



doi 10.26089/NumMet.v26r316

УДК 519.853.6

О градиенте в задачах оптимизации нестационарных систем с распределенным управлением

В. К. Толстых

Донецкий государственный университет,

Донецк, ДНР, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-9055-1102, e-mail: mail@tolstykh.com

Аннотация: Впервые затрагивается проблема определения градиента, а не производной Фréше, функционала $J(u)$ с распределенным управлением $u(x)$ для численной оптимизации нестационарных систем в частных производных. Показано, что управление следует рассматривать как функцию и пространства x , и времени t . Исследуется управляемость с учетом отображения пространственно-временного градиента $\nabla J(u; x, t) \rightarrow \nabla J(u; x)$ традиционным интегрированием по времени и проекцией на линию x в необходимый момент t . Рассматриваются примеры: идентификация шероховатости открытого русла, оптимальный дизайн формы сопла гидропушки. Выявлено, что оптимизация с новой формой градиента на линии реализует лучшее приближение к оптимуму. При оптимизации формы сопла найдены новые оптимальные формы.

Ключевые слова: градиент, оптимизация, управляемость, открытый канал, сопло.

Для цитирования: Толстых В.К. О градиенте в задачах оптимизации нестационарных систем с распределенным управлением // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 3. 229–244. doi 10.26089/NumMet.v26r316.

On the gradient in optimization problems of nonstationary systems with distributed control

Victor K. Tolstykh

Donetsk State University,

Donetsk, DPR, Russia

ORCID: 0000-0001-9055-1102, e-mail: mail@tolstykh.com

Abstract: For the first time, the problem of determining the gradient, not the Fréchet derivative, of a functional $J(u)$ for numerical optimization problems with non stationary partial differential systems under control $u(x)$ is discussed. It is shown that control should be considered as a function of both space x and time t . The controllability of such a task is investigated, taking into account the mapping of the space-time gradient $\nabla J(u; x, t) \rightarrow \nabla J(u; x)$ by traditional time integration and projection onto the line x at the right moment t . Examples are considered: identification of the roughness of an open channel, optimal design of the nozzle shape of a hydraulic gun. It is revealed that optimization with a new gradient form on the line implements the best approximation to the optimum. When optimizing the nozzle shape, new optimal shapes were found.

Keywords: gradient, optimization, controllability, open channel, nozzle.

For citation: V. K. Tolstykh, “On the gradient in optimization problems of nonstationary systems with distributed control,” Numerical Methods and Programming. **26** (3), 229–244 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r316.



1. Введение. Оптимизация систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями в частных производных, — сложная задача, особенно в случае нестационарных систем. Оптимизируемые параметры-управления u в уравнениях системы могут быть функциями пространства или времени. При этом задача минимизации или максимизации сопутствующего целевого функционала $J(u)$ превращается в бесконечномерную экстремальную задачу. Получение градиента ∇J для такой задачи, как будет показано далее, оказывается неоднозначной процедурой. Это связано с тем, что обсуждаемые управлении, определенные внутри области функционирования системы, имеют меньшее количество независимых переменных, чем сама система.

В настоящей работе рассматривается проблема получения ∇J для пространственно-распределенного управления в нестационарных процессах. В частности, рассматриваются одномерные волновые процессы, описываемые гиперболическими системами уравнений. Для таких систем типично, когда их состояние $v(x, t)$ управляет функцией $u(x)$. При этом, несмотря на динамичность состояния системы, для любого целевого функционала J должен быть определен распределенный, не зависящий от времени градиент $\nabla J(u; x)$, на основе которого возможен направленный поиск оптимальной функции $u(x)$.

В обсуждаемом далее прямом экстремальном подходе (Ф. П. Васильев [1], Ж. Сеа [2], В. К. Толстых [3]) задача оптимизации формулируется как

$$u_*(x) = \arg \min_{u \in L_2(S)} J(u), \quad x \in S = (x_a, x_b),$$

где $u_*(x)$ — оптимальное на S управление, доставляющее глобальный минимум функционалу $J(u)$, $L_2(S)$ — пространство функций с интегрируемым квадратом, заданных на S . Сформулированная задача минимизации — бесконечномерная (для бесконечно большого количества точек на интервале S). Для ее решения целесообразно использовать метод, предложенный В. К. Толстых [3–6], с регулируемым направлением спуска относительно градиента (МНРСг; анг. Adjustable Descent Direction Method relative to the gradient, ADDMg):

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) - b^k \alpha^k(x) \nabla J(u^k; x), \quad \text{равномерно на } S, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где b^k — шаговый множитель, задающий глубину спуска по $J(u)$ на каждой итерации k , $\alpha^k(x)$ — параметр регулирования направления спуска для обеспечения равномерной сходимости к функции $u_*(x)$ и компенсации некоторого типа помех. Для квадратичной выпуклой оптимизации можно задавать $\alpha^k = \alpha^0 \equiv \alpha$. Если задать $\alpha(x) = 1$, то получим традиционный градиентный метод (ГМ; анг. Gradient Method, GM), но без контроля равномерной сходимости.

Поскольку рассматриваемые далее примеры задач вынуждены из физических соображений ограничивать величину шагов итераций (типично для волновых процессов), то вычисление для них оптимального $b^k = \min_b J(u^k - b\alpha \nabla J^k)$ методами одномерного линейного поиска не всегда возможно. Целесообразно внутри каждой итерации метода (1) делать адаптивный шаг по алгоритму, предложенному В. К. Толстых [3, 7]:

Алгоритм 1. Адаптивный шаг МНРСг для выпуклого J (метод 1)

Algorithm 1. Adaptive step of the ADDMg for convex J (method 1)

```

1: if  $J^k < rJ^{k-1}$  then
2:    $b^k = b_1 b^{k-1}$ 
3:    $u^{k+1} = u^k - b^k \alpha \nabla J^k$ 
4:    $k = k + 1$ 
5: else
6:   while  $J^k \geq rJ^{k-1}$  do
7:      $b^{k-1} = b_2 b^{k-1}$ 
8:      $u^{k+1} = u^{k-1} - b^{k-1} \alpha \nabla J^{k-1}$ 
9:     if  $b^{k-1} \approx 0$  then stop iterations  $k$ 
10:    end while
11:  end if

```

Коэффициенты, используемые в алгоритме 1, позволяют учесть следующие факторы: $r \geq 1$ — возможную поправку на помехи, $b_1 \geq 1$ — усиление сходимости, $b_2 < 1$ — ослабление (всё далее принято $b_2 = 0.3$). Начальное значение b^0 должно выбираться из условия $J^1 < J^0$. Решение систем уравнений в



частных производных всегда связано с большими и приближенными вычислениями, поэтому для предотвращения преждевременного завершения сходимости из-за вычислительных помех иногда целесообразно в алгоритме 1 “смягчать” условие $J^k < J^{k-1}$ параметром $r \gtrsim 1$.

Градиент, в общем случае, определяется посредством варьирования функционала и дифференциальных уравнений системы на всей, например прямоугольной, пространственно-временной области $\Omega = (x_a, x_b) \times (t_0, t_1)$ функционирования системы. При этом первая вариация приобретает вид скалярного произведения:

$$\delta J = \langle J'_u, \delta u \rangle_{L_2(S)}, \quad (2)$$

где J'_u — функциональная производная Фреше. Ее часто называют градиентом, но это неверно.

Производная Фреше, как и градиент, конечно же обращается в нуль в оптимуме (при отсутствии ограничений на управление). При этом необходимое условие оптимальности принимает вид:

$$J'_u(u_*; x) = 0, \quad x \in S.$$

Однако найти корень u_* этого нелинейного бесконечномерного уравнения численными методами, применимыми в окрестности $u = u_* + \delta u$, в общем случае невозможно.

Если целью исследования является не решение задачи оптимизации, а только получение необходимого условия оптимальности, то можно ограничиться выражением J'_u . Именно этим и занимается большинство теорий оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Производную Фреше можно найти различными способами [1, 2, 8, 9]. Если дифференциальные уравнения задачи имеют аналитическое решение, то его можно подставить в целевой функционал, получить явную зависимость $J(u)$ и взять производную J'_u . Можно пытаться обобщить принцип максимума Понтрягина на задачи с частными производными. Если это удается, то в полученном необходимом условии оптимальности (с сопряженной задачей) будет присутствовать J'_u . В этих подходах не рассматриваются нелинейные уравнения, не допускается произвольная форма целевого функционала и управления. Наиболее общим подходом следует считать классическое вариационное исчисление. Вариационные методы для оптимизации распределенного управления $u(x)$ прекрасно описаны в работе [9]. Однако все вариационное исчисление завершается при получении условия (2). К сожалению, ни в одном из указанных подходов (как в [9], так и в последующих исследованиях) не обсуждаются проблемы получения именно градиента, а не производной Фреше. Нигде не затрагиваются вопросы неоднозначности определения распределенного градиента $\nabla J(u; x)$ в динамических системах управления.

