doi 10.26089/NumMet.2024s07

УДК 004.942;
001.83;
001.892

Вычислительные алгоритмы и прикладное математическое обеспечение для систем высокой и сверхвысокой производительности. Образовательный аспект

Б. Н. Четверушкин
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-1216-5438, e-mail: chtver@imamod.ru

М. В. Якобовский
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-9498-1457, e-mail: lira@imamod.ru

Аннотация: Рассматриваются алгоритмы и методы численного моделирования на высокопроизводительных вычислительных системах массового параллелизма, обеспечивающие эффективное использование процессоров общего назначения и графических ускорителей. На примере взаимодействия ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова и ИПМ имени М. В. Келдыша РАН подчеркивается высокая роль подготовки кадров для развития суперкомпьютерных технологий и решения с их помощью сложных фундаментальных и прикладных задач. Обсуждаются возможности решения на основе фундаментальных исследований таких разноплановых задач, как сокращение объема вычислений при изучении задач механики сплошной среды и обеспечение возможности выполнения отказоустойчивых расчетов. Отмечается необходимость сохранения и усиления подготовки высококвалифицированных кадров, обладающих фундаментальной подготовкой для решения междисциплинарных задач в интересах сохранения конкурентоспособности ключевых наукоемких отраслей.

Ключевые слова: вычислительные методы, математическое моделирование, параллельные алгоритмы, кадры высшей квалификации, гиперболизация систем уравнений, локально-адаптивные сетки, декомпозиция расчетных сеток, автоматизация разработки параллельных программ, отказоустойчивость.

Благодарности: Вычисления проведены с использованием ресурсов Суперкомпьютерного Центра коллективного пользования ИПМ имени М. В. Келдыша РАН.

Для цитирования: Четверушкин Б.Н., Якобовский М.В. Вычислительные алгоритмы и прикладное математическое обеспечение для систем высокой и сверхвысокой производительности. Образовательный аспект // Вычислительные методы и программирование. 2024. Специальный выпуск. 97–106. doi 10.26089/NumMet.2024s07.

2024, Специальный выпуск, 97–106. doi 10.26089/NumMet.2024s07

Computational algorithms and applied mathematical software for high and ultra-high performance systems. Educational aspect

Boris N. Chetverushkin
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-1216-5438, e-mail: chtver@imamod.ru

Mikhail V. Yakobovskiy
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-9498-1457, e-mail: lira@imamod.ru

Abstract: The article discusses algorithms and methods of numerical modeling on high-performance computing systems of massive parallelism, ensuring the efficient use of general-purpose processors and graphics accelerators. Using the example of the interaction of the Computational Mathematics and Cybernetics Department of Moscow State University and the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, the article emphasizes the high role of training personnel for the development of supercomputer technologies and solving complex fundamental and applied problems with their help. The article discusses the possibilities of solving such diverse problems, based on fundamental research, as reducing the amount of calculations in the study of continuum mechanics problems and ensuring the possibility of performing fault-tolerant calculations. It is noted that it is necessary to maintain and strengthen the training of highly qualified personnel with fundamental training to solve interdisciplinary problems in the interests of maintaining the competitiveness of key science-intensive industries.

Keywords: computational methods, mathematical modeling, parallel algorithms, highly qualified personnel, hyperbolization of systems of equations, locally adaptive meshes, decomposition of computational meshes, automation of parallel program development, fault tolerance.

Acknowledgements: The calculations were carried out using the resources of Supercomputer Centre of Collective Usage of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences.

For citation: B. N. Chetverushkin, M. V. Yakobovskiy, “Computational algorithms and applied mathematical software for high and ultra-high performance systems. Educational aspect,” Numerical Methods and Programming. 2024. Special Issue. 97–106. doi 10.26089/NumMet.2024s07.

Вычислительные алгоритмы и прикладное математическое обеспечение, адаптируемое на архитектуру систем с экстрамассивным параллелизмом, является ключом, позволяющим эффективно использовать высокопроизводительные компьютеры. Связано это с тем, что огромное количество независимых вычислителей (процессоров, ядер), одновременно используемых для решения одной задачи, по сути дела начинают мешать друг другу за счет нерационального переноса части вычислений на добавляемые процессоры. Увеличение числа процессоров приводит к увеличению относительного уровня накладных расходов в силу уменьшения объема полезных вычислений, выполняемых каждым из процессоров, с одной стороны, и увеличения общего объема передаваемых между процессорами данных, с другой.

Данная проблема носит принципиальный характер и может быть решена только средствами фундаментальной науки с широким привлечением к исследованиям молодых специалистов. Она является одним из основных направлений, в рамках которого осуществляется широкое взаимодействие кафедр Вычислительных методов, Суперкомпьютеров и квантовой информатики, Системного программирования факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова и ИПМ имени М. В. Келдыша РАН.

