doi 10.26089/NumMet.v26r104 УДК 519.2

Исследование неустойчивостей в астрофизике: численный и аналитический подходы дополняют друг друга

Д. Д. Соколов
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-3441-0863, e-mail: sokoloff.dd@gmail.com

Аннотация: На примере исследования задач о развитии неустойчивостей, возникающих при формировании магнитного поля в небесных телах, обсуждается соотношение численных и аналитических методов исследования сложных естественнонаучных задач. В качестве таких примеров рассматриваются задачи о возникновении перемежаемости при развитии неустойчивости в случайной среде и задача о свободном распаде турбулентности при наличии магнитного поля. Изложение сконцентрировано вокруг работ, выполненных в разное время в Московском университете.

Ключевые слова: магнитные поля, динамо, численные методы, аналитические методы, суперкомпьютер.

Для цитирования: Соколов Д.Д. Исследование неустойчивостей в астрофизике: численный и аналитический подходы дополняют друг друга // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 1. 50–57. doi 10.26089/NumMet.v26r104.

Exploring astrophysical instabilities: numerics and analytics help each other

Dmitry D. Sokoloff
Lomonosov Moscow State University, Department of Physics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-3441-0863, e-mail: sokoloff.dd@gmail.com

Abstract: Basing on experiences study of magnetic field formation in celestial bodies we discuss relation between numerical and analytical approaches in complicated scientific problems. As instructive examples, we consider phenomenon of intermittency in instabilities in random media as well as free decay of magnetized turbulence. The discussion is concentrated on investigations preformed in the Moscow university.

Keywords: magnetic fields, dynamo, direct numerical simulations, analytical approach, supercomputer.

For citation: D. D. Sokoloff, “Exploring astrophysical instabilities: numerics and analytics help each other,” Numerical Methods and Programming. **26** (1), 50–57 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r104.

2025, **26** (1), 50–57. doi 10.26089/NumMet.v26r104

1. Введение. Исследование неустойчивостей, интересных для астрофизики, представляет собой очень сложную задачу, требующую разумного сочетания численных и аналитических методов. Для конкретности будем говорить об исследовании неустойчивости, приводящей к образованию магнитных полей во многих небесных телах, включая Землю, Солнце, спиральные галактики, в частности наш Млечный Путь. Эту неустойчивость принято называть динамо (в качестве общего обзора работ по этой тематике укажем [1]). Например, по самым грубым оценкам, в межзвездной среде спиральной галактики имеется около полумиллиона ячеек турбулентности, которые и создают ее магнитное поле. Для детального описания того, как это происходит, потребовалось бы изучить трехмерную магнитную гидродинамику каждой из этих ячеек. Такая задача не является в принципе неразрешимой для современной вычислительной физики. Сопоставимой сложности вычислительные задачи с рубежа текущего века удается решать при моделировании процесса возникновения и эволюции геомагнитного поля. Поскольку изучение геомагнитного поля имеет ощутимую прикладную (в широком смысле слова) сторону, для этого научного проекта удается сконцентрировать огромные вычислительные и человеческие ресурсы. Такие проекты носят штучный характер. Трудно рассчитывать, что их удастся реализовать в задачах астрофизики. Однако важно не только это. Для построения соответствующей вычислительной процедуры требуется как-то характеризовать среду каждой из ячеек турбулентности или конвекции. Требуемая информация на много порядков превышает ту информацию, которой мы располагаем об удаленных небесных телах. Даже если мы отвлечемся от огромной вычислительной трудности перебора различных возникающих на этом пути вариантов расчета, то полученный в результате этого расчета огромный массив информации прямо не отвечает на вопросы, которые задает специалист в предметной области. Его интересуют некоторые функционалы от решения, построение которых часто не менее сложно, чем прямое численное моделирование.

Конечно, исследователи редко идут столь прямолинейным путем и тем или иным способом разбивают сложную задачу на отдельные блоки, выделяя модельные задачи, допускающие аналитическое или полуаналитическое исследование. Наличие таких опорных точек в задаче позволяет ориентироваться в ней и понимать полученный результат.