Производная Фреше $J'_u(u; x)$ может не быть чувствительна к управлению $u(x)$ на всем S или на частях S ненулевой меры. Поэтому J'_u в общем случае не указывает достоверное направление коррекции управления на S . Из производной J'_u можно получить градиент ∇J с однозначной чувствительностью к управлению $u(x)$ на S только при выполнении условий управляемости. На сегодняшний день само понятие управляемости является общепризнанным только для систем в обыкновенных дифференциалах. Попытки обобщения на уравнения в частных производных далеко не всегда приводят к успеху, поэтому далее мы будем использовать понятие управляемости и подход к анализу управляемости, предложенные В. К. Толстых [10].

Нестационарные задачи с распределенным управлением $u(x)$, как мы уже писали, обладают особенностями и в постановке, и в форме градиента $\nabla J(u; x)$. Управление, зависящее только от x , должно быть определено во всей пространственно-временной области Ω функционирования системы, иначе его нельзя использовать на Ω , поэтому управление следует рассматривать как функцию от x, t на Ω , но не меняющуюся со временем t . Это принципиально важно для формирования градиента в нестационарных задачах.

В таких задачах область определения управления S является проекцией из Ω на пространственную ось x . Оператор проецирования P_x может быть реализован несколькими способами. Например, это может быть традиционное интегрирование на Ω по времени или проецирование на линию $S \times t_g \subset \Omega$ в некоторый момент времени $t_g \in (t_0, t_1)$.

Рассмотрим примеры этих двух способов определения распределенного управления $u(x)$ на Ω :

- 1) $u \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t)$, которое изменяется по x и не изменяется со временем;
- 2) $u \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) = u(x, t_g) \forall t$, которое может регулироваться по x только в некоторый момент t_g , а результат регулировки действителен для всего времени.

Тогда вариация $\delta u \in L_2(\Omega)$ будет или $\delta u(x, t)$ на Ω , или $\delta u(x, t_g)$ на линии $S \times t_g$ (вне этой линии $\delta u = 0$ на Ω). При этом первая вариация δJ целевого функционала (2) относительно $\delta u \in L_2(\Omega)$ примет соответствующие формы:

$$\begin{aligned} 1) \quad \delta J &= \int_{x_a}^{x_b} \int_{t_0}^{t_1} \Phi \delta u \, dt dx, \quad J'_u(u; x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi \, dt \text{ на } S; \\ 2) \quad \delta J &= \int_{x_a}^{x_b} (\Phi \delta u)|_{t_g} \, dx, \quad J'_u(u; x) = \Phi|_{t_g} \text{ на } S. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь функция $\Phi(x, t)$ — некоторое выражение, полученное в результате варьирования дифференциальных уравнений конкретной системы. Далее мы это покажем.

В первом случае мы получаем производную Фреше J'_u как результат действия оператора проецирования $P_{x, \bar{t}}(\Phi) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi \, dt$ с интегрированием (осреднением) по времени, что соответствует классическому вариационному исчислению. Во втором случае — оператор $P_{x, t_g}(\Phi) = \Phi|_{t_g}$ с проецированием на линию $S \times t_g$. В зависимости от оператора P_x , с учетом условий управляемости, мы будем получать разные выражения градиента целевого функционала на основе производной Фреше. Далее мы рассмотрим действие операторов проецирования на примере решения двух задач оптимизации нестационарных гиперболических систем.

2. Градиент в задаче идентификации шероховатости открытого русла.

2.1. Постановка задачи. Для управления гидротехническими сооружениями на открытых каналах требуются адекватные модели нестационарных течений воды в русле. Обычно такие течения описываются квазидномерной квазилинейной системой Сен-Венана:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + F = 0, \quad \text{на } \Omega = (x_a, x_b) \times (t_0, t_1), \quad (4)$$

где $A(v) = \begin{pmatrix} 2w & B(c^2 - w^2) \\ 1/B & 0 \end{pmatrix}$, $F(v, u) = \begin{pmatrix} F_{\text{fr}} - w^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}|_Z \\ -q/B \end{pmatrix}$. Состояние системы $v = \begin{pmatrix} Q \\ Z \end{pmatrix}$, где $Q(x, t)$ — расход воды в потоке от верхнего левого створа x_a к правому нижнему створу x_b , $Z(x, t)$ — уровень свободной поверхности потока, $w = Q/\sigma$ — скорость потока, осредненная по живому поперечному сечению площадью $\sigma(x, Z)$, $B(x, Z)$ — ширина потока поверху, $c = \sqrt{g\sigma/B}$ — скорость распространения малых возмущений в потоке, равная скорости звука в воде, g — ускорение свободного падения, $q(x, t)$ — боковой приток.

На левой границе $\Gamma_a = x_a \times (t_0, t_1)$ зададим уровень Z , на правой границе $\Gamma_b = x_b \times (t_0, t_1)$ — расход Q , начальные условия $v(x, t_0)$ зададим на $\Gamma_0 = [x_a, x_b] \times t_0$. Член трения:

$$F_{\text{fr}} = \frac{gQ|Q|}{\sigma R C^2}, \quad C = \frac{1}{u} R^{\frac{1}{6}},$$

где $R(x, Z)$ — гидравлический радиус, C — коэффициент Шези. Управлением является коэффициент шероховатости $u(x)$, $x \in S = (x_a, x_b)$, который присутствует в коэффициенте Шези и характеризует вязкое трение воды (диссиацию энергии) в пристеночной зоне русла.

Необходимо найти $u(x)$, доставляющее минимум функционалу

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} I|_{\omega} \, dt, \quad I(v; t)|_{\omega=\Gamma_b} = (Z(x_b, t) - Z_e(t))^2. \quad (5)$$

Функционал задается в нижнем створе канала на основе экспериментально наблюдаемого уровня воды $Z_e(t)$. Это задача параметрической идентификации оптимальной функции $u(x)$ [11].



Первая вариация (2) для функционала (5) приводит к сопряженной линейной гиперболической задаче [3], в которой состояние определяется вектором $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + A^T \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbb{F}^* f &= 0, \quad \text{на } \Omega, \\ 2w f_1 + \frac{1}{B} f_2 &= 0, \quad \text{на } \Gamma_a, \\ B(c^2 - w^2) f_1 + I'_Z|_\omega &= 2(Z - Z_e), \quad \text{на } \Gamma_b, \\ f &= 0, \quad \text{на } \Gamma_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь матрица $\mathbb{F}^* = \begin{pmatrix} \frac{2F_{fr}}{Q} & \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x} \\ -F_{fr} \left(\frac{B}{\sigma} + \frac{4}{3R} \frac{\partial R}{\partial Z} \right) + w^2 \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_Z - g \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Big|_Z & \frac{1}{B^2} \left(q - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{\partial B}{\partial Z} \end{pmatrix}$. Граница терминального состояния $\Gamma_1 = [x_a, x_b] \times t_1$ является начальным условием для решения сопряженной задачи в обратном по времени направлении.

Решение сопряженной задачи (6) формирует производные Фреше J'_u в выражениях вариаций (3). Если к производным Фреше применить условия управляемости (идентифицируемости) [10], то получим градиенты:

$$1) \quad \nabla J = \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt; \tag{7}$$

$$2) \quad \nabla J = \Phi|_{t_g}. \tag{8}$$

Здесь функция $\Phi = \frac{2F_{fr}}{u} f_1$ определена на Ω и зависит от первой компоненты сопряженного состояния.

2.2. Анализ управляемости (идентифицируемости) для разных форм градиента. Поскольку собственные числа матрицы A и транспонированной A^T одинаковы, то характеристики волновых возмущений первого и второго семейства $\xi_{1,2}$ в направлениях $\frac{d\xi_{1,2}}{dt} = w \pm c$ исходной (4) и сопряженной (6) задач будут одинаковыми. Сопряженные волны возникают на границе Γ_b из-за ненулевой производной $I'_Z|_\omega$ и движутся по тем же траекториям-характеристикам ξ_1 , что и в исходной задаче, но в обратном направлении. Именно они переносят информацию о целевом функционале с правой границы x_b канала на всю его длину.

В работе [10] получены условия управляемости для интегрального градиента (7). На рис. 1 показана теоретическая (без учета различных помех) область управляемости $\Omega \subset \Omega$ для определения градиента из производной Фреше. Требование управляемости задает минимально достаточную область ω_{min} функционала J . Заштрихованный треугольник управляемости Ω определяется верхней замыкающей характеристикой ξ_1 и задается условием

$$t_1 = t_0 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c}.$$

При уменьшении ω задача оптимизации становится некорректной (производная Фреше J'_u не будет равна градиенту ∇J , градиент слева на S не будет определен), а с увеличением ω точность оптимизации ухудшается вплоть до полной невозможности идентификации (постепенная потеря в производной J'_u направления градиента из-за накопления помех, опять-таки слева на S).