Одним из примеров, подтверждающих возможность, опираясь на результаты фундаментальных исследований, существенно расширить круг задач, решаемых с помощью математического моделирования

2024, Специальный выпуск, 97–106. doi 10.26089/NumMet.2024s07

на современных суперкомпьютерах, является использование квазигазодинамической системы [1] и вытекающего из ее структуры приема гиперболизации для решения задач, описываемых уравнениями математической физики, аппроксимируемых на подробных пространственных сетках. Данный прием позволяет существенно ослабить условие устойчивости, налагающее ограничение на максимально допустимый шаг модельного времени при расчетах на подробных сетках, с одной стороны, и предложить метод, обеспечивающий возможность проведения длительных расчетов на перспективных суперкомпьютерах, узлы которых подвержены отказам [2, 3], с другой.

Для полноценного использования открывающихся возможностей необходимы специалисты, обладающие существенными компетенциями как в численных методах, так и в области разработки и построения параллельных алгоритмов и программ. Широкое распространение гибридных вычислительных систем, узлы которых содержат специализированные ускорители (например, графические карты общего применения), требуют либо расширения набора компетенций в сторону освоения быстро меняющихся технологий программирования таких систем, либо ускоренного развития инструментария программирования, предоставляющего инвариантный по отношению к конкретному виду аппаратуры высокоуровневый интерфейс, что является более предпочтительным. Таким образом, необходимость подготовки кадров, с одной стороны, специализирующихся на развитии отмеченных и других направлений в области прикладной математики и математического моделирования направлений, а с другой — владеющих видением проблематики суперкомпьютерного кодизайна, в целом сомнений не вызывает.

Следует отметить существенное, прогрессирующее на протяжении длительного интервала времени, смещение интереса абитуриентов и студентов в пользу информационных технологий, в ущерб интереса к приобретению знаний классического естественно-научного профиля, в том числе, математического и физического образования. Усиление подобных тенденций чревато потерей возможности решения комплексных междисциплинарных задач, требующих широкого фундаментального образования, и компетенций по созданию высокопроизводительного эффективного инструментария для решения подобных задач. Последнее обстоятельство, особенно с учетом усиливающихся ограничений вплоть до полного запрета, в плане использования зарубежного программного обеспечения, может привести к значительному снижению конкурентоспособности отечественных наукоемких отраслей.

Возвращаясь к начатому обсуждению приема гиперболизации, поясним его суть, заключающуюся в дополнительном включении в математическую модель члена с малым параметром при второй производной по времени. Продемонстрируем появление этого дополнительного члена на примере квазигазодинамической системы уравнений (КГУ) [1]. Система КГУ уравнений получается с помощью кинетической модели, суть которой заключается в бесстолкновительном разлете в течение времени τ локально-максвелловской функции

$$f_0 = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}}\,\exp\left(-\frac{(\xi_i - u_i)^2}{2RT}\right),$$

существующей на момент времени $t = t^j$, и последующей максвеллизации при $t^{j+1} = t^j + \tau$. Здесь τ — характерное время бесстолкновительного разлета молекул, ρ — плотность, ξ_i — скорость молекулы в направлении оси Ox_i, u_i — макроскопическая скорость, T — температура, p — давление, E — полная энергия.

Выпишем КГУ систему на примере одномерной геометрии:

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p),$$

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2\rho u}{\partial t^2} + \frac{\partial\rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^3 + 3pu),$$

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(E + p)) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2(E + 2p)).$$

Несмотря на внешние отличия КГУ система отличается от классических уравнений Навье–Стокса на члены второго порядка малости по числу Кнудсена. Наличие членов с малым параметром при второй производной по времени делает систему КГУ уравнений гиперболической. Однако, как показывают многочисленные расчеты задач гидро- и газовой динамики, а также теоретический анализ [4–6], различие между данными расчета на основе КГУ системы и данными, полученными с помощью уравнений Навье–Стокса, практически отсутствует.

2024, Специальный выпуск, 97–106. doi 10.26089/NumMet.2024s07

Вместе с тем наличие члена со второй производной по времени позволяет строить более устойчивые трехслойные явные схемы, хорошо адаптируемые на архитектуру высокопроизводительных систем, включая гетерогенные системы, использующие в качестве ускорителей графические платы. Исследование устойчивости этих схем [7] показало, что при оптимальном выборе малого параметра τ при второй производной по времени, устойчивость данных трехслойных схем определяется условием

$$\Delta t \lesssim h^{3/2},$$

где h — характерный размер пространственной сетки, Δt — допустимый шаг по времени. Это условие более приемлемо, чем условие устойчивости для явных схем решения параболических уравнений