Подобное сочетание методов прямого численного моделирования и аналитических подходов во многом определяет успех исследования, а развитие полезных упрощенных моделей, допускающих аналитическое исследование и поддерживающих интерпретацию результатов прямого численного моделирования обычно накапливается десятилетиями. Возникающие на этом научном поле проблемы часто остаются слабо освещенными при изложении частных физических результатов. В рамках данной статьи делается попытка восполнить этот недостаток и рассказать об исследовании некоторых моделей, релевантных для изучения задачи динамо и некоторых других задач, интересных для астрофизики. Выбирая конкретные примеры, мы ориентировались на те задачи, развитие которых во многом было связано с Московским университетом. Поэтому мы опираемся в основном на работы отечественных авторов, хотя при желании список литературы можно было бы многократно расширить.

2. От трехмерной магнитной гидродинамики к перемножению случайных матриц. Задача о генерации магнитного поля в астрофизике исходно описывается сложной системой трехмерных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от времени. Например, эволюция магнитного поля в движущейся электропроводящей жидкости описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} + \nu_m \Delta \boldsymbol{H}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля, $\boldsymbol{v}$ — скорость течения среды, ν_m — коэффициент магнитной диффузии, обратно пропорциональный проводимости среды. В этом уравнении обычно делают различные упрощения, например рассматривают среднее магнитное поле $\boldsymbol{B}$ вместо поля $\boldsymbol{H}$ и осредняют уравнение индукции по турбулентным (или конвективным) ячейкам. Однако для нас сейчас важнее другой аспект задачи.

После разумного обезразмеривания задачи оказывается, что безразмерные коэффициенты в уравнениях переноса, стоящие перед лапласианами и описывающие потери, сильно отличаются от единицы. В данном случае речь идет о магнитном числе Рейнольдса Rm. Это безразмерное число принято строить так, чтобы большое число Рейнольдса означало малые потери. Например, в конвективной оболочке Солнца $Rm = 10^6$. Для сравнения укажем, что в лабораторных исследованиях механизма динамо значение Rm составляет несколько десятков.

2025, **26** (1), 50–57. doi 10.26089/NumMet.v26r104

В этих условиях полезно на время отвлечься от явлений диссипации, отбросить члены с производными второго порядка и перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с жидкостью, т.е. использовать лагранжев подход вместо эйлерова. В этом случае уравнения переноса сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \boldsymbol{H}\widehat{A}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{H}$ — переносимый вектор. В контексте данной задачи этот вектор удобнее интерпретировать как вектор-строку. В уравнении (2) $\widehat{A}$ представляет собой матрицу, составленную из частных производных поля скорости. В более сложных случаях вектор $\boldsymbol{H}$ может быть многомерным и включать компоненты различных физических полей. Здесь уравнение (2) нужно решать вдоль лагранжевой траектории.

Конечно, на некотором этапе в задаче придется восстанавливать эффекты диссипации, например, путем функционального интегрирования по различным траекториям, описывающим адвекцию и диффузию и приходящим в данную точку. Однако здесь мы отвлекаемся от этого этапа исследований. Более подробно о сведении задачи переноса магнитного поля к системе обыкновенных дифференциальных уравнений см., например, [2].

Уравнение (2) несравненно проще для исследования, чем уравнение (1).

Поскольку нас интересует поведение поля $\boldsymbol{H}$ в турбулентной (конвективной) среде, мы можем использовать мощные методы современной теории вероятностей. Для этого нужно конкретизировать вид матрицы $\widehat{A}$, которую мы будем рассматривать как матричный случайный процесс.

Представляется разумным, по крайней мере для начала, рассматривать этот случайный матричный процесс $\widehat{A}$ следующим образом (модель с обновлением). Временна́я ось разбивается на отрезки длины Δ, на каждом из которых матрица $\widehat{A}$ считается независящей от времени, а на разных временны́х отрезках соответствующие им значения матричного случайного процесса считаются независимыми равнораспределенными случайными матрицами $\widehat{A}_n$, где n — номер отрезка. Эти отрезки часто называют интервалами обновления.