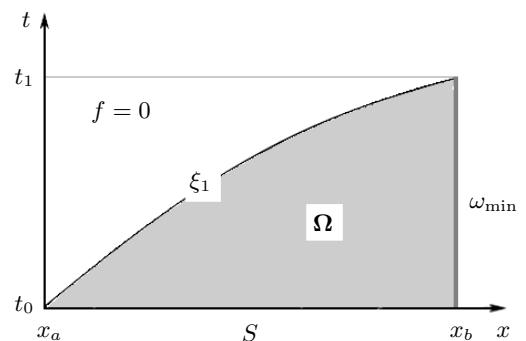


Рис. 1. Область управляемости Ω с минимально достаточной областью ω_{min}

Fig. 1. The controllability domain Ω with a minimal sufficient domain ω_{min}

Область управляемости Ω с ω_{\min} является корректной для проекций $P_x(\Phi)$, когда $J'_u = \nabla J$.

В рассматриваемой задаче нельзя игнорировать диссипацию и неодномерность потока. Замыкающая характеристика ξ_1 , изображенная на теоретическом рис. 1, демонстрирует следующие условности. Во-первых, она указывает всего лишь на начало возникновения волны (малого возмущения) в потоке воды в момент t_0 в левом створе и начало прихода этой волны в момент t_1 к правому створу. Во-вторых, она указывает аналогичное начало возникновения и начало прихода сопряженной волны от правого створа к левому. Понятно, что начало волн в обоих случаях будет сопровождаться, с одной стороны, очень малым изменением уровня Z для формирования справа значимой величины I'_Z , и с другой стороны, — соответствующей малой величиной фронта сопряженной волны f_1 для формирования в левой части русла уверенного значения градиента ∇J .

Если принять во внимание еще и вычислительные погрешности, то на практике, чтобы волны достаточно заметно проявлялись в целевом функционале и далее сформировали оптимальное значение градиента на всем S , волнам необходимо дать дополнительное время t_ϵ — время заметного проявления фронта волн после появления впереди идущих малых возмущений.

Получаем практическое условие управляемости (идентифицируемости):

$$t_1 = t_0 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c} + t_\epsilon. \quad (9)$$

Такое условие несколько увеличивает область управляемости Ω , которая для (9) схематически изображена на рис. 2 а. На рис. 2 а, б по оси ординат показано “ориентированное” время, которое далее было использовано в тестовых расчетах для модели Северо-Крымского канала длиной 20 км.

Время t_ϵ в (9) не должно быть слишком большим, чтобы появившаяся область влияния левого створа (в виде волн на характеристиках ξ_2 , как отражения от границы x_a волн, пришедших по ξ_1) не привела к неоднозначности решения f (подробности см. в [10]). Конкретное значение времени t_ϵ определяется в ходе вычислительного эксперимента.

Таким образом, для интегрального градиента (7) имеет место корректное проецирование из Ω на S функции Φ , при этом производная Фреше $J'_u = P_{x,\bar{t}}(\Phi) = \nabla J$.

Перейдем к выражению следующего градиента (8) с проецированием функции Φ на линию $S \times t_g$. Обращаем внимание, что не всегда можно принять $t_g = t_0$, поскольку в начальный момент времени в нижнем створе русла может быть уровень воды $Z(x_b, t_0) = Z_e(t_0)$ и, следовательно, $I'_Z|_\omega = 0$ и $f = 0$. Это происходит, если начальное течение при t_0 было установившимся. Именно такой тестовый пример мы будем далее рассматривать. Поэтому следует линию проекции градиента немножко поднять, как показано на рис. 2 б. При этом на такую же величину необходимо поднять и время t_1 .

Мы получаем на рис. 2 б область управляемости Ω такую же, как и на рис. 2 а, но поднятую на 5 мин. Тогда возможно корректное проецирование P_{x,t_g} функции Φ из области управляемости Ω на линию $S \times t_g$, при этом производная Фреше $J'_u = P_{x,t_g}(\Phi) = \nabla J$.

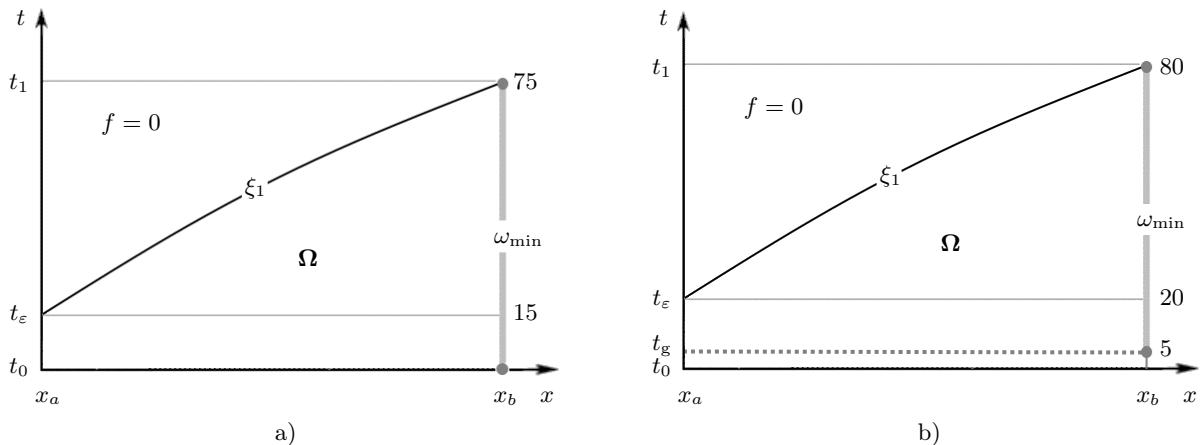


Рис. 2. Области определения градиентов: а) для интегрального (7); б) для градиента (8) с проекцией на линию

Fig. 2. Domains of gradients: a) for the integral (7); b) for the gradient (8) with line projection



Теперь рассмотрим пример тестовой идентификации распределенного коэффициента шероховатости на основе обоих градиентов (7) и (8).

2.3. Тестирование. Тестовый канал соответствовал одному из участков Северо-Крымского канала длиной $x_b - x_a = 20$ км с поперечным сечением в форме трапеции и уклоном дна $i = 0.0001$.

Глубина слева 3.6 м, расход справа $107 \text{ м}^3/\text{с}$. Подробно данные канала описаны в [3]. Решение обеих задач (4) и (6) реализовывалось методом характеристик на сетке с $\Delta x = 500 \text{ м}$, $\Delta t \approx 73 \text{ с}$. Время прохода характеристики ξ_1 через весь канал приблизительно 60 мин. Согласно условию идентифицируемости (9) для обоих градиентов (7), (8) были заданы значения времени t_1, t_ε, t_g , указанные на рис. 2, время $t_0 = 0$.

Тесты оптимизации строились следующим образом. Начальный уровень воды рассчитывался из условия установившегося течения при следующем тестовом “оптимальном” управлении:

$$u_*(x) = 0.025 + 0.0075 \cos \left(\pi + 2\pi \frac{x - x_a}{x_b - x_a} \right). \quad (10)$$

Полученный уровень справа считался экспериментальным Z_e . Далее задавалось начальное приближение $u^0(x) = 0.04$ и начиналось нестационарное течение. Затем решалась обратная задача о восстановлении оптимального управления (10) по целевому функционалу (5). Точность идентификации задавалась относительно высокой степенью показаний гидротехнического оборудования:

$$\Delta_{\max} Z = \max_t |Z(x_b, t) - Z_e(t)| \leq 5 \text{ мм.}$$

Для минимизации J применялся МРНСГ (1) с параметром

$$\alpha(x) = \left| \frac{0.1u^0}{\nabla J(u^0; x)} \right| \quad (11)$$

при $b^0 = 1$. Также применялся ГМ ($\alpha = 1$) при $b^0 = 0.5/\|\nabla J^0\|$. Спуск с оптимальными b^k (по методам J. Nocedal, S. Wright [12] с условием Вольфе) в некоторых вычислениях приводил к абсурдной шероховатости $u(x) \leq 0$ где-либо на S . Поэтому, для b^k использовался адаптивный алгоритм 1 с $r = 1.02$, $b_1 = 1.1$.