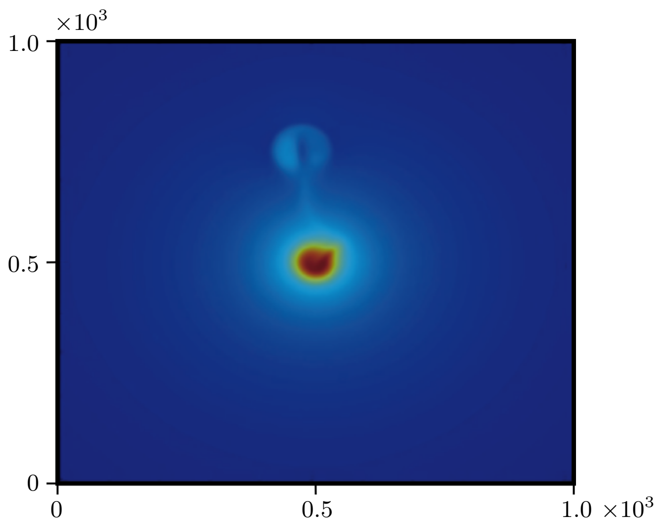
$$\Delta t \lesssim h^2,$$

что особенно заметно при использовании подробных пространственных сеток.

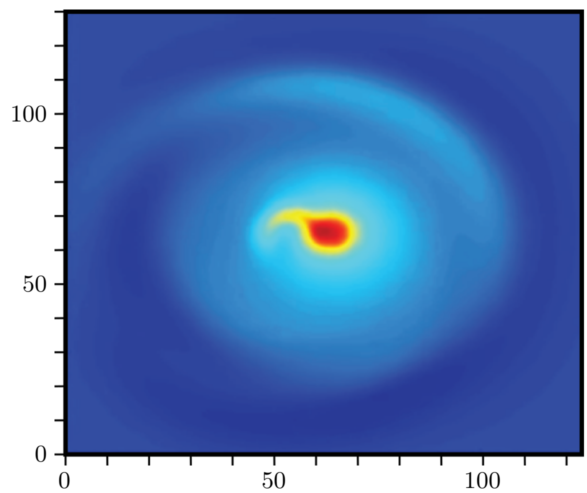
Включение дополнительного члена с малым параметром при второй производной возможно и для других математических моделей, например [8, 9]. Это дает возможность вести реальный расчет на пространственных сетках большого размера, используя высокопроизводительные многопроцессорные системы, более того, наличие этого члена позволяет осуществлять физически обоснованную связь между настоящим и предыдущим моментом времени.

В качестве примера укажем решение астрофизической задачи, моделирующей поглощение черной дырой вещества Галактики, сопровождаемое образованием устойчивой космической струи [8]. Система уравнений, описывающих задачу, состоит из уравнений газовой динамики с теплопроводностью, уравнений магнитной индукции, условия отсутствия магнитного заряда, а также эллиптического уравнения [4] для гравитационного потенциала. Задача решалась на трехмерной сетке, состоящей из $N = 8 \cdot 10^9$ пространственных узлов, что позволило получить при моделировании эффект образования космической струи (рис. 1 a). Следует отметить, что при использовании более грубых пространственных сеток, при $N < 7 \cdot 10^8$, соответствующий эффект не проявляется (рис. 1 b).

Для моделирования задач механики сплошной среды существенным является наличие минимальных масштабов, пространственных и временны́х, меньше которых не имеет смысла дальнейшая детализация решения. Стимулом для понимания их существования послужило обсуждение на семинаре под руководством В. А. Садовничего квазигазодинамической системы и ее приложений [10], физической основой которой является сглаживание решения на характерном расстоянии порядка длины свободного пробега.



a)



b)

Рис. 1. Поглощение черной дырой вещества Галактики: a) результаты расчета с высоким разрешением (релятивистская струя); b) результаты расчета с низким разрешением (нечеткая картина)

Fig. 1. Black hole absorbing matter from the Galaxy: a) results of calculation with high resolution (relativistic jet); b) results of calculation with low resolution (blurry picture)

2024, Специальный выпуск, 97–106. doi 10.26089/NumMet.2024s07

Наличие таких масштабов позволяет строить эффективные регуляризаторы решения, имеющие непосредственный физический смысл. Прием гиперболизации позволяет значительно расширить область применимости гиперболических систем.

Подход, связанный с гиперболизацией, позволяет решать не только проблемы математического моделирования, но и оказать поддержку в решении технической, но принципиальной для сверхвысокопроизводительной вычислительной техники, задачи обеспечения отказоустойчивости.

