решение задачи проектирования. Он основывается на последовательности чередующихся локальных оптимизаций в пространствах с фиксированным m и последовательности игольчатых вариаций показателя преломления, которые переводят оптимизацию в пространство другой, большей размерности. Предложенный метод оказался чрезвычайно эффективным и произвел своего рода революцию в проектировании оптических покрытий.

В целом метод игольчатых вариаций соответствовал существовавшей парадигме решения задач проектирования слоистых покрытий. Было общепризнано, что для достижения более высокого уровня аппроксимации требуемых целевых характеристик следует использовать покрытия с большим числом слоев. Но в отличие от использовавшихся ранее оптимизационных методов, новый метод позволил конструировать покрытия с многими десятками и сотнями оптимизируемых параметров.

Следующий важнейший шаг в развитии современных численных методов проектирования оптических покрытий был сделан на основе результатов, изложенных в предыдущем разделе. Из выражений (5) для амплитудных коэффициентов пропускания и отражения и представления входящих в правые части (5) функций с помощью операторов преобразования следует, что $1/t(k)$ и $r(k)/t(k)$ — целые функции конечной степени x_a , где x_a — полная оптическая толщина покрытия.

Таким образом, энергетические коэффициенты пропускания и отражения, аппроксимирующие заданные целевые характеристики на спектральном отрезке $[k_1, k_2]$, являются аналитическими функциями, а аналитическое продолжение отношения $R(k)/T(k)$ в комплексную плоскость спектрального параметра ν является целой функцией конечной степени $2x_a$, где x_a — полная оптическая толщина покрытия, задаваемая формулой (6). Для такой функции из теоремы Пэли–Винера следует, что ее преобразование Фурье имеет ограниченный носитель:

$$\frac{R(k)}{T(k)} = \int_{-2x_a}^{2x_a} F(t) e^{ikt} dt.$$



Данное представление показывает, что для получения требуемых спектральных свойств покрытия важнейшее значение имеет его полная оптическая толщина. Если величина $2x_a$ мала, то стоящее слева отношение не имеет высокочастотных гармоник и, значит, слоистое покрытие с такой толщиной не может иметь спектральные коэффициенты, хорошо аппроксимирующие целевые характеристики с резко изменяющимися значениями. А покрытия с подобными требованиями на целевые характеристики важны для большинства современных приложений.

Осознание особой значимости полной оптической толщины покрытия привело к разработке наиболее мощного современного метода численной оптимизации покрытий — метода последовательной эволюции [14]. Это специфический немонотонный метод оптимизации, в который метод игольчатых вариаций входит как внутренний оптимизационный цикл. После окончания работы этого цикла происходит увеличение полной оптической толщины покрытия, приводящее к росту функционала качества. Однако следующий за этим новый цикл игольчатой оптимизации приводит не только к полной компенсации этого роста, но и к дальнейшему уменьшению оптимизируемого функционала.

Уникальные возможности метода последовательной эволюции демонстрирует рассмотренный ниже пример проектирования так называемого отрицательного фильтра. В отличие от широко распространенных узкополосных пропускающих фильтров, имеющих узкую полосу пропускания на фоне широкой спектральной области отражения, отрицательные фильтры должны иметь узкую полосу отражения и широкие спектральные области пропускания слева и справа от нее. При этом переходы между областями высокого и низкого отражения должны быть предельно узкими, а остаточное пропускание в зоне высокого отражения должно быть менее одной десятитысячной процента от энергии падающего излучения.

Проектирование подобных фильтров оказывается намного более сложной задачей, чем проектирование узкополосных пропускающих фильтров. Рис. 1, 2 наглядно демонстрируют, насколько важную роль для получения отрицательных фильтров с уникальными спектральными свойствами играет полная оптическая толщина покрытия. На этих рисунках N обозначает число слоев покрытия, а Th — его общую оптическую толщину. Представленные на рис. 1, 2 спектральные коэффициенты пропускания соответствуют так называемым двухкомпонентным оптическим покрытиям, состоящим из слоев с чередующимися показателями преломления 2.35 и 1.46. Покрытия нанесены на стеклянную подложку с показателем преломления 1.52. Целевые требования на спектральный коэффициент пропускания состоят в следующем: в областях длин волн от 400 до 575 нм и от 625 до 700 нм пропускание должно быть выше 99%, а в области высокого отражения от 580 до 620 нм пропускание не должно превышать одной десятитысячной процента.