На рис. 3 а, б показано начальное управление (шероховатость русла) и соответствующие ему начальные значения градиентов (7) и (8). Видно, что функции $\nabla J(u^0; x)$ существенно разные. На их порядок можно не обращать внимание, в экстремальных алгоритмах он выравнивается шаговым множителем b^k . Важен изгиб функций и их знак. Знак у них одинаковый и верно указывает, что надо двигать начальное управление u^0 вниз к u_* . А вот изгиб кажется “разумным” только в градиенте (8) с проекцией на линию. Интегральное проецирование в градиенте (7) ни в какой степени не соответствует изгибам оптимума u_* .

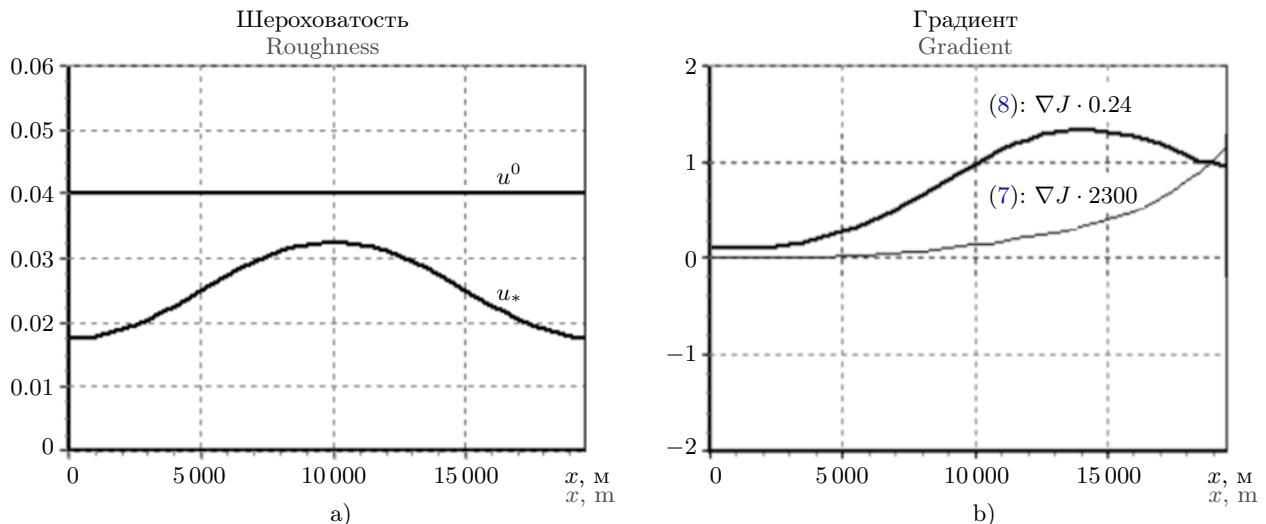


Рис. 3. Задача о канале: а) начальное и оптимальное управления; б) градиенты (7), (8)

Fig. 3. Channel problem: a) initial and optimal controls; b) gradients (7), (8)

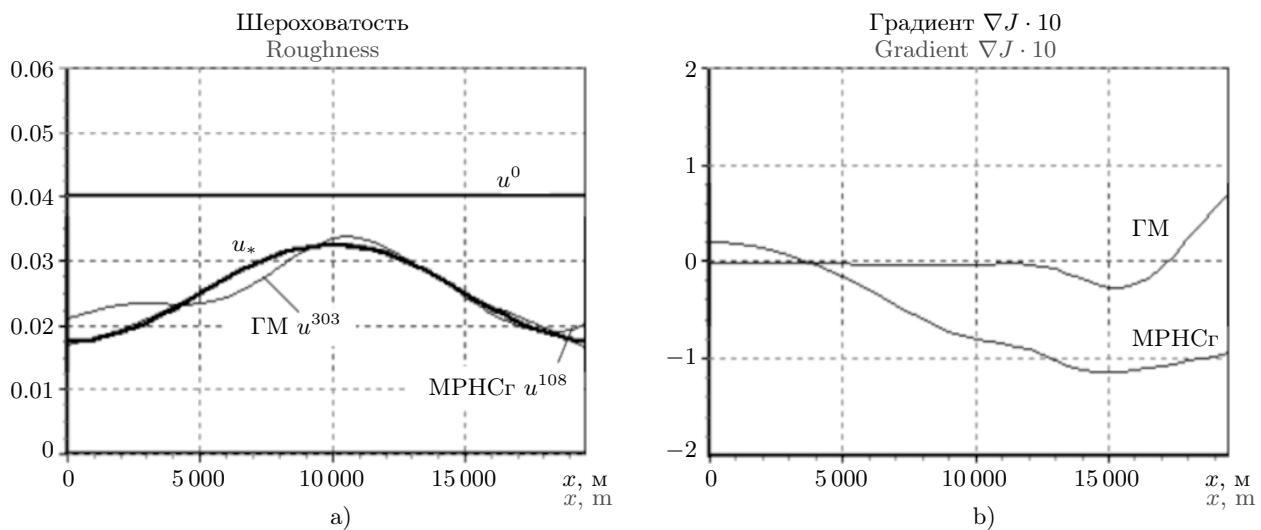


Рис. 4. Задача о канале: результаты оптимизации ГМ, МРНСг для интегрального градиента (7)

Fig. 4. Channel problem: results of optimization by GM, ADDMg for the integral gradient (7)

Более того, в начале канала (левая часть градиента) значение градиента (7) практически нулевое. Это означает, что здесь сходимость, как минимум на начальных итерациях, будет плохая.

На рис. 4 а показаны результаты оптимизации посредством ГМ и МРНСг для интегрального градиента (7). Видно, что ГМ, без выравнивания чувствительности градиента к управлению параметром α , хуже приближается к оптимуму и завершает сходимость при количестве итераций $k = 303$. В то же время МРНСг обеспечил очень хорошее совпадение с точным решением за существенно меньшее число итераций $k = 108$. Здесь полученное управление u^{108} отличается от точного маленьkim “хвостиком” в конце канала.

О конечных функциях градиента, изображенных на рис. 4 б, можно сказать следующее. Во-первых, они обе меняют знак вдоль канала. Именно меняющийся знак градиента, а не его абсолютное значение (кстати, их абсолютные значения стали соизмеримы), при подходе к оптимуму с перешагиваниями и возвратами на частях S , позволяет приблизиться к u_* с высокой точностью. Во-вторых, значение $\nabla J(u^{303}; x)$, полученное ГМ, очень близко к нулю в начале канала, что мы отмечали еще при приближении u^0 (рис. 3). Это привело к замедленной сходимости к $u_*(x)$ в начале канала. В-третьих, значение $\nabla J(u^{108}; x)$ в МРНСг вдоль всего канала имеет значительный потенциал для заметного смещения управления u^{108} к оптимуму. Наличие параметра $\alpha(x)$ (11) обеспечило МРНСг хорошую, быструю сходимость к точному решению $u_*(x)$ для любого x .

Рассмотрим оптимизацию для градиента (8) с проекцией на линию. Результаты представлены на рис. 5. Здесь ГМ и МРНСг продемонстрировали примерно одинаковые результаты с малым количеством итераций, соответственно $k = 110$ и $k = 82$. Градиенты в обоих методах уменьшились на четыре порядка по сравнению с предыдущим случаем оптимизации для интегрального градиента. Осциллирующий характер градиентов относительно нулевого значения вдоль всего канала говорит о многократном пересечении оптимума и готовности к дальнейшей сходимости к $u_*(x)$. Для рассматриваемого градиента (8) выравнивание его чувствительности к управлению параметром α оказалось излишним, хотя и сэкономило количество итераций.

Заметим, что при градиенте (8) с увеличением точности идентификации до $\Delta_{\max} Z \leq 1 \text{ мм}$ управление-шероховатость u^k визуально полностью совпадает с u_* .

Таким образом, во-первых, обе формы градиента являются корректными и могут использоваться для решения рассмотренной задачи оптимизации. Во-вторых, градиент (8) с проекцией на линию продемонстрировал более высокую и одинаковую на S чувствительность к управлению по сравнению с градиентом (7) при интегральном проецировании. Благодаря этому градиент на линии потребовал существенно меньшее количество итераций для достижения заданной точности оптимизации.