Эта проблема связана с тем, что при наличии сверхбольшого количества вычислительных узлов неизбежен периодический выход из строя некоторых из них. Причины отказа вычислительного узла могут быть как технического характера, так и программного. Мультифизичность и многомасштабность решаемых задач приводит к объединению большого числа программных модулей, подготовленных разными коллективами авторов, что приводит к внесению дополнительных сложно локализуемых ошибок. В работах [2–12], опираясь на наличие у гиперболических систем области влияния, определяющей решение в конкретной точке области моделирования, предложен алгоритм, позволяющий купировать неисправность, не останавливая выполнения расчета в целом. В работах [3, 11] был предложен подход, позволяющий проводить длительные расчеты, сохраняя промежуточные данные локально, непосредственно на том же множестве вычислительных узлов, на котором выполняется расчет. В его рамках, в случае отказа одного из узлов, не требуется глобальная синхронизация и приостановка расчетов на всех остальных вычислительных узлах. В круг эффективно выполняемых попадают алгоритмы, отвечающие свойству локальности обработки сеточных элементов, — алгоритмы на основе явных разностных схем, в том числе схемы, полученные с помощью ранее упомянутой процедуры гиперболизации. Схема восстановления данных после сбоя также опирается на идею гиперболизации уравнений. Если какой-то вычислительный узел оказался исключен из процесса вычислений вследствие аппаратного или программного сбоя, то вместо него в работу включаются два или более из заранее зарезервированных запасных узлов. Утраченные в результате сбоя данные восстанавливаются из оперативной или дисковой памяти сохранивших работоспособность узлов.

Подчеркнем, что основная идея метода коррекции ошибок опирается на важное свойство гиперболических уравнений, конечность времени распространения возмущений и, как следствие, конечность той зоны, которая оказывает влияние на решение на следующем шаге по времени в каждой локальной точке (рис. 2).

Таким образом, для восстановления последствий потери данных понадобится лишь незначительно расширить зону расчета, “отмотать” назад по времени и, взяв данные с предыдущей локальной контрольной точки, с помощью нескольких процессоров ускоренно пересчитать необходимый участок расчетной области заново. Процесс численного моделирования в целом в это время не останавливается — сохранившие работоспособность вычислительные узлы суперкомпьютера продолжают расчет последующих шагов модельного времени.

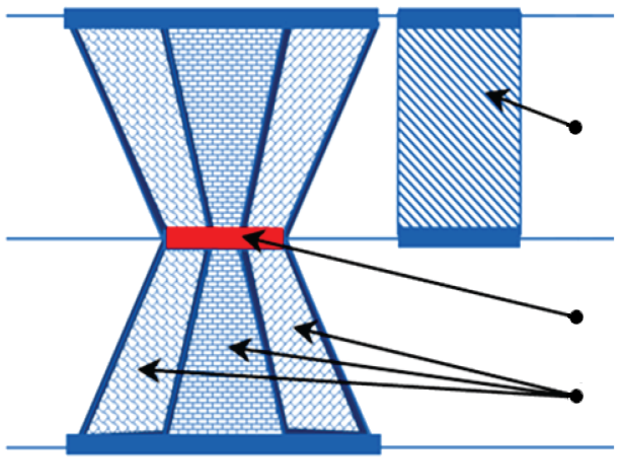


Рис. 2. Схема замены одного неисправного процессора тремя резервными

Fig. 2. Schematic replacement of a single faulty processor by three spare ones

2024, Специальный выпуск, 97–106. doi 10.26089/NumMet.2024s07

Усложнение суперкомпьютерной архитектуры, переход на гибридные системы, сочетающие многоядерные центральные процессоры и массивные параллельные ускорители, делает разработку программ весьма сложной задачей. Необходимо эффективное сочетание базовых средств разработки параллельных приложений (MPI, OpenMP, OpenCL, NVIDIA, CUDA и др.) с вычислительными алгоритмами. В качестве примера рассмотрим проблему эффективности использования адаптивных расчетных сеток.

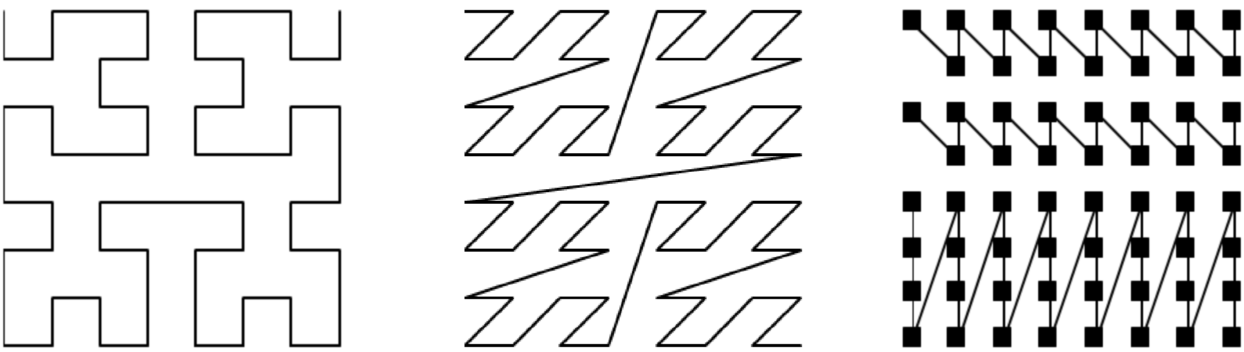
Адаптивные сетки обеспечивают возможность сокращения времени выполнения вычислений за счет уменьшения общего числа обрабатываемых ячеек расчетной сетки. Однако их использование сопряжено с дополнительными расходами, в том числе обусловленными усложнением вычислительных процедур, необходимостью формирования и обслуживания адаптивных сеток, дополнительными затратами на балансировку нагрузки вычислителей. Несмотря на широкое использование динамически адаптивных сеток, остаются открытыми вопросы оценки фактически достигаемого при их использовании выигрыша во времени выполнения моделирования, как при выполнении расчетов на однопроцессорных системах, так и при использовании многопроцессорных кластерных систем и систем, оснащенных графическими ускорителями. Важным с практической точки зрения классом динамически адаптивных сеток являются локально-измельчаемые сетки, использующие в качестве нулевого приближения регулярные декартовы сетки.

