



doi 10.26089/NumMet.v26r319

УДК 517.9;  
519.62

## Алгоритмизированный численный поиск стационарных решений системы двух нелинейных уравнений Шредингера с дополнительным двухъя姆ным потенциалом

Н. А. Куценко

Национальный исследовательский университет “Московский институт электронной техники”,  
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0009-0005-7304-4885, e-mail: nikki9brikki@gmail.com

Г. Л. Алфимов

Национальный исследовательский университет “Московский институт электронной техники”,  
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-2639-5912, e-mail: galfimov@yahoo.com

**Аннотация:** Рассматриваются стационарные решения системы двух связанных нелинейных уравнений Шредингера с дополнительным двухъямным потенциалом. В теории конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК) эти уравнения известны как уравнения Гросса–Питаевского, а рассматриваемая система описывает динамику сигарообразного облака БЭК, состоящего из атомов двух типов. Стационарные решения этой системы, называемые нелинейными модами, удовлетворяют системе двух неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка. Задача ставится следующим образом: необходимо, во-первых, найти все локализованные (т.е. стремящиеся к нулю на плюс и минус бесконечности) решения этой системы ОДУ, существующие одновременно при заданных значениях параметров, и, во-вторых, обосновать полноту проведенного поиска. В данной работе для решения этой задачи используется “метод исключения сингулярных решений”, предложенный в предшествующих работах нашей группы. Он состоит в сканировании некоторой области в пространстве начальных данных задачи Коши. При этом сканировании решения, уходящие на бесконечность при конечном значении аргумента (сингулярные решения), выявляются и исключаются из рассмотрения, и фиксируются решения, не являющиеся сингулярными. Диагностика сингулярностей и критерий остановки процесса сканирования основываются на математически строгих утверждениях. Таким образом определяются области параметров задачи, в которых существуют нелинейные моды различных типов (“светлый–темный солитон”, “темный–темный солитон” и др.).

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Гросса–Питаевского, стационарные нелинейные моды, двухъямный потенциал, двухкомпонентные солитоны.

**Для цитирования:** Куценко Н.А., Алфимов Г.Л. Алгоритмизированный численный поиск стационарных решений системы двух нелинейных уравнений Шредингера с дополнительным двухъямным потенциалом // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 3. 267–280. doi 10.26089/NumMet.v26r319.



# Algorithmic numerical search for stationary solutions of a system of nonlinear Schrödinger equations with additional double-well potential

**Nikita A. Kutsenko**

National Research University of Electronic Technology,  
Moscow, Russia

ORCID: 0009-0005-7304-4885, e-mail: [nikki9brikki@gmail.com](mailto:nikki9brikki@gmail.com)

**Georgy L. Alfimov**

National Research University of Electronic Technology,  
Moscow, Russia

ORCID: 0000-0003-2639-5912, e-mail: [galfimov@yahoo.com](mailto:galfimov@yahoo.com)

**Abstract:** We study stationary solutions of a system of coupled nonlinear Schrödinger equations with an additional double-well potential. In the theory of Bose–Einstein Condensate (BEC) these equations are called the Gross–Pitaevskii equations and the considered system describes the dynamics of a cigar-shape BEC cloud that consists of atoms of two types. Stationary solutions of this system, called also nonlinear modes, satisfy a system of two second-order non-autonomous ordinary differential equations (ODE). The problem is stated as follows: firstly, it is necessary to find all localized (i.e., vanishing at both positive and negative infinity) solutions of this ODE system that coexist for given parameter values and secondly, to justify the completeness of the conducted search. For this purpose, we employ the method of “filtering out” solutions with singularities developed by our team previously. It consists in scanning of some area in the space of initial data for the Cauchy problem for the system. During this procedure, the solutions that have singularities (that tend to infinity at a finite value of argument) are detected and excluded from consideration, while non-singular solutions are fixed. The diagnostics of the singularities and the criteria for stopping the scanning process are based on rigorous mathematical statements. As a result, we identify the parameter regions where nonlinear modes of different types exist (“bright-dark solitons”, “dark-dark solitons”, etc).