Тогда решение задачи Коши для уравнения (2) в точках обновления $n\Delta$ строится как

$$\boldsymbol{H}_n = \boldsymbol{H}_0 \widehat{B}_1 \widehat{B}_2 \ldots \widehat{B}_n,$$

где $\widehat{B}_n = \exp(\widehat{A}_n \Delta)$.

Таким образом, задача об изучении явления переноса в случайном потоке сводится к изучению произведения случайных матриц. Эта задача является одной из классических задач современной теории вероятностей.

В частности, для задачи переноса магнитного поля условие несжимаемости течения означает, что след матриц $\widehat{A}_n$ обращается в нуль, а матрицы $\widehat{B}_n$ являются унимодулярными. Задача о произведении независимых унимодулярных случайных матриц восходит к работам Ферстенберга 60-х годов прошлого века, в которых выясняется, что свойства этого произведения относительно мало зависят от детальных свойств матриц $\widehat{A}_n$ и, в частности, от их размерности [2].

3. Модель Зельдовича. Исследовать численно произведение независимых случайных матриц несравненно проще, чем решать трехмерные уравнения со случайными коэффициентами. Однако все же очень заманчиво упростить задачу так, чтобы численные решения можно было сравнивать с аналитическими результатами, полученными в явном виде. Это можно сделать в рамках простой модели, предложенной в 1964 г. Я. Б. Зельдовичем [3] в контексте одной космологической задачи. Речь идет о распространении света в космологической модели, учитывающей неоднородности распределения вещества во Вселенной.

Напомним, что в простейшей однородной и изотропной космологической модели кривизна сопутствующего пространства определяется средней плотностью различных форм вещества, находящихся во Вселенной. Если плотность больше некоторой критической плотности, то кривизна пространства положительна, если меньше — отрицательна. При критической плотности кривизна нулевая. Поскольку плотность заранее неизвестна, то ее определяют из т.н. космологических тестов. Эти тесты восходят к идеям Гаусса, а для задач космологии были впервые предложены Н. И. Лобачевским.

Рассмотрим некоторую точку O в пространстве, которую будем интерпретировать как положение наблюдателя. Выпустим из нее два луча света (геодезические), разделенных малым углом θ. Отложим на каждом из них расстояние x и соединим полученные таким образом точки $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Расстояние между этими точками, очевидно, пропорционально углу θ, а коэффициент пропорциональности называется

2025, **26** (1), 50–57. doi 10.26089/NumMet.v26r104

полем Якоби, или геодезическим отклонением y. Как выясняется в римановой геометрии, поле Якоби, рассматриваемое как функция x, удовлетворяет уравнению

$$y'' + Ky = 0 \tag{3}$$

с начальными условиями $y(0) = 0$ (условие пересечения двух геодезических) и $y' = 1$ (условие нормировки).

Если $K > 0$, то y осциллирует, если $K < 0$, то y экспоненциально растет, а при $K = 0$ этот рост становится линейным. Скорость роста или частота осцилляций определяет плотность, а с ее помощью кривизну.

Зельдович [3] обратил внимание, что если плотность вещества во Вселенной не постоянна, а флуктуирует, то величину K в уравнении (3) нужно рассматривать как случайный процесс. При этом возникает своеобразная неустойчивость. Даже если среднее значение K равно нулю, то за счет флуктуаций кривизны поле Якоби экспоненциально растет.

Уравнение (3) переписывается в виде системы уравнений первого порядка, так что задача (при соответствующих предположениях о случайном процессе K) сводится к задаче о произведении случайных матриц размерности 2×2. Вид этих матриц несложен, так что задача вполне доступна аналитическому исследованию (подробности вычислений см., например, в [4]).

Задача Зельдовича интересна с точки зрения космологии, однако сейчас для нас важно, что она представляет собой чрезвычайно удобную модельную задачу о развитии неустойчивостей в случайной среде. В ее рамках очень удобно сравнивать численные и аналитические результаты исследования.