На практике широко используются два основных подхода к измельчению ячеек исходной грубой сетки — базовых ячеек: листовой [13] и блочно-ориентированный [14]. При листовом подходе области измельчения, покрытые ячейками одного уровня, могут иметь произвольную форму. В рамках блочно-ориентированного подхода области одного уровня измельчения имеют прямоугольную (параллелепипедную в трехмерном случае) форму. Листовой подход обеспечивает меньшее общее число ячеек благодаря измельчению, диктуемому исключительно действующим критерием адаптации к границам области и/или к особенностям решения.

В противоположность ему, блочно-ориентированный подход ограничивает многообразие форм зон измельчения и порождает большее число ячеек, но существенно упрощает логику процедур их обработки.

Простая дисциплина описания ячеек расчетной сетки при блочно-ориентированном подходе позволяет использовать на этапе динамической балансировки нагрузки процессоров, требуемой при каждом акте динамической адаптации, алгоритмы, опирающиеся на пространственно заполняющие кривые "растровые блоки" (рис. 3 c). Они обеспечивают существенно более низкий уровень накладных расходов относительно алгоритмов, опирающихся на фрактальных кривые (рис. 3 a, b) и относительно иерархических алгоритмов рациональной декомпозиции графов, предоставляемых, например, популярными пакетами Metis/ParMetis [15].

Простота логики обработки ячеек сетки, как правило, позволяет сократить общее время вычислений, и, что важнее, упрощает использование мультитредовых ускорителей вычислений, подобных графическим картам GPGPU. Высокая динамика появления ускорителей новых архитектур и сопутствующих им проприетарных низкоуровневых средств разработки параллельных приложений существенно ограничивают возможности полноценного их использования широким кругом прикладных специалистов.



a) b) c)

Рис. 3. Примеры кривых, заполняющих прямоугольную расчетную область: a) кривая Гильберта; b) кривая Мортона; c) кривая "растровые блоки"

Fig. 3. Space-filling curves: a) Hilbert curve; b) Morton curve; c) "raster blocks" curve

2024, Специальный выпуск, 97–106. doi 10.26089/NumMet.2024s07

В этом контексте значительную роль играют средства автоматизации портирования параллельных программ на суперкомпьютеры гибридной архитектуры, предоставляющие прикладным специалистам привычные высокоуровневые средства разработки параллельных программ, такие как C/C++ и FORTRAN в сочетании со стандартами де-факто MPI и OpenMP. Значительный прогресс в данном направлении достигнут группой сотрудников ИПМ имени М. В. Келдыша РАН под руководством В. А. Крюкова и В. А. Бахтина, создавшей и развивающей при участии многочисленных студентов и выпускников кафедры Системного программирования ВМК МГУ систему подготовки параллельных программ DVM/DVMH [16, 17].

Развитие суперкомпьютерной вычислительной техники увеличивает потребность в высококвалифицированных специалистах, умеющих ее эффективно использовать. Дефицит таких специалистов наряду с высоким порогом вхождения в специальность открывает для выпускников профильных кафедр хорошие карьерные перспективы. Обучение студентов происходит в форме специальных лекционных курсов и семинаров, а также в участии в фундаментальных и промышленно ориентированных проектах, выполняемых в ИПМ имени М. В. Келдыша РАН. Исследовательская деятельность студентов ведется в следующих направлениях:

1) моделирование многофазных микротечений;
2) моделирование комплексного воздействия на сложные материалы в рамках технологии “виртуальный дизайн материалов”;
3) моделирование геомеханических процессов и флюидодинамики пористых сред применительно к задачам добычи нефти и газа;
4) моделирование распространения акустических волн применительно к задачам сейсморазведки;
5) математическое моделирование акустического излучения, создаваемого планером самолета;
6) модели и высокопроизводительные алгоритмы для предсказания акустических характеристик винтокрылых машин;
7) математическое моделирование турбулентного течения в авиационном двигателе;
8) модели и алгоритмы для предсказания аэродинамических и акустических нагрузок на поверхности ракеты космического назначения;
9) разработка параллельных алгоритмов для суперкомпьютерного моделирования задач газовой динамики.