**Keywords:** the nonlinear Schrödinger equation, the Gross–Pitaevskii equation, stationary nonlinear modes, double well potential, two-component solitons.

**For citation:** N. A. Kutsenko, G. L. Alfimov, “Algorithmic numerical search for stationary solutions of a system of nonlinear Schrödinger equations with additional double-well potential,” Numerical Methods and Programming. 26 (3), 267–280 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r319.

**1. Введение.** Данная работа посвящена исследованию системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} u_{1,xx} + (\mu_1 - V(x))u_1 - (\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{12}u_2^2)u_1 = 0, \\ Du_{2,xx} + (\mu_2 - V(x))u_2 - (\alpha_{21}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2)u_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u_{k,xx}(x)$  обозначает вторую производную функции  $u_k(x)$ ,  $k = 1, 2$ . Приведенная система представляет значительный интерес в теории ультрахолодных газов, где она используется для описания стационарных состояний конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК). Модель (1) является непосредственным следствием системы динамических уравнений Гросса–Питаевского, записанной для волновых функций  $\psi_{1,2}(x, t)$  двухкомпонентного конденсата [1–5],

$$\begin{cases} i\psi_{1,t} = -\psi_{1,xx} + V(x)\psi_1 + (\alpha_{11}|\psi_1|^2 + \alpha_{12}|\psi_2|^2)\psi_1 = 0, \\ i\psi_{2,t} = -D\psi_{2,xx} + V(x)\psi_2 + (\alpha_{21}|\psi_1|^2 + \alpha_{22}|\psi_2|^2)\psi_2 = 0, \end{cases} \quad (2)$$



при условии, что эти компоненты находятся в стационарном состоянии

$$\psi_{1,2}(x, t) = e^{-i\mu_{1,2}t} u_{1,2}(x).$$

Предполагается, что облако конденсата, описываемое системой (2), имеет сигарообразную форму и удерживается ловушкой с потенциалом  $V(x)$ . Параметр  $D$  отвечает соотношению масс атомов компонент конденсата, константы  $\mu_{1,2}$  имеют смысл химических потенциалов компонент, коэффициенты  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$  и  $\alpha_{22}$  являются параметрами связи между этими компонентами. Из условий локализации волновых функций следуют граничные условия для  $u_{1,2}(x)$ :

$$u_{1,2}(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (3)$$

Число частиц каждой из компонент конденсата описывает  $L_2$ -норма соответствующей функции ( $u_1(x)$  или  $u_2(x)$ ).

Следует подчеркнуть, что свойства нелинейной системы (1) принципиально отличаются от свойств линеаризованной системы, соответствующей случаю  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22}$ . Как известно из классического курса квантовой механики, локализованные решения линеаризованной системы существуют лишь при дискретном наборе значений  $\mu_{1,2}$ . В то же время решения нелинейной системы могут существовать в непрерывном диапазоне значений  $\mu_{1,2}$ , причем различным значениям  $\mu_{1,2}$  внутри этого диапазона соответствует различное число частиц компонент конденсата. Решения системы (1) с граничными условиями (3) называются *нелинейными модами*.

Известно, что система (2) допускает стационарные решения различных типов, получившие в физической литературе собственные названия: “светлый–темный” солитон [2, 3, 6], “темный–темный” солитон [7, 8] и т.д., в зависимости от структуры их компонент. Известно также, что система имеет и более сложные стационарные решения (см., например, [9]). Большая часть результатов получена для случаев либо квадратичного, либо периодического потенциалов. Задача определения типов и численного нахождения *всех* стационарных решений этой системы, удовлетворяющих граничным условиям (3) и существующих одновременно при фиксированных значениях параметров и заданном типе потенциала, является актуальной для теории БЭК и интересной с вычислительной точки зрения.