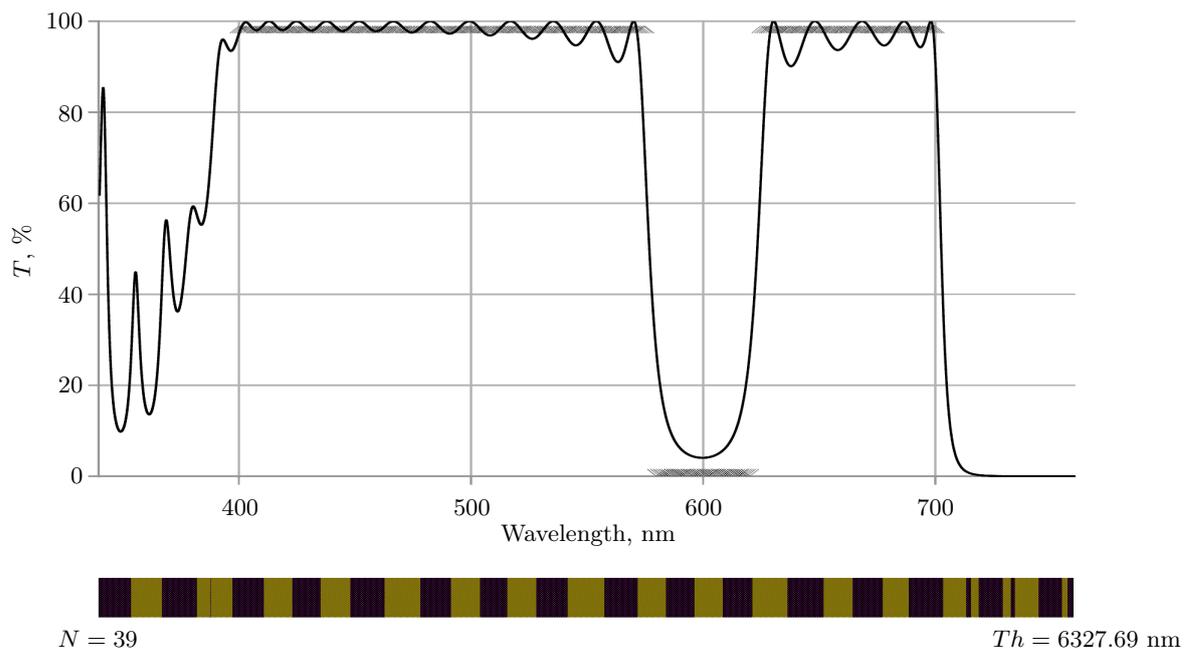


Рис. 1. Коэффициент пропускания отрицательного фильтра с оптической толщиной 6328 нм