4. Явление перемежаемости. Прежде чем перейти к обсуждению конкретных результатов такого сравнения, важно обсудить, какие общие черты неустойчивостей в случайной среде может сохранить чрезвычайно упрощенная система обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой сводится задача Зельдовича.

Оказывается, что задача Зельдовича содержит своеобразное явление, типичное для неустойчивостей в случайной среде и называемое перемежаемостью.

Наши стандартные представления об изучении случайных сред отталкиваются от молекулярно-кинетической теории газов. В рамках этой теории достаточно изучить поведение двух первых моментов распределения (среднего и дисперсии), которые в большинстве случаев воспроизводят основные черты явления. Конечно, можно интересоваться, скажем, не только среднеквадратичной энергией молекул газа, которая определяет его температуру, но и наиболее вероятной энергией или корнем квадратным из четвертой степени скорости молекул, однако это свелось бы лишь к небольшой переградуировке термометров. Это происходит потому, что несущественны большие и, соответственно, маловероятные отклонения от средних значений.

Иначе обстоит дело в том случае, если мы изучаем развитие неустойчивости в случайной среде. Поскольку мы имеем дело с экспоненциально растущими во времени величинами, то даже события, статистический вес которых экспоненциально быстро уменьшается со временем, могут вносить определяющий вклад в развитие неустойчивости, если маловероятная конфигурация обеспечивает более быстрый рост решения. Это явление известно в литературе как перемежаемость.

Для того чтобы изучать перемежаемость количественно, мы должны фиксировать, как мы измеряем рост интересующей нас величины. В рассматриваемом примере это y. Можно изучать рост ее статистических моментов, скорость роста которых определяется как

$$\gamma_p = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln < |y|^p >}{pn}.$$

Здесь γ_p — скорость роста p-го статистического момента, угловые скобки означают статистическое среднее, а n — число перемножаемых матриц. Для того чтобы сделать скорости роста разных моментов сравнимыми, они разделены на p. Можно изучать выборочную скорость роста решения или показатель Ляпунова

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{< \ln |y| >}{n}.$$

Эти определения отличаются тем, какая операция производится сначала — взятие статистического среднего или логарифма. В итоге показатель Ляпунова отражает типичную скорость роста и мало чувствителен

2025, **26** (1), 50–57. doi 10.26089/NumMet.v26r104

к редким быстро растущим реализациям, которые, в свою очередь, могут вносить большой вклад в статистические моменты. Этот вклад тем существенней, чем больше номер момента. Еще раз напомним, что в молекулярно-кинетической теории газов наиболее вероятные значения и средние различных порядков близки друг к другу.

В теории Ферстенберга доказывается, что при широких предположениях

$$0 < \gamma < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots \ .$$

Для первого из этих неравенств существенно, что мы имеем дело с произведением матриц, а не просто случайных чисел. Известно, что для чисел сомножители перестановочны, а для матриц — нет. Остальные неравенства легко проиллюстрировать, скажем, рассматривая произведения случайных чисел, которые с вероятностью $1/2$ равны 0 и 2 (пример заимствован из обзора [5]). Поскольку наличие хотя бы одного нуля в произведении обращает все произведение в нуль, то этот рост, скорость которого увеличивается с номером момента, связан с одной реализацией, в которой все сомножители равны 2. Вероятность этой реализации убывает как 2^{-n}, зато ее вклад в решение растет как 2^{pn}.

Явление перемежаемости сохраняется и в гораздо более сложных моделях, для описания которых придется перемножать не конечномерные матрицы, а операторы.

Однако эти теоретические результаты не дают возможности оценить, можно ли зафиксировать перемежаемость в рамках прямого численного моделирования, возникает ли перемежаемость в реальных системах, насколько существенна разница между различными показателями роста. Для того чтобы зафиксировать перемежаемость численно, нужно иметь достаточно большой статистический ансамбль решений. Насколько велик должен быть этот ансамбль? Выяснить эти вопросы путем прямого численного решения трехмерных задач, претендующих на реалистичность, достаточно сложно, но это вполне можно сделать, используя модельные задачи и, прежде всего, задачу Зельдовича.