Сформулируем данную проблему в следующей постановке:

Пусть заданы константы  $D$ ,  $\mu_{1,2}$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$  и  $\alpha_{22}$  и потенциал  $V(x)$ . Можно ли предложить методику “доказательных вычислений”, позволяющую перечислить *все* решения системы (1), удовлетворяющие граничным условиям (3), а также найти их численно?

Для исследования задач такого типа в работе [10] был предложен метод, называемый ниже “методом исключения сингулярных решений”, позволяющий описать все решения для системы подобного вида, удовлетворяющие условию локализации (3). Необходимым условием для использования этого метода является условие

$$\alpha_{ij} > 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (4)$$

отвечающее случаю отталкивающих взаимодействий между частицами конденсата. При условии (4) “большая часть” решений задачи Коши для системы (1) имеют сингулярность, т.е. они стремятся к бесконечности в некоторой конечной точке  $x = x^*$ . Такие решения мы будем называть *сингулярными*. Решений, которые не являются сингулярными, оказывается, в некотором смысле, “мало”, и они могут быть полностью перечислены<sup>1</sup>. Основной процедурой, позволяющей провести выделение несингулярных решений, является процедура численного сканирования пространства начальных данных для рассматриваемой системы с построением соответствующих решений задачи Коши. Сингулярные решения отбрасываются, при этом имеется строгий численный критерий сингулярности решения. Еще одно строгое утверждение позволяет выделить область сканирования таким образом, что можно гарантировать отсутствие несингулярных решений за пределами этой области. В работе [10] данный подход был проиллюстрирован на примере гармонического потенциала  $V(x) = x^2$ , который часто используется в моделях БЭК для описания магнитной ловушки. Близкая техника применялась в работах [11–13] для нахождения структур в однокомпонентном

<sup>1</sup>Типичной является ситуация, когда множество сингулярных решений имеет мощность континуума, в то время как множество несингулярных решений конечно или счетно.

конденсате, удерживаемом периодическим внешним потенциалом. Развитие данного подхода на случай других потенциалов представляет значительный интерес для физических приложений.

В данной работе рассматривается задача об описании нелинейных мод в случае симметричного двухъямного потенциала. В теории БЭК она возникает при исследовании туннелирования квантовых газов через перемычку между потенциальными ямами. Известно, что эта задача имеет решения, компоненты которых не являются ни четными, ни нечетными [14]. Традиционным способом исследования состояний в двухъямном потенциале и их динамики является метод выделения “связанных мод”, каждая из которых локализована в одной из ям потенциала [15]. Этот подход, однако, не позволяет описать все многообразие нелинейных структур, которые могут возникать в этой задаче. Естественным образом возникает задача о перечислении стационарных нелинейных состояний в таких потенциалах с использованием упомянутой выше методики. В нашем исследовании модельный двухъямный потенциал (1) имеет вид

$$V(x) = x^2 + A/\cosh(Bx), \quad (5)$$

где параметры  $A$  и  $B$  положительны. Параметр  $A$  определяет высоту “перемычки” между ямами, а  $B$  — расстояние между ними. Форма двухъямного потенциала, описываемого формулой (5), представлена на рис. 1.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 сформулированы теоремы, обосновывающие метод решения нашей задачи, а также описан алгоритм для поиска нелинейных мод. Раздел 3 посвящен изложению результатов применения этого метода к задаче о нахождении несингулярных решений системы уравнений с двухъямным потенциалом. Работу завершает раздел 4, в котором содержится краткое обсуждение результатов и перспективы развития данного подхода.