Несколько проигрышную оптимизацию с интегральным градиентом можно объяснить излишним суммированием информации от источника $I'_Z|_\omega$, приходящей в каждую точку x по разным характеристи-

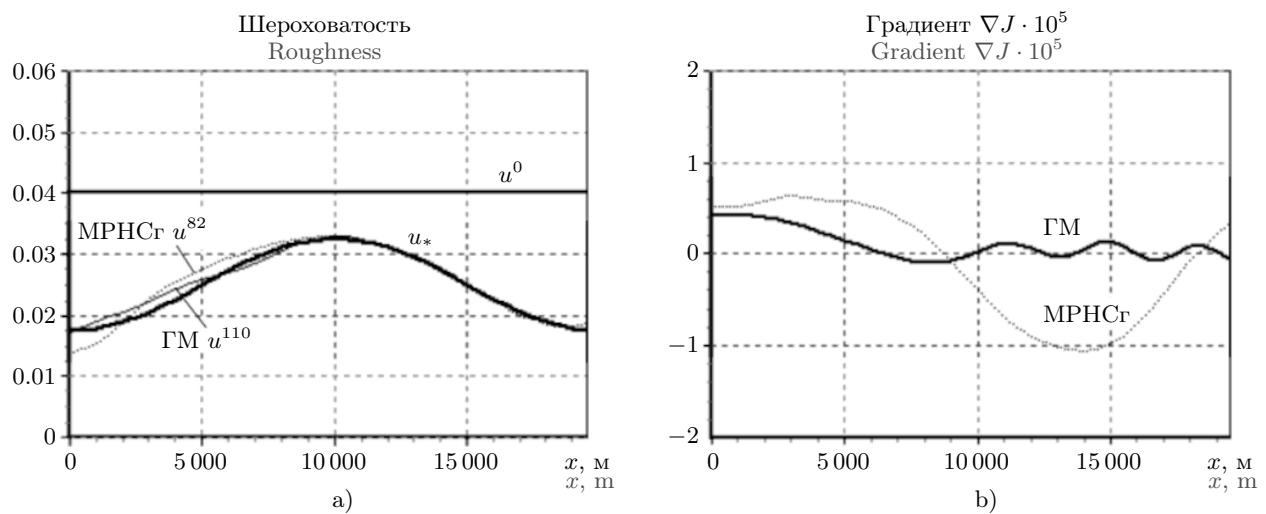


Рис. 5. Задача о канале: результаты оптимизации ГМ, МРНСг для градиента (8) с проекцией на линию

Fig. 5. Channel problem: results of optimization by GM, ADDMg for the gradient (8) with line projection

кам ξ_1 . Осредненная по времени излишняя информация в интеграле $\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, t) dt$ превращается в помехи при вычислении в каждой точке x градиента $\nabla J(x)$.

3. Градиент в задаче оптимизации формы сопла гидропушки.

3.1. Постановка задачи. В работах Г. А. Атанова [13, 14], З. Г. Зуйковой [15] и ряда других научных исследовались вопросы получения гидроимпульсных струй максимальной мощности посредством попыток оптимизации формы сопла гидропушки. Эти попытки оказались безуспешными, поскольку не учитывались условия управляемости и использовались некорректные для этой задачи экстремальные алгоритмы [16].

Течение воды в гидропушке считается изоэнтропическим и описывается квазиодномерной квазилинейной гиперболической системой уравнений [13, 17]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + F = 0, \quad \text{на } \Omega.$$

Здесь $v = \begin{pmatrix} \rho \\ w \end{pmatrix}$ — состояние системы, ρ — плотность воды, w — скорость воды, $A(v) = \begin{pmatrix} w & \rho \\ c^2 & w \end{pmatrix}$, $F(v, u) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi = \rho w u \Theta(x - x_a)$, Θ — тета-функция Хевисайда, x_a — начало сопла и конец ствола гидропушки, $c^2 = \frac{B n \rho^{n-1}}{\rho_0^n}$ — квадрат скорости звука в воде, B и n — постоянные в уравнении состояния воды в форме Тэйта, ρ_0 — плотность воды при атмосферном давлении. Диссипация энергии в задаче отсутствует.

Границы процесса Γ для области Ω показаны на рис. 6 а. Столб воды из ствола выталкивается поршнем в сопло. Граница Γ_p — это траектория поршня, Γ_{b0} — граница свободной поверхности воды при втекании в сопло от t_0 до t_1 , Γ_{b1} — граница истечения от t_1 до t_2 , Γ_0 и Γ_2 — границы начального и терминального состояний системы.

Управление

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d\sigma(x)}{dx}, \quad x \in S = (x_a, x_b),$$

где σ — площадь поперечного сечения сопла, $\sigma(x) = \sigma_a \exp \left(\int_{x_a}^x u(\zeta) d\zeta \right)$, $x \in [x_a, x_b]$, $\sigma_a = \sigma(x_a)$. Зада-

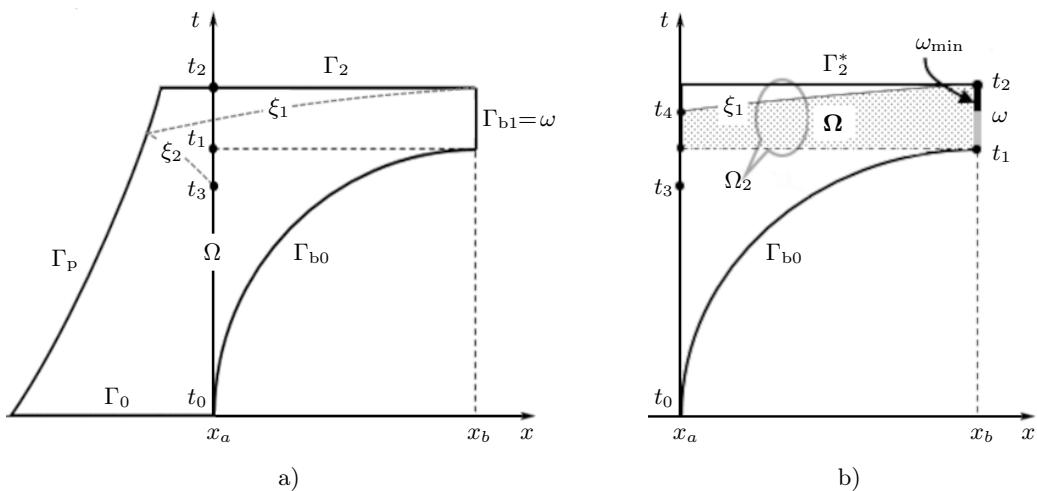


Рис. 6. Задача об оптимизации сопла гидропушки: а) области определения исходного состояния Ω ;
б) области определения сопряженного состояния Ω_2

Fig. 6. Problem of optimization of a water gun nozzle: a) domain of definition of the initial state Ω ;
b) domain of definition of the adjoint state Ω_2

ча оптимизации (оптимального дизайна формы сопла) формулируется следующим образом. Необходимо найти управление $u(x)$, доставляющее максимум функционалу

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} I|_{\omega} dt, \quad I(v, u; t)|_{\omega=\Gamma_{b1}} = \frac{\rho_0 \sigma(x_b) w^2(x_b, t)}{t_2 - t_1}. \quad (12)$$

Целевой функционал задается на $\omega = \Gamma_{b1}$, т.е. на срезе сопла гидропушки, и определяет среднюю силу действия импульса струи на возможную преграду. Заметим, что функционал зависит не только от состояния системы, но и от управления в граничной точке x_b .

Для определения производных Фреше функционала (12) необходимо решить соответствующую сопряженную линейную гиперболическую задачу, например в прямоугольной области Ω_2 [16], изображенной на рис. 6 б:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + A^T \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbb{F}^* f &= 0, \quad \text{на } \Omega_2 = (x_a, x_b) \times (t_1, t_2), \\ f &= 0, \quad \text{на } \Gamma_a^* = x_a \times (t_1, t_2), \quad \text{на } \Gamma_2^* = [x_a, x_b] \times t_2, \\ \rho_0 f_1 + w_b f_2 + I'_w &= 0, \quad I'_w = \frac{2\rho_0 \sigma_b w_b}{t_2 - t_1}, \quad \text{на } \Gamma_{b1} = \omega, \end{aligned} \quad (13)$$

где матрица \mathbb{F}^* = $\begin{pmatrix} \frac{w}{u} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ \frac{\rho}{u} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$. Граница терминального состояния Γ_2^* является начальным условием для

решения задачи в обратном по времени направлении.

Если применить условия управляемости [10] к выражениям производных Фреше в (3), то получим градиенты:

$$1) \quad \nabla J = \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt; \quad (14)$$

$$2) \quad \nabla J = \Phi|_{t_g}. \quad (15)$$

Здесь функция $\Phi = \rho w f_1 + \kappa I|_{\omega}$ определена на Ω_2 и зависит от первой компоненты сопряженного состояния. Весовой коэффициент κ необходим для выравнивания вычислительных помех в f и I (подробнее см. [7]).



3.2. Анализ управляемости для разных форм градиента. Сопряженные волны в гиперболической системе (13) возникают на ω из производной I'_w целевого функционала и движутся по тем же траекториям-характеристикам $\xi_{1,2}$, что и в исходной задаче (собственные числа A и A^T одинаковы), но в обратном направлении от среза сопла в сторону поршня, как это показано на рис. 6. На поршне характеристики ξ_1 отражаются характеристиками второго семейства ξ_2 и продолжают переносить информацию, полученную от ξ_1 о возмущениях I'_w , добавляя при этом новую информацию о движении поршня.