5. Перемежаемость в задаче Зельдовича. Конечно, решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка не представляет затруднений с точки зрения вычислительной математики. Значение случайных чисел, задающих кривизну K, можно считать со стандартного генератора случайных чисел, а показатель Ляпунова определить, построив графически зависимость логарифма решения z от n для данной реализации случайного процесса K. В результате уже для n порядка сотни действительно получается линейная зависимость между этими величинами, а коэффициент пропорциональности, т.е. показатель Ляпунова, оказывается устойчив по отношению к выбору генератора случайных чисел и методу решения системы уравнений. Замечательно, что в отдельных точках геодезическое отклонение обращается в нуль, т.е. на геодезической возникают сопряженные точки, соответствующие гравитационным линзам [6, 7].

Построив достаточно много реализаций случайного процесса K и соответствующего процесса z, можно вычислить первый и второй статистические моменты z и убедиться, что они растут с различными скоростями, причем обе эти скорости роста больше показателя Ляпунова. Для того чтобы интервал значений n, на котором определяются эти скорости роста, был достаточно длинным, нужно, чтобы размер выборки был достаточно велик для того, чтобы она содержала особо удачные для роста вектора z реализации. Численный эксперимент показывает, что для этого число реализаций, по которому вычисляется среднее, должно превосходить $5{\cdot}10^5$. Поскольку длина каждой реализации составляет примерно 10^2 чисел, то общее число независимых случайных чисел приближается к 10^8. Это еще посильно для сравнительно простых генераторов случайных чисел. Напротив, задача воспроизвести полмиллиона независимых решений какой-либо трехмерной задачи на развитие неустойчивости и сравнить полученные таким образом скорости роста различных статистических моментов с показателем Ляпунова не кажется реалистической. Даже если отвлечься от очевидных вычислительных проблем, просто хранение, обработка и анализ полученного таким образом массива информации представляется непростой задачей.

В настоящее время сформировавшееся на основе изучения статистики решений уравнения Якоби представление о характере перемежаемости при развитии неустойчивости в случайной среде является общепринятым (см., например, [8]), хотя цитированные выше работы были пионерскими в момент их публикации. Их тематика продолжена и развита в большом цикле работ, многие из которых были опубликованы в журнале “Вычислительные методы и программирование” в разные годы.

Заметим, что аналитическое вычисление показателя Ляпунова приводит к некоторому интегральному уравнению, которое известно еще из работ 60-х годов. Аналитически это уравнение решается лишь в исключительных и не очень актуальных случаях, а первое численное решение этого уравнения было представлено лишь в [9].

2025, **26** (1), 50–57. doi 10.26089/NumMet.v26r104

Для оценки практической значимости явления перемежаемости отметим, что скорости роста различных статистических моментов и показатель Ляпунова все же являются величинами одного порядка и различаются обычно на проценты или десятки процентов, а не в разы. Поэтому получение одной или нескольких реализаций трехмерной задачи все же дает приблизительное представление о развитии неустойчивости.

С другой стороны, возникает вопрос о том, насколько природные генераторы случайных чисел пригодны для того, чтобы количественно воспроизвести явление перемежаемости. Трудно представить себе генерацию каких-либо шумов, которые воспроизводились и фиксировались так, чтобы они могли рассматриваться как независимые и равнораспределенные, а число их приближалось к 10^8. В какой-то степени эту проблему удалось решить, заимствовав биржевые котировки [10, 11]. Замечательно, что этот естественный генератор случайных чисел, как оказалось, укладывается в концепции теории вероятностей хуже, чем современные стандартные генераторы случайных чисел. Однородность воспроизводимой таким образом последовательности независимых случайных чисел оказалась недостаточной для воспроизведения явления перемежаемости.