Fig. 1. Transmittance of a minus filter with an optical thickness of 6328 nm

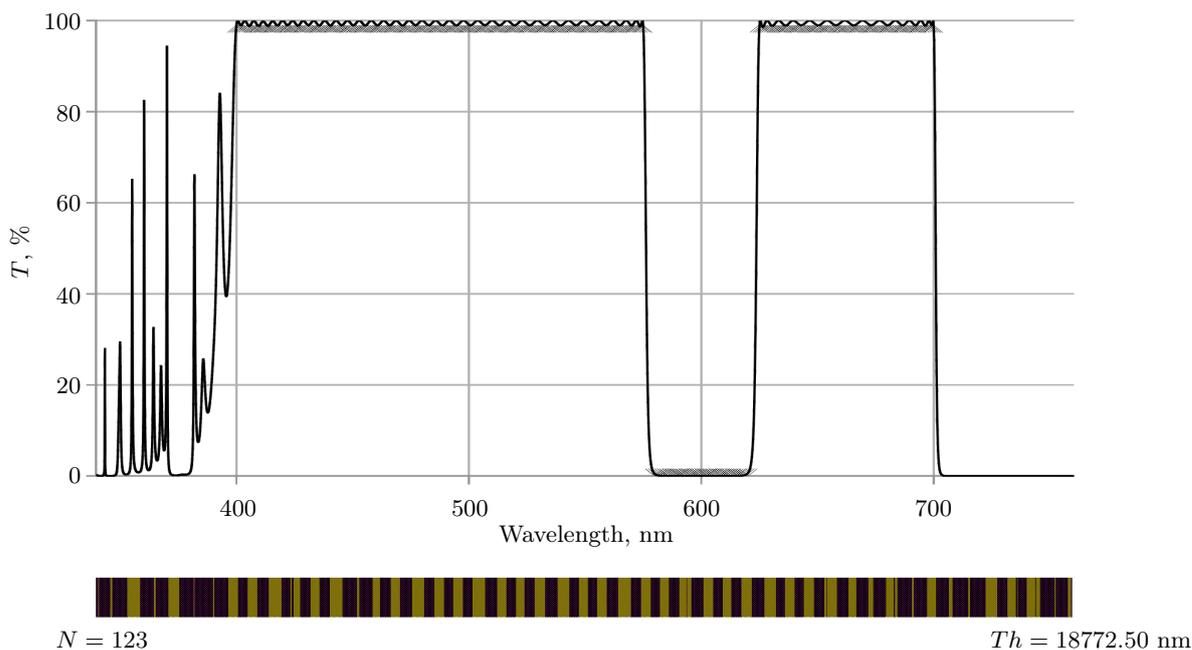


Рис. 2. Коэффициент пропускания отрицательного фильтра с оптической толщиной 18772 нм

Fig. 2. Transmittance of a minus filter with an optical thickness of 18772 nm

Фильтр со спектральным коэффициентом, представленным на рис. 1, имеет полную оптическую толщину 6328 нм, что оказывается явно недостаточным для достижения требуемых спектральных свойств покрытия. Спектральная характеристика на рис. 2 соответствует фильтру с оптической толщиной 18772 нм. Она полностью удовлетворяет сформулированным требованиям. Следует отметить, что фильтры с такими уникальными спектральными свойствами оказались крайне востребованными в последние годы. Покрытие с характеристикой, показанной на рис. 2, имеет в своем составе более сотни слоев. Расчет данного покрытия с числом оптимизируемых параметров больше сотни мог быть осуществлен только описанными в настоящем разделе методами.

4. Заключение. В представленной работе в компактной форме описана связь обратных задач оптики слоистых покрытий с обратной задачей Штурма–Лиувилля. Дан обзор наиболее значимых для теории и практики результатов, получаемых с использованием общей теории решения обратной задачи Штурма–Лиувилля. Показано, что получаемые на основе этой теории результаты имеют определяющее значение для решения наиболее сложных задач проектирования слоистых покрытий.

Список литературы

1. Ambarzumian V. Über eine Frage der Eigenwerttheorie // Z. Physik. 1929. **53**, N 9–10. 690–695. doi 10.1007/BF01330827.
2. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe: Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. 1946. **78**. 1–96. doi 10.1007/BF02421600.
3. Марченко В.А. Некоторые задачи в теории дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1950. **72**. 457–460.
4. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка // Труды ММО. 1952. **1**. 327–420.
5. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977.
6. Тихонов А.Н. О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН СССР. 1949. **69**. 797–800.
7. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg–deVries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. **19**, N 19. 1095–1097. doi 10.1103/PhysRevLett.19.1095.



8. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
9. Юрко В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Саратов. пед. ин-та, 2001.
10. Kravchenko V. V. Direct and inverse Sturm–Liouville problems. Method of solution. Cham: Birkhäuser, 2020. doi 10.1007/978-3-030-47849-0.
11. Савчук А.М., Шкаликков А.А. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функциональный анализ и его приложения. 2010. **44**, N 4. 34–53. doi 10.4213/faa3022.
12. Tikhonravov A. Optical coatings: design, characterization, monitoring. Bellingham: SPIE Press, 2024.
13. Тихонравов А.В. Синтез слоистых сред с заданными амплитудно-фазовыми свойствами // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 1985. **25**, № 11. 1674–1688.
14. Tikhonravov A. V., Trubetskov M. K. Modern design tools and a new paradigm in optical coating design // Applied Optics. 2012. **51**, N 30. 7319–7332. doi 10.1364/AO.51.007319.

Поступила в редакцию
 29 сентября 2024 г.

Принята к публикации
 4 ноября 2024 г.

Информация об авторах

Александр Владимирович Тихонравов — д.ф.-м.н., проф., заведующий лабораторией; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, ул. Колмогорова, 1, стр. 4, 119234, Москва, Российская Федерация.

Андрей Андреевич Шкаликков — д.ф.-м.н., проф., чл.-корр. РАН; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, ул. Колмогорова, 1, 119234, Москва, Российская Федерация.

References

1. V. Ambarzumian, “Über eine Frage der Eigenwerttheorie,” Z. Physik **53** (9–10), 690–695 (1929). doi 10.1007/BF01330827.
2. G. Borg, “Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe: Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte,” Acta Math. **78**, 1–96 (1946). doi 10.1007/BF02421600.
3. V. A. Marchenko, “Some Problems in the Theory of Second-Order Differential Operators,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **72**, 457–460 (1950).
4. V. A. Marchenko, “Some Questions of the Theory of One-Dimensional Linear Differential Operators of the Second Order,” Tr. Mosk. Mat. Obs. **1**, 327–420 (1952).
5. V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville Operators and Their Applications* (Naukova Dumka, Kiev, 1977) [in Russian].
6. A. N. Tikhonov, “On the Uniqueness of the Solution of the Problem of Electric Prospecting,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **69**, 797–800 (1949).
7. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, “Method for Solving the Korteweg–deVries Equation,” Phys. Rev. Lett. **19** (19), 1095–1097 (1967). doi 10.1103/PhysRevLett.19.1095.
8. B. M. Levitan, *Inverse Sturm–Liouville Problems* (Nauka, Moscow, 1984; VSP Verlag, Zeist, 1987).
9. V. A. Yurko, *Inverse Spectral Problems and Their Applications* (Saratov Pedagog. Inst., Saratov, 2001) [in Russian].
10. V. V. Kravchenko, *Direct and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution* (Birkhäuser, Cham, 2020). doi 10.1007/978-3-030-47849-0.
11. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “Inverse Problems for Sturm–Liouville Operators with Potentials in Sobolev Spaces: Uniform Stability,” Funkts. Anal. Prilozh. **44** (4), 34–53 (2010) [Funct. Anal. Its Appl. **44** (4), 270–285 (2010)]. doi 10.1007/s10688-010-0038-6.
12. A. Tikhonravov, *Optical Coatings: Design, Characterization, Monitoring* (SPIE Press, Bellingham, United States, 2024).

13. A. V. Tikhonravov, “The Synthesis of Laminar Media with Specified Amplitude and Phase Properties,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **25** (11), 1674–1688 (1985) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **25** (6), 55–64 (1985)]. doi [10.1016/0041-5553\(85\)90009-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(85)90009-6).
14. A. V. Tikhonravov and M. K. Trubetskov, “Modern Design Tools and a New Paradigm in Optical Coating Design,” *Appl. Opt.* **51** (30), 7319–7332 (2012). doi [10.1364/AO.51.007319](https://doi.org/10.1364/AO.51.007319).

Received
September 29, 2024

Accepted for publication
November 4, 2024

Information about the authors

Alexander V. Tikhonravov — Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory; Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Kolmogorova ulitsa, 1, building 4, 119234, Moscow, Russia.

Andrey A. Shkalikov — Dr. Sci., Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences; Lomonosov Moscow State University, Mechanics and Mathematics Department, Kolmogorova ulitsa, 1, 119234, Moscow, Russia.