Условия управляемости для интегрального градиента (14) получены в работе [16]. На рис. 6 б показана заштрихованная область управляемости $\Omega \subset \Omega_2$, где может быть получен градиент из производной Фреше. Область управляемости определяется замыкающей характеристикой ξ_1 и задается условием управляемости:

$$t_2 \geq t_1 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c}, \quad t_1 \geq t_3. \quad (16)$$

Данное условие означает, что, во-первых, верхняя характеристика ξ_1 должна пройти через все сопло от x_b до x_a , во-вторых, начало истечения t_1 не должно быть меньше момента t_3 начала попадания в сопло волн, отраженных от поршня. Если граница поршня Γ_p окажется слишком близко к началу сопла, то возможно $t_1 < t_3$ и мы получим некоторую область Ω_1 , где исчезает управляемость формой сопла [16].

Согласно анализу управляемости моменты времени t_1 , t_2 и t_3 , показанные на рис. 6 а, б, являются корректными для проекции $P_x(\Phi)$ из Ω . Если, по техническим условиям, допускается сокращение времени истечения струи $t_2 - t_1$, то оптимальное управление, как показано в [16], можно было бы найти при минимальном $\omega_{\min} = x_b \times (t_4, t_2)$, где t_4 — момент прихода замыкающей характеристики ξ_1 к началу сопла. Такое ω_{\min} делает область управляемости Ω треугольной, а область решения сопряженной задачи сокращается до прямоугольника $\Omega_3 = (x_a, x_b) \times (t_4, t_2) \subset \Omega_2$.

Таким образом, из области Ω в Ω_2 или Ω_3 возможно корректное проецирование для интегрального градиента (14), когда $J'_u = P_{x,\bar{t}}(\Phi) = \nabla J$.

Перейдем к выражению градиента в форме (15). Очевидно, что проекцию $P_{x,t_g}(\Phi)$ можно выполнять на любую линию $S \times t_g$ из области управляемости Ω . Время t_g должно удовлетворять условию

$$t_1 \leq t_g \leq t_4,$$

которое дополняет условие (16) для оператора P_{x,t_g} . При этом производная Фреше $J'_u = P_{x,t_g}(\Phi) = \nabla J$. Примем далее $t_g = t_1$, что соответствует области Ω_2 , необходимой для решения сопряженной задачи.

3.3. Тестирование. Были заданы начало координат $x_a = 0$, длина сопла гидропушки $x_b - x_a = 0.253$ м, начальное положение поршня $x_{p0} = -0.28$ м, масса поршня $m_p = 2.25$ кг, начальная скорость поршня и воды $w_0 = 76.2$ м/с, радиус ствола гидропушки $R_a = 33 \cdot 10^{-3}$ м. Начало втекания воды в сопло $t_0 = 0$.

Исходная задача решалась в сложной области Ω , а сопряженная — на небольшом прямоугольнике Ω_2 . При этом задавались две пространственные сетки с количеством шагов 100. Первая сетка — подвижная для расчета течения воды от поршня до среза сопла, вторая — неподвижная для формы сопла. Количество слоев по времени было переменным и доходило до 10^3 . Точное значение зависит от формы сопла и определяется конечным временем t_2 . Исходная и сопряженная задачи решались методом характеристик на сетках в Ω и в Ω_2 соответственно.

Начало истечения струи из сопла наблюдалось при $t_1 \approx 2.7 \cdot 10^{-3}$ с. Среднее значение силы импульса полученной струи оценивалось по целевому функционалу (12) в интервале $t_2 - t_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ с. Данный интервал составляет примерно $2 \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c}$, т.е. он удовлетворяет первому неравенству в условии (16). При

этом выполняется и второе неравенство в виде $t_1 > t_3$. Таким образом, конструкция гидропушки и выбранное время t_2 удовлетворяют условию управляемости (16).

Начальное приближение

$$u^0(x) = 0,$$

что соответствует соплу-трубе с площадью сечения $\sigma^0(x) = \pi R_a^2$.

В работе [7] показано, что в окрестности u^0 целевой функционал (12) выпуклый, а далее, при сужении сопла, он становится вогнутым. Здесь невозможно применить МРНСг в форме (1), поэтому для

максимизации целевого функционала $J(u)$ с переменной выпуклостью использовался ГМ со следующим адаптивным выбором шагового множителя:

Алгоритм 2. Адаптивный шаг ГМ для максимизации переменно выпуклого J (метод 2)

Algorithm 2. Adaptive maximization step of the GM for variably convex J (method 2)

```

1: if  $J^k > rJ^{k-1}$  then
2:   if  $\|\nabla J^k\| < \|\nabla J^{k-1}\|$  then
3:      $b^k = b_1 b^{k-1}$ 
4:   else
5:      $b^k = \frac{\|\nabla J^{k-1}\|}{b_3 \|\nabla J^k\|} b^{k-1}$ 
6:   end if
7:    $u^{k+1} = u^k + b^k \nabla J^k$ 
8: else
9:   while  $J^k \leq rJ^{k-1}$  do
10:     $b^{k-1} = b_2 b^{k-1}$ 
11:     $u^{k+1} = u^{k-1} + b^{k-1} \nabla J^{k-1}$ 
12:    if  $b^{k-1} \approx 0$  then stop iterations  $k$ 
13:  end while
14: end if

```

Здесь $b_3 \geq 1$ для предотвращения чрезмерно больших шагов максимизации на участках выпуклости $J(u)$. Было принято $r = 1$. Начальное значение шагового множителя $b^0 = 0.5 / \|\nabla J^0\|$. Остановка итераций осуществлялась при практическом прекращении сходимости: $\|u^k - u^{k-1}\| / \|u^{k-1}\| \leq 10^{-6}$.

В работе [7] показано, что $J(u)$ может иметь несколько локальных максимумов. Исследуем их с помощью градиентов (14) и (15) для разных операторов проецирования $P_{x,\bar{t}}, P_{x,t_g}$. Отметим, что начальное значение функционала $J(u^0) = 2.0 \cdot 10^4$, а градиентов:

$$\text{для (14)} : \|\nabla J(u^0)\| = 1.1 \cdot 10^4,$$

$$\text{для (15)} : \|\nabla J(u^0)\| = 5.7 \cdot 10^7.$$

Для интегрального градиента (14) при $\kappa = 0.32$ в алгоритме 2 были подобраны параметры, позволившие найти первый максимум: $b_1 = 1.01, b_3 = 1.05$. Небольшое значение b_1 и относительно большое значение b_3 обеспечили достаточно плавное приближение к $\max J$. Если шаги немного увеличить, то они пересекают через локальный максимум. На рис. 7 показаны результаты оптимизации: рис. 7 а — локально оптимальная форма сопла, рис. 7 б — поведение функционала и его градиента в процессе оптимизации.

Из рис. 7 б видно, что на первых восьми итерациях функционал J выпуклый, поэтому его максимизация сопровождается ростом $\|\nabla J\|$. Далее выпуклость сменяется на вогнутость и $\|\nabla J\|$ устремляется к нулевому значению (необходимое условие экстремума), приводящему к $\max J^{25} = 8.5 \cdot 10^4$. Однако из-за

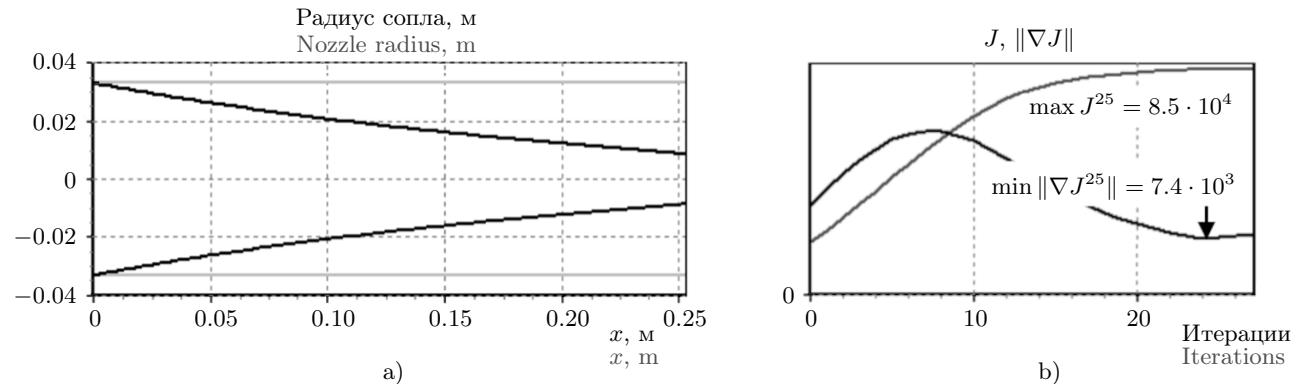


Рис. 7. Задача об оптимизации сопла гидропушки: а) оптимизация для интегрального градиента (14); б) первый локальный максимум

Fig. 7. Problem of optimization of a water gun nozzle: a) optimization for the integral gradient (14); b) the first local maximum

приближительности вычислений и крайне высокой вогнутости $J(u)$ в малой окрестности $\max J^{25}$ вместо нулевого значения градиента было получено $\min \|\nabla J^{25}\| = 7.4 \cdot 10^3$, отмеченное стрелкой на рисунке.