6. Компьютерный кластер для исследования свободно распадающихся каскадных моделей. Численное моделирование помогает ответить и на другой вопрос, связанный с проблемой перемежаемости. Для того чтобы возникла, скажем, какая-то особо благоприятная для роста магнитного поля конфигурация течения, нужно как-то создать большое разнообразие этих конфигураций. Понятно, что уравнения гидродинамики богаты различными эффектами, но не вполне очевидно, как же конкретно возникает это богатство течений. Исследовать этот вопрос путем многократного решения трехмерных задач не кажется плодотворным. Хотелось бы снова изучить этот вопрос на простых модельных уравнениях и экстраполировать результат на более реалистические случаи.

Современные гидродинамика и магнитная гидродинамика предлагают аппарат для построения таких моделей. Как известно, один из плодотворных подходов к изучению турбулентности был предложен А. Н. Колмогоровым [12], для обзора см., например, [13]. Он основан на использовании законов сохранения и состоит в подсчете баланса сохраняющихся в рассматриваемой задаче величин при их перемещении по спектру. В простейшем случае, который и рассматривал А. Н. Колмогоров, наклон спектра флуктуаций удается подобрать из размерностных соображений. Существует несколько способов формализации этой идеи в более сложных ситуациях, для изучения которых анализ размерностей уже недостаточен (см., например, [14]). В итоге возникают так называемые каскадные модели гидродинамической и магнитогидродинамической турбулентности. Последние успешно описывают генерацию магнитных флуктуаций механизмом мелкомасштабного динамо [15].

Если в систему не вкачивать каким-либо способом энергию, то решение под действием механизмов диссипации со временем, естественно, начинает затухать. Разумеется, это происходит даже тогда, когда вначале течение быстро возбуждает магнитное поле. Все это в целом изучается теорией свободно распадающейся турбулентности, которая в ряде случаев предлагает несложные скейлинги для этого затухания. Важно, что при этом решение остается флуктуирующим и не воспроизводится от одного численного эксперимента к другому буквально, если не воспроизводить тщательно начальные условия.

Уравнения каскадных моделей представляют собой системы нескольких десятков нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Естественно, они гораздо проще для численного решения, чем трехмерные нестационарные задачи. Тем не менее трудно представить себе исследователя, десятки раз решающего подобные однотипные задачи для того, чтобы изучить их статистические свойства.

Ситуация существенно изменилась при появлении компьютерных кластеров. Непосредственно при тестировании одного из компьютерных кластеров МГУ была рассмотрена задача, в которой каждый процессор независимо решал одну из свободно распадающихся каскадных моделей, а затем кластер сравнивал полученные эволюционные треки. При проведении этого исследования задача рассматривалась как чисто тестовая, однако немедленно выяснилось, что полученные решения хотя и следуют известным скейлингам затухания решения, но делают это чрезвычайно неравномерно. В результате [16, 17] образуется пучок расходящихся временны́х треков решений, вблизи границ которого выделяются решения, далеко отклоняющиеся от типичного поведения. Такие решения, в свою очередь, могут вносить вклад в формирование картины перемежаемости.

При обсуждении этого результата на одном из научных семинаров соответствующая работа была немедленно представлена академиком В. А. Садовничим для публикации в Докладах Академии наук [17].

Сейчас этот простой, но полезный прием является стандартным при изучении каскадных моделей [14], а в более широкой перспективе — при разработке и проведении лабораторных экспериментов по исследованию самовозбуждения магнитных полей в движущейся проводящей среде (см. для обзора [18]).

Отметим, что эти эксперименты во многом основаны на замечательном достижении отечественной науки — динамо Пономаренко [19].

7. Выводы. Мы рассмотрели несколько примеров того, как сложно взаимодействуют между собой численные и аналитические подходы при исследовании сложных процессов, для которых прямое численное моделирование в принципе возможно, но не в полной мере отвечает на реально интересующие исследователя вопросы, так что его приходится разумно сочетать с аналитическими методами. Представляется, что по мере усложнения самих методов прямого численного моделирования и их физической интерпретации такая помощь со стороны аналитических методов будет все более востребованной.