Следует подчеркнуть комплексный характер задач, решаемых при проведении исследований в указанных направлениях. Наряду с разработкой математических моделей и вычислительных методов важную роль играет создание пакетов прикладных программ, эффективно использующих большие вычислительные мощности суперкомпьютерных вычислительных систем оснащенных множеством вычислительных узлов гибридной архитектуры.

В качестве примера участия студентов в исследованиях по указанной тематике приведем следующий результат [18–20]. Разработан гетерогенный параллельный алгоритм предобуславливателя для итерационного метода крыловского типа на основе многоцветного метода Гаусса–Зейделя и его реализация с использованием вычислительного стандарта OpenCL. Также разработана гетерогенная параллельная реализация многосеточного метода с полной аппроксимацией в программном комплексе NOISETTE. Данный вариант дает существенные преимущества по сравнению с импортным коммерческим пакетом NUMECAFina/Turbo. Программной комплекс NOISETTE преимущественно используется при выполнении работ в ИПМ имени М. В. Келдыша РАН. В настоящее время разрабатывается версия программного комплекса для применения в учебно-образовательных целях. Пример расчета, демонстрирующий вид используемых вращающихся расчетных сеток и фрагмент расчетной области при изучении двухлопастного модельного несущего винта вертолета в режиме висения, приведен на рис. 4. Полученные при численном моделировании характеристики течения с хорошей точностью соответствуют результатам натурных экспериментов [18–20].

В сентябре 2024 года состоялась десятая юбилейная российская конференция “Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике” [21], собравшая более 200 участников. Более половины из них представляли ведущие организации промышленного комплекса, что свидетельствует о подъеме аэрокосмической отрасли и подчеркивает интерес ее организаций к результатам фундаментальных исследований. Значительное внимание в докладах и обсуждениях было уделено именно вопросам валидации результатов

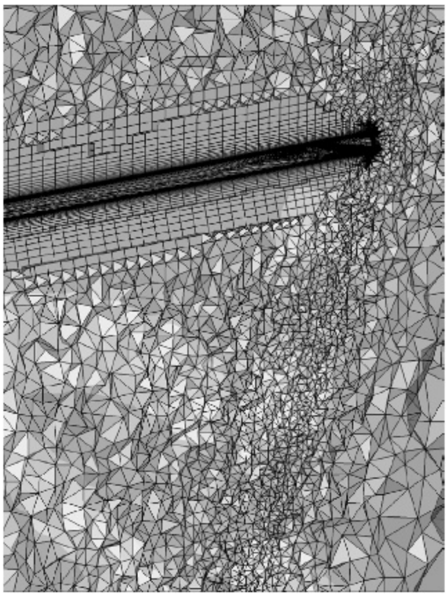


Рис. 4. Фрагмент неструктурированной сетки (слева), визуализация концевого вихря несущего винта на режиме висения (справа)

Fig. 4. Fragment of an unstructured mesh (left), visualization of the rotor tip vortex in hover mode (right)

численного моделирования, подтверждения соответствия результатов математического моделирования результатам прецизионных натурных экспериментов. В рамках конференции был проведен молодежный симпозиум, предусматривающий как лекции ведущих ученых, так и обширную программу (порядка 30) докладов молодых специалистов, что так же является неотъемлемым элементом подготовки и сохранения кадров высшей квалификации.

Работы по указанным тематикам соответствуют современному уровню вычислительных технологий. Они реализуются в рамках целевых программ Министерства науки и высшего образования РФ, грантов РНФ, договорных работ с промышленными заказчиками. Тематика работ входит в планы созданного на базе МГУ имени М. В. Ломоносова, ИПМ имени М. В. Келдыша РАН, ИВМ РАН, математического центра мирового уровня “Московский центр фундаментальной и прикладной математики”.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность д.ф.-м.н. Е. Б. Савенкову и проф. РАН, д.ф.-м.н. А. В. Горобцу за действенную помощь в подготовке данной статьи.

Список литературы

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МаксПресс, 2004.
2. *Четверушкин Б.Н., Якобовский М.В.* Вычислительные алгоритмы и отказоустойчивость гиперэкзафлопсных вычислительных систем // Докл. РАН. 2017. **472**, № 1. 13–17.
3. *Chetverushkin B.N., Yakobovskiy M.V., Kornilina M.A., Semenova A.V.* Numerical algorithms for HPC systems and fault tolerance // Computer and Information Science. Vol. 1063. Cham: Springer, 2019. 34–44. doi 10.1007/978-3-030-28163-2_3.
4. *Четверушкин Б.Н., Репин С.И.* Оценка разности приближенных решений задач Коши для параболического диффузионного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // Докл. РАН. 2013. **451**, № 3. 255–258.
5. *Сурначев М.Д., Тишкин В.Ф., Четверушкин Б.Н.* О законах сохранения для гиперболизированных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. **52**, № 7. 859–865. doi 10.1134/S0374064116070013.
6. *Chetverushkin B.N., Zlotnik A.A.* On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial boundary value problem // Appl. Math. Lett. 2018. **83**. 116–122. doi 10.1016/j.aml.2018.03.027.
7. *Четверушкин Б.Н., Гулин А.В.* Явные схемы и моделирование на вычислительных системах сверхвысокой производительности // Докл. РАН. 2012. **446**, № 5. 501–503.