После достижения локального $\max J^{25}$ следующий шаг управления u^{26} попадает в окрестность локального минимума J , из которой алгоритм максимизации с полученными малыми шагами $b^k \nabla J^k$ не может и не должен выводить (см. алгоритм 2). Попытки выйти из локального минимума в сторону возможного нового максимума (на рисунках эти попытки проявляются увеличениями нормы градиента после стрелки в конце графика) приводят к $b^{k-1} = 0$, и итерации завершаются.

На рис. 8 а показаны результаты оптимизации для градиента (15) с проекцией на линию $t_g = t_1$ при $\kappa = 0.27$ и $b_1 = 1.1$, $b_3 = 1.02$. Первый локальный $\max J^{18} = 8.2 \cdot 10^4$ (первая стрелка на рис. 8 б) был получен относительно быстро на итерации $k = 18$. Отметим, что для обоих градиентов (14) и (15) в первом локальном максимуме целевого функционала $J(u)$ были получены формы сопел близкие к соплу-конусу, показанному на рис. 7 а. Средняя сила импульса струи $\max J$ в обоих случаях возросла более чем в 4 раза по сравнению с начальным значением J^0 .

Второй локальный максимум удалось получить только для градиента (15) при $b_1 = 1.15$, $b_3 = 1$. Результирующая форма сопла представлена в левой части рис. 8. Увеличение b_1 и снижение b_3 позволило перескочить предыдущие локальный $\max J^{18} = 8.2 \cdot 10^4$ и рядом лежащий $\min J^{19} = 8.1 \cdot 10^4$, что, в свою очередь, позволило двигаться дальше. Последующие итерации осуществляли движение по выпуклой части функционала, о чём свидетельствует рост $\|\nabla J\|$.

После выпуклости появляется крайне малая область вогнутости с $\max J^{98}$ (вторая стрелка на рис. 8 б) с последующим локальным минимумом. На рисунке они не видны ни в значениях J , ни в $\|\nabla J\|$. Здесь после $\max J^{98} = 2.096 \cdot 10^5$ следует $\min J^{99} = 2.093 \cdot 10^5$. С интегральным градиентом эту разницу зафиксировать не удалось. Дальнейшие попытки выйти из минимума опять-таки привели к $b^{k-1} = 0$. Во втором локальном $\max J^{98}$ средняя сила импульса струи возросла более чем в 10 раз по сравнению с начальным значением J^0 .

Поиски дальнейших экстремумов для обоих градиентов приводили к неконтролируемому расширению сопла со сверхзвуковой скоростью истечения. Поэтому далее было поставлено ограничение на запрет расширения сопла [16]:

$$u(x) \leq 0, \quad \forall x \in S.$$

На рис. 9, 10 показаны полученные сопла с краевыми локальными $\max J$. В алгоритме 2 для градиента (14) задавались $b_1 = 1.1$, $b_3 = 1.02$, для градиента (15) остались те же $b_1 = 1.15$, $b_3 = 1$.

Сопло на рис. 9 для интегрального градиента было получено при плавном подходе к $\max J^{85} = 1.9 \cdot 10^5$. Однако при грубых, чрезмерно больших шагах, например с $b_1 = 1.2$, $b_3 = 1$, можно получить “улучшенное” сопло, где $\max J^{83} = 3.2 \cdot 10^5$. Такое сопло изображено пунктирной линией на рис. 9. При грубых шагах может быть получено множество сопел “оптимальной” формы, приближающихся к трубе с небольшим отверстием в конце. В рамках одномерной (квазиодномерной) модели течения воды подобные сопла нельзя считать корректными и приемлемыми для технической реализации.

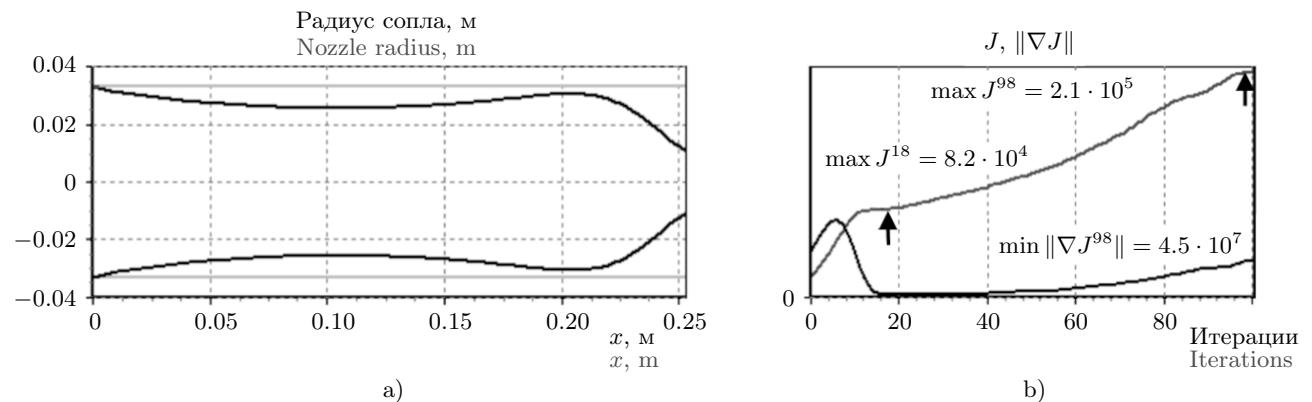


Рис. 8. Задача об оптимизации сопла гидропушки: а) оптимизация для градиента (15) с проекцией на линию; б) два локальных максимума

Fig. 8. Problem of optimization of a water gun nozzle: a) optimization for the gradient (15) with line projection;
b) two local maximum

С другой стороны, большие шаги при градиенте (15) с проекцией на линию не изменили заметно форму сопла (рис. 10). Такое сопло следует считать локально оптимальным с третьим (краевым) максимумом, где $\max J^{118} = 2.1 \cdot 10^5$ совпадает со вторым локальным $\max J^{98}$ для сопла на рис. 8.

Таким образом, оптимизация с интегральной проекцией градиента не позволила выявить второй и, по сути, третий локальные максимумы целевого функционала. Здесь было получено одно локально оптимальное сопло (рис. 7) и набор “улучшенных” сопел (рис. 9) с проблемным доверием к одномерной постановке задачи. При оптимизации для градиента (15) с проекцией на линию в заданном времени удалось получить три локально оптимальных сопла (рис. 7 а, 8 а, 10). Последнее сопло следует считать глобально оптимальным и приемлемым для технической реализации.

4. Выводы. Мы обсудили принципиально новую точку зрения на процедуру получения градиента целевого функционала для численного решения бесконечномерных задач оптимизации с нестационарными уравнениями в частных производных. При оптимизации нестационарных систем с пространственно-распределенным управлением $u(x)$ следует рассматривать управление как функцию и пространства x , и времени t . При этом выражение градиента может представляться несколькими способами, например традиционным интегрированием по времени и проекцией на линию x в необходимый момент t .

Для прямой минимизации (максимизации) целевого функционала $J(u)$ на основе его градиента необходимо, во-первых, найти производную Фреше J'_u , например из первой вариации $\delta J(u) = \langle J'_u, \delta u \rangle$. Во-вторых, получить условия управляемости на соответствующем подмножестве управляемости $\Omega \subset \Omega$, когда $J'_u = \nabla J$. В-третьих, необходимо применить к J'_u подходящий оператор проецирования P_x для коррекции $u(x)$ на $S \subset \Omega$ соответствующими экстремальными алгоритмами направленного поиска.

Рассмотренные примеры оптимизации с разными операторами P_x показали, что новая форма градиента с проецированием на линию в Ω обладает наилучшей чувствительностью к изменениям управления $u(x)$ на S . При этом реализуется лучшее приближение к оптимуму за меньшее число итераций, что позволило впервые найти три локально оптимальных формы сопла гидропушки.

Список литературы

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Т. 2. М.: МЦНМО, 2011.
2. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.
3. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. Донецк: Юго-Восток, 1997. <https://elibrary.ru/item.asp?id=59931066>. Cited May 23, 2025.
4. Толстых В.К. О применении градиентного метода к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. физ. 1986. 26, № 1. 137–140.