Список литературы

1. *Brandenburg A., Sokoloff D., Subramanian K.* Current status of turbulent dynamo theory. From large-scale to small-scale dynamos // Space Sci. Rev. 2012. **169**, N 1–4. 123–157. doi 10.1007/s11214-012-9909-x.
2. *Illarionov E.A., Sokoloff D.D.* Finite memory time and anisotropy effects for initial magnetic energy growth in random flow of conducting media // Phys. Rev. E. 2021. **104**, N 1. id.015214. doi 10.1103/PhysRevE.104.015214.
3. *Зельдович Я.Б.* Наблюдения во Вселенной, однородной в среднем // Астрономический журнал. 1964. **41**, № 1. 19–24.
4. *Illarionov E.A., Sokoloff D.D.* Relative efficiency of three mechanisms of vector field growth in a random media // Phys. Rev. E. 2023. **107**, N 4. id.044110. doi 10.1103/PhysRevE.107.044110.
5. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // Успехи физических наук. 1987. **152**, № 1. 3–32.
6. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезической со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 291–296.
7. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрономический журнал. 2005. **82**, № 7. 584–589.
8. *Sirota V.A., Il'yn A.S., Kopyev A.V., Zybin K.P.* Lagrangian stochastic integrals of motion in isotropic random flows // Phys. Fluids. 2024. **36**, N 2. id021701. doi 10.1063/5.0189534.
9. *Илларионов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**, № 1. 218–225.
10. *Калинин А.О., Соколов Д.Д.* Перемежаемость векторных полей и естественные генераторы случайных чисел // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**, № 1. 1–6. doi 10.26089/NumMet.v17r101.
11. *Калинин А.О., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Перемежаемость векторных полей и генераторы случайных чисел // Вестник МГУ. Серия 3: физика, астрономия. 2017. № 5. 17–21.
12. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. **30**, № 4. 299–303.
13. *Фрик П.Г.* Турбулентность: модели и подходы. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010.
14. *Plunian F., Stepanov R., Frick P.* Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // Physics Reports. 2013. **523**, N 1. 1–60. doi 10.1016/j.physrep.2012.09.001.
15. *Frick P., Sokoloff D.* Cascade and dynamo action in a shell model of magnetohydrodynamic turbulence // Phys. Rev. E. 1998. **57**, N 4. 4155–4164. doi 10.1103/PhysRevE.57.4155.
16. *Антонов Т.Ю., Фрик П.Г., Соколов Д.Д.* Долговременная эволюция свободно распадающейся МГД-турбулентности // Докл. Akad. Nauk. 2001. **377**, № 2. 170–172.
17. *Antonov T., Lozhkin S., Frick P., Sokoloff D.* A shell model for free decaying MHD-turbulence and the role of the magnetic Prandtl number // Magnetohydrodynamics. 2001. **37**, N 1/2. 87–92. doi 10.22364/mhd.
18. *Соколов Д.Д., Степанов Р.А., Фрик П.Г.* Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // Успехи физ. наук. 2014. **184**, № 3. 313–335.
19. *Пономаренко Ю.Б.* К теории гидромагнитного динамо // Прикл. мех. техн. физ. 1973. № 6. 47–51.

Поступила в редакцию
27 ноября 2024 г.

Принята к публикации
11 января 2025 г.