8. *Четверушкин Б.Н., Савельев А.В., Савельев В.И.* Кинетические алгоритмы расчёта течений электропроводящей жидкости на высокопроизводительных вычислительных системах // Докл. РАН. 2019. **489**, № 6. 552–557. doi 10.31857/S0869-56524896552-557.
9. *Четверушкин Б.Н., Ольховская О.Г., Гасилов В.А.* Трехслойная схема для решения уравнения диффузии излучения // Докл. РАН, 2023. **512**, № 1. 89–95.
10. *Четверушкин Б.Н.* К вопросу об ограничении снизу на масштабы в механике сплошной среды // Труды семинара “Время, хаос, математические проблемы” под рук. В. А. Садовничего. Том 4. М.: Моск. гос. унив., 2009. 75–96.
11. *Четверушкин Б.Н., Якобовский М.В.* Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности. Препринт № 52. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018.
12. *Якобовский М.В., Корнилина М.А.* Развитие суперкомпьютерных технологий в ИММ РАН и ИПМ имени М. В. Келдыша РАН // Computational Mathematics and Information Technologies. 2024. **8**, N 1. 12–28. doi 10.23947/2587-8999-2024-8-1-12-28.
13. *Сухинов А.А.* Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 1. 86–98.
14. *Абалакин И.В., Жданова Н.С., Суков С.А.* Реконструкция геометрии объекта на элементах неструктурированной сетки при использовании метода погруженных границ // Математическое моделирование. 2016. **28**, № 6. 77–88.
15. *Karypis G.* Family of Graph and Hypergraph Partitioning Software. https://github.com/CIBC-Internal/metis-4.0.3/tree/master. Cited December 26, 2024.
16. *Бахтин В.А., Крюков В.А.* DVM-подход к автоматизации разработки параллельных программ для кластеров // Программирование. 2019. № 3. 43–56. doi 10.1134/S0132347419030038.
17. DVM-система | Система разработки параллельных программ. http://dvm-system.org. Cited December 26, 2024.
18. *Abalakin I.V., Bakhvalov P.A., Bobkov V.G., et al.,* NOISEtte CFD&CAA supercomputer code for research and applications // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2024. **11**, N 2. 78–101. doi 10.14529/jsfi240206.
19. *Magomedov A.R., Gorobets A.V.* Heterogeneous implementation of preconditioners based on Gauss–Seidel method for sparse block matrices // Prikl. Mat. Inform. 2023. N 72. 38–45.
20. *Горобец А.В., Суков С.А. Магомедов А.Р.* Гетерогенная параллельная реализация многосеточного метода с полной аппроксимацией в программном комплексе NOISEte // Математическое моделирование. 2024. **36**, № 2. 129–146. doi 10.20948/mm-2024-02-08.
21. Десятая юбилейная российская конференция “Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике”. 16–21.09.2024. https://ceaa.imamod.ru. Cited December 26, 2024.

Поступила в редакцию
9 ноября 2024 г.

Принята к публикации
26 декабря 2024 г.

Информация об авторах

Борис Николаевич Четверушкин — акад. РАН, д.ф.-м.н., научный руководитель Института; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

Михаил Владимирович Якобовский — чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., заместитель директора по научной работе; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., д. 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

References

1. B. N. Chetverushkin, *Kinetic Schemes and Quasi-Gasdynamic System of Equations* (Maks Press, Moscow, 2004; CIMNE Barselona, 2008).
2. B. N. Chetverushkin and M. V. Yakobovskiy, “Numerical Algorithms and Fault Tolerance of Hyperexascale Computer Systems,” Dokl. Akad. Nauk **472** (1), 13–17 (2017) [Dokl. Math. **95** (1), 7–11 (2017)]. doi 10.1134/S1064562417010021.
3. B. N. Chetverushkin, M. V. Yakobovskiy, M. A. Kornilina, and A. V. Semenova, “Numerical Algorithms for HPC Systems and Fault Tolerance,” in *Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2019), Vol. 1063, pp. 34–44. doi 10.1007/978-3-030-28163-2_3.