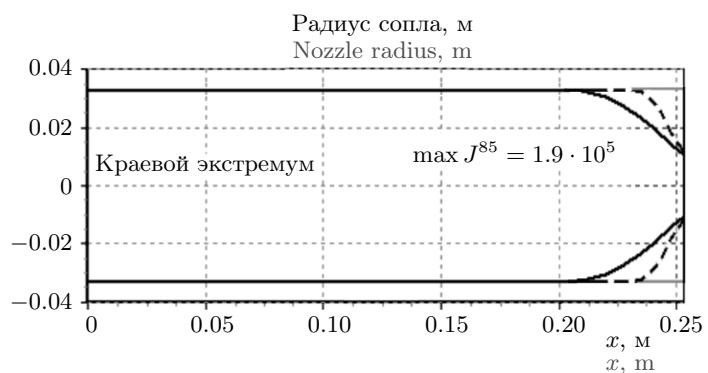


Рис. 9. Задача об оптимизации сопла гидропушки: оптимизация с ограничением для интегрального градиента (14)

Fig. 9. Problem of optimization of a water gun nozzle: optimization with constraint for the integral gradient (14)

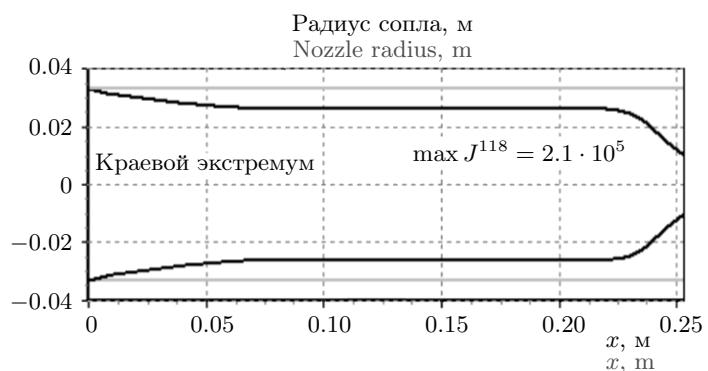


Рис. 10. Задача об оптимизации сопла гидропушки: оптимизация с ограничением для градиента (15) с проекцией на линию, третий локальный максимум

Fig. 10. Problem of optimization of a water gun nozzle: optimization with constraint for the gradient (15) with line projection, the third local maximum



5. Толстых В.К. Эффективный метод оптимизации физических процессов // Инженерно-физический журнал. 2003. **76**, № 2. 160–162.
6. Tolstykh V.K. Optimality conditions and algorithms for direct optimizing the partial differential equations // Engineering. 2012. 4, No. 7. 390–393. doi [10.4236/eng.2012.47051](https://doi.org/10.4236/eng.2012.47051).
7. Толстых В.К. Алгоритмы оптимизации систем с многоэкстремальными функционалами // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2024. **64**, № 3. 415–423. doi [10.31857/S0044466924030041](https://doi.org/10.31857/S0044466924030041).
8. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М: Наука, 1975.
9. Миеле А. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969.
10. Толстых В.К. Об управляемости систем с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2024. **64**, № 6. 959–972. doi [10.31857/S0044466924060067](https://doi.org/10.31857/S0044466924060067).
11. Атанов Г.А., Воронин С.Т., Толстых В.К. О задаче идентификации параметров открытых русел // Водные ресурсы. 1986. № 4. 69–78.
12. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. New York: Springer, 1999. doi [10.1007/b98874](https://doi.org/10.1007/b98874).
13. Атанов Г.А. Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. Киев: Высшая школа, 1987.
14. Atanov G.A. The optimal control problem of profiling the hydro-cannon nozzle to obtain the maximum outlet speed // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1997. **211**, N 7. 541–547. doi [10.1243/0954406971521926](https://doi.org/10.1243/0954406971521926).
15. Зуйкова З.Г. Вариационная задача о втекании сжимаемой жидкости в сужающийся канал. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Донецк: Донецкий гос. унив., 1984.
16. Tolstykh V.K., Dmitruk Yu. V. Controllability Analysis and Optimization of Hydrocannon Nozzle Shape Based on Direct Extreme Approach // Advanced Engineering Research. 2025. **25**, N 1. 65–76. doi [10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76](https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76).
17. Семко А.Н. Импульсные струи жидкости высокой скорости и их применение. Донецк: Донецкий гос. унив., 2014.

Получена
30 апреля 2025 г.

Принята
19 мая 2025 г.

Опубликована
1 июля 2025 г.

Информация об авторе

Виктор Константинович Толстых – д.ф.-м.н., профессор; Донецкий государственный университет, ул. Университетская, 24, 283001, Донецк, ДНР, Российская Федерация.

References

1. F. P. Vasil'ev, *Optimization Methods*, Vol. 2 (MTsNMO, Moscow, 2011) [in Russian].
2. J. C. Céa, *Optimisation. Théorie et algorithmes* (Dunod, Paris, 1971; Mir, Moscow, 1973).
3. V. K. Tolstykh, *A Direct Extreme Approach for Optimizing Systems with Distributed Parameters* (South-East, Donetsk, 1997) [in Russian]. <https://elibRARY.ru/item.asp?id=59931066>. Cited May 23, 2025.
4. V. K. Tolstykh, “Application of the Gradient Method to Problems of Optimizing Systems with Distributed Parameters,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **26** (1), 137–140 (1986) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **26** (1), 86–88 (1986)]. doi [10.1016/0041-5553\(86\)90186-2](https://doi.org/10.1016/0041-5553(86)90186-2).
5. V. K. Tolstykh, “Efficient Method of Optimization of Physical Processes,” Inzh. Fiz. Zh. **76** (2), 160–162 (2003) [J. Eng. Phys. Thermophys. **76** (2), 424–427 (2003)]. doi [10.1023/A:1023681907927](https://doi.org/10.1023/A:1023681907927).
6. V. K. Tolstykh, “Optimality Conditions and Algorithms for Direct Optimizing the Partial Differential Equations,” Engineering **4** (7), 390–393 (2012). doi [10.4236/eng.2012.47051](https://doi.org/10.4236/eng.2012.47051).
7. V. K. Tolstykh, “Algorithms for Optimizing Systems with Multiple Extremum Functionals,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **64** (3), 415–423 (2024) [Comput. Math. Math. Phys. **64** (3), 392–400 (2024)]. doi [10.1134/S0965542524030163](https://doi.org/10.1134/S0965542524030163).
8. A. G. Butkovsky, *Control Methods for Systems with Distributed Parameters* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].
9. A. Miele, *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes* (Academic Press, New York, 1965; Mir, Moscow, 1969).
10. V. K. Tolstykh, “Controllability of Distributed Parameter Systems,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **64** (6), 959–972 (2024) [Comput. Math. Math. Phys. **64** (6), 1211–1223 (2024)]. doi [10.1134/S0965542524700453](https://doi.org/10.1134/S0965542524700453).
11. G. A. Atanov, S. T. Voronin, and V. K. Tolstykh, “On the Problem of Identification of the Parameters of Open Channels,” Water Resour. No. 4, 69–78 (1986).

12. J. Nocedal and S. J. Wright, “Numerical Optimization,” (Springer, New York, 1999). doi [10.1007/b98874](https://doi.org/10.1007/b98874).
13. G. A. Atanov, *Hydraulic Pulse Installations for Rock Destruction* (Vysshaya Shkola, Kiev, 1987) [in Russian].
14. G. A. Atanov, “The Optimal Control Problem of Profiling the Hydro-Cannon Nozzle to Obtain the Maximum Outlet Speed,” Proc. Inst. Mech. Engrs. **211** (7), 541–547 (1997). doi [10.1243/0954406971521926](https://doi.org/10.1243/0954406971521926).
15. Z. G. Zuikova, *Variational Problem of the Compressible Fluid Flow into a Narrowing Channel*, PhD Thesis in Physics and Mathematics (Donetsk State University, Donetsk, 1984).
16. V. K. Tolstykh and Yu. V. Dmitruk, “Controllability Analysis and Optimization of Hydrocannon Nozzle Shape Based on Direct Extreme Approach,” Adv. Eng. Res. **25** (1), 65–76 (2025). doi [10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76](https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76).
17. A. N. Semko, *High-Speed Pulsed Liquid Jets and Their Application* (Donetsk State University, Donetsk, 2014) [in Russian].

Received
April 30, 2025

Accepted
May 19, 2025

Published
July 1, 2025

Information about the author

Victor K. Tolstykh — Dr. Sci., Professor; Donetsk State University, Universitetskaya ulitsa, 24, 283001, Donetsk, DPR, Russia.