Информация об авторе

Дмитрий Дмитриевич Соколов — д.ф.-м.н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 1, стр. 4, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. A. Brandenburg, D. Sokoloff, and K. Subramanian, "Current Status of Turbulent Dynamo Theory. From Large-Scale to Small-Scale Dynamos," Space Sci. Rev. **169** (1–4), 123–157 (2012). doi 10.1007/s11214-012-9909-x.
2. E. A. Illarionov and D. D. Sokoloff, "Finite Memory Time and Anisotropy Effects for Initial Magnetic Energy Growth in Random Flow of Conducting Media," Phys. Rev. E **104** (1), id.015214 (2021). doi 10.1103/PhysRevE.104.015214.
3. Ya. B. Zel'dovich, "Observations in a Universe Homogeneous in the Mean," Astron. Zh. **41** (1), 19–24 (1964) [Sov. Astron. **8** (1), 13–16 (1964)].
4. E. A. Illarionov and D. D. Sokoloff, "Relative Efficiency of Three Mechanisms of Vector Field Growth in a Random Media," Phys. Rev. E **107** (4), id.044110 (2023). doi 10.1103/PhysRevE.107.044110.
5. Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaĭkin, and D. D. Sokoloff, "Intermittency in Random Media," Usp. Fiz. Nauk **152** (1), 3–32 (1987) [Soviet Phys. Usp. **30** (5), 353–369 (1987)].
6. M. E. Artyushkova and D. D. Sokoloff, "Numerical Modeling for the Conjugated Point Distribution at a Geodesic Line with Random Curvature," Numerical Methods and Programming **5** (1), 291–296 (2004).
7. M. E. Artyushkova and D. D. Sokoloff, "Numerical Modeling of the Solutions of the Jacobi Equation on a Geodesic with Random Curvature," Astron. Zh. **82** (7), 584–589 (2005) [Astron. Rep. **49** (7), 520–525 (2005)]. doi 10.1134/1.1985949.
8. V. A. Sirota, A. S. Il'yn, A. V. Kopyev, and K. P. Zybin, "Lagrangian Stochastic Integrals of Motion in Isotropic Random Flows," Phys. Fluids **36** (2), id021701 (2024). doi 10.1063/5.0189534.
9. E. A. Illarionov, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, "Stationary Distribution of Product of Matrices with Random Coefficients," Numerical Methods and Programming **13** (1), 218–225 (2012).
10. A. O. Kalinin and D. D. Sokoloff, "Intermittency of Vector Fields and Natural Random Number Generators," Numerical Methods and Programming **17** (1), 1–6 (2016). doi 10.26089/NumMet.v17r101.
11. A. O. Kalinin, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, "The Intermittency of Vector Fields and Random-Number Generators," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 3: Fiz. Astron., No. 5, 17–21 (2017) [Moscow Univ. Phys. Bull. **72** (5), 449–453 (2017)]. doi 10.3103/S0027134917050071.
12. A. N. Kolmogorov, "The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers," Dokl. Akad. Nauk SSSR **30** (4), 299–303 (1941).
13. P. G. Frick, *Turbulence: Approaches and Models* (Regular and Chaotic Dynamics, Izhevsk, 2010) [in Russian].
14. F. Plunian, R. Stepanov, and P. Frick, "Shell Models of Magnetohydrodynamic Turbulence," Phys. Rep. **523** (1), 1–60 (2013). doi 10.1016/j.physrep.2012.09.001.
15. P. Frick and D. Sokoloff, "Cascade and Dynamo Action in a Shell Model of Magnetohydrodynamic Turbulence," Phys. Rev. E **57** (4), 4155–4164 (1998). doi 10.1103/PhysRevE.57.4155.
16. T. Yu. Antonov, P. G. Frick, and D. D. Sokoloff, "Long-Term Evolution for the Free-Decay MHD-Turbulence," Dokl. Akad. Nauk **377** (2), 170–172 (2001).
17. T. Antonov, S. Lozhkin, P. Frick, and D. Sokoloff, "A Shell Model for Free Decaying MHD-Turbulence and the Role of the Magnetic Prandtl Number," Magnetohydrodynamics **37** (1/2), 87–92 (2001). doi 10.22364/mhd.
18. D. D. Sokoloff, R. A. Stepanov, and P. G. Frick, "Dynamo: from an Astrophysical Model to Laboratory Experiments," Usp. Fiz. Nauk **184** (3), 313–335 (2014) [Phys. Usp. **57** (3), 292–311 (2014)]. doi 10.3367/UFNr.0184.201403g.0313.
19. Yu. B. Ponomarenko, "Theory of the Gydromagnetic Generator," Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz., No. 6, 47–51 (1973) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **14** (6), 775–778 (1973)]. doi 10.1007/BF00853190.

Received
November 27, 2024

Accepted for publication
January 11, 2025

Information about the author

Dmitry D. Sokoloff — Dr. Sci., Professor; Lomonosov Moscow State University, Department of Physics, Leninskie Gory, 1, building 4, 119991, Moscow, Russia.