4. S. I. Repin and B. N. Chetverushkin, “Estimates of the Difference between Approximate Solutions of the Cauchy Problems for the Parabolic Diffusion Equation and a Hyperbolic Equation with a Small Parameter,” Dokl. Akad. Nauk **451** (3), 255-258 (2013) [Dokl. Math. **88** (1), 417–420 (2013)]. doi 10.1134/S1064562413040157.
5. M. D. Surnachev, V. F. Tishkin, and B. N. Chetverushkin, “On Conservation Laws for Hyperbolized Equations,” Differ. Uravn. **52** (7), 859–865 (2016) [Differ. Equ. **52** (7), 817–823 (2016)]. doi 10.1134/S0012266116070016.
6. B. N. Chetverushkin and A. A. Zlotnik, “On a Hyperbolic Perturbation of a Parabolic Initial-Boundary Value Problem,” Appl. Math. Lett. **83**, 116–122 (2018). doi 10.1016/j.aml.2018.03.027.
7. B. N. Chetverushkin and A. V. Gulin, “Explicit Schemes and Numerical Simulation Using Ultrahigh-Performance Computer Systems,” Reports of the Academy of Sciences. **446** (5), 501–503 (2012). Dokl. Akad. Nauk **446** (5), 501–503 (2012) [Dokl. Math. **86** (2), 681–683 (2012)]. doi 10.1134/S1064562412050213.
8. B. N. Chetverushkin, A. V. Saveliev, and V. I. Saveliev, “Kinetic Algorithms for Modeling Conductive Fluids flow on High-Performance Computing Systems,” Dokl. Akad. Nauk **489** (6), 552–557 (2019) [Dokl. Math. **100** (3), 577–581 (2019)]. doi 10.1134/S1064562419060206.
9. B. N. Chetverushkin, O. G. Olkhovskaya, and V. A. Gasilov, “Three-Level Scheme for Solving the Radiation Diffusion Equation,” Dokl. Akad. Nauk **512** (1), 89–95 (2023) [Dokl. Math. **108** (1), 320–325 (2023)]. doi 10.1134/S1064562423700837.
10. B. N. Chetverushkin, “Lower Bounds on Scales in Continuum Mechanics,” in *Proc. Seminar on Time, Chaos, Mathematical Problems under supervision of V.A. Sadovnichii* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2009), Vol. 4, 75–96.
11. B. N. Chetverushkin and M. V. Yakobovskiy, “Computational Algorithms and Architecture of High-Performance Systems,” Preprint No. 52 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2018).
12. M. V. Yakobovskiy and M. A. Kornilina, “Development of Supercomputer Technologies at the Institute of Mathematical Modelling and Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,” Computational Mathematics and Information Technologies **8** (1), 12–28 (2024). doi 10.23947/2587-8999-2024-8-1-12-28.
13. A. A. Sukhinov, “Construction of Cartesian Meshes with Dynamic Adaptation to the Solution,” Mat. Model. **22** (1), 86–98 (2010).
14. I. V. Abalakin, N. S. Zhdanova, and S. A. Soukov, “Reconstruction of Body Geometry on Unstructured Meshes by the Immersed Boundary Method,” Mat. Model. **28** (6), 77–88 (2016) [Math. Models Comput. Simul. **9** (1), 83–91 (2017)]. doi 10.1134/S2070048217010033.
15. G. Karypis, “Family of Graph and Hypergraph Partitioning Software,” https://github.com/CIBC-Internal/metis-4.0.3/tree/master. Cited December 26, 2024.
16. V. A. Bakhtin and V. A. Krukov, “DVM-Approach to the Automation of the Development of Parallel Programs for Clusters,” Programmirovanie, No. 3, 43–56 (2019) [Program. Comput. Soft. **45** (3), 121–132 (2019)]. doi 10.1134/S0361768819030034.
17. DVM System | DVM System. http://dvm-system.org. Cited December 26, 2024.
18. I. V. Abalakin, P. A. Bakhvalov, V. G. Bobkov, et al., “NOISEtte CFD&CAA Supercomputer Code for Research and Applications,” Supercomput. Front. Innov. **11** (2), 78–101 (2024). doi 10.14529/jsfi240206.
19. A. R. Magomedov and A. V. Gorobets, “Heterogeneous Implementation of Preconditioners Based on Gauss–Seidel Method for Sparse Block Matrices,” Prikl. Mat. Inform. No. 72, 38–45 (2023) [Comput. Math. Model. **33** (4), 438–442 (2022)]. doi 10.1007/s10598-023-09585-2.
20. A. V. Gorobets, S. A. Soukov, and A. R. Magomedov, “Heterogeneous Parallel Implementation of a Multigrid Method with Full Approximation in the Noisette Code,” Mat. Model. **36** (2), 129–146 (2024) [Math. Models Comput. Simul. **16** (4), 609–619 (2024)]. doi 10.1134/S2070048224700261.
21. The Tenth Anniversary Russian Conference “Computational Experiment in Aeroacoustics and Aerodynamics,” 16–21.09.2024. https://ceaa.imamod.ru. Cited December 26, 2024.

Received
November 9, 2024

Accepted for publication
December 26, 2024

Information about the authors

Boris N. Chetverushkin — Academican of RAS, Dr. Sci., Scientific Director of the Institute; Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Miusskaya ploshchad’, 4, 125047, Moscow, Russia.

Mikhail V. Yakobovskiy — Corr. Member of RAS, Dr. Sci., Deputy Director for Research; Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Miusskaya ploshchad’, 4, 125047, Moscow, Russia.