**2. Метод исключения сингулярных решений.** Метод, предложенный в работе [10], может использоваться для исследования систем уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера

$$\begin{cases} u_{1,xx} - Q_1(x)u_1 + u_1 f_1(x, u_1, \dots, u_n) = 0, \\ \vdots \\ u_{n,xx} - Q_n(x)u_n + u_n f_n(x, u_1, \dots, u_n) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $Q_k(x)$  и  $f_k(x, u_1, \dots, u_n)$  — некоторые функции, условия на которые будут сформулированы ниже. Предполагается, что решение  $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$  системы (6) обладает условием локализации:

$$u_k(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Метод основывается на трех теоремах:

1) *Теорема о параметризации* позволяет сопоставить множеству решений системы (6), стремящихся к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ , множество векторов пространства  $\mathbb{R}^n$ . Это соответствие взаимно-однозначно и является гомеоморфизмом. Вектор  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$ , сопоставляемый решению  $\mathbf{u}(x)$ , определяется константами, характеризующими скорость стремления  $\mathbf{u}(x)$  к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Если известен вектор  $\mathbf{C}$ , соответствующее ему решение  $\mathbf{u}(x)$  может быть восстановлено численно при помощи метода “стрельбы”. При этом  $\mathbf{C}$  определяет начальные условия, которые при практической реализации могут быть поставлены в достаточно удаленной точке  $x = x_\infty$ .

2) *Теорема о сингулярности* позволяет достоверно выявлять сингулярность решения задачи Коши для системы (6), т.е. стремление одной или нескольких компонент решения к бесконечности в некоторой точке числовой прямой.

3) *Теорема о множестве сингулярных решений* позволяет выделить в  $\mathbb{R}^n$  такую область  $\mathcal{C}$ , что точки, лежащие за ее пределами, заведомо соответствуют сингулярным решениям.

Таким образом, поиск несингулярных решений, удовлетворяющих условию (7), можно организовать следующим образом. Производится численное сканирование области  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ , определяемой теоремой о

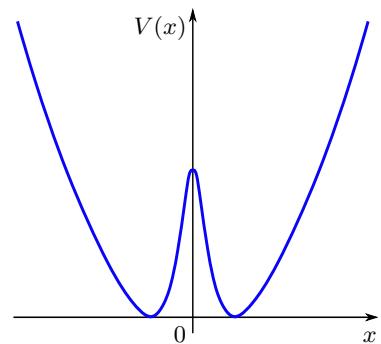


Рис. 1. Двухъямный потенциал (5)

Fig. 1. Double well potential (5)



множестве сингулярных решений. Путем численного решения задачи Коши для каждого  $\mathbf{C} \in \mathcal{C}$  находится соответствующее ему решение системы (6). Решения, имеющие сингулярность (которая выявляется при помощи теоремы о сингулярности), отбрасываются. Для оставшихся решений проверяется условие локализации при  $x \rightarrow -\infty$ .

Приведем точные формулировки упомянутых выше теорем.

**2.1. Теорема о параметризации.** Обозначим за  $\mathcal{S}$  множество решений  $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$  системы (6), таких что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_k(x) = 0 \text{ для } k = 1, \dots, n.$$

Будем предполагать, что функции  $Q_k(x)$  при  $k = 1, \dots, n$  удовлетворяют следующим условиям:

**A1)** существует  $Q_0 > 0$ , такое что  $Q_k(x) \geq Q_0$  при  $k = 1, \dots, n$ ;

**A2)** функции  $Q_k(x)$  при  $k = 1, \dots, n$  дважды непрерывно дифференцируемы на промежутке  $(x_0, +\infty)$ ;

$$\mathbf{A3)} \int_{x_0}^{\infty} |Q_{k,xx}(x)| Q_k^{-3/2}(x) dx < \infty \text{ при } k = 1, \dots, n.$$

Теперь сформулируем условия на функции  $f_k(x, \mathbf{u})$ . Определим  $\varepsilon$ -окрестность нуля в  $\mathbb{R}^n$  стандартным образом как

$$\Omega_\varepsilon = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\| < \varepsilon\},$$

где  $\|\mathbf{u}\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть существует такое  $\varepsilon$ , что:

**B1)** функции  $f_k(x, \mathbf{u})$  непрерывны на множестве  $(x_0, +\infty) \times \Omega_\varepsilon$ , и для любых  $\mathbf{u} \in \Omega_\varepsilon$  и  $x > x_0$  выполняется неравенство

$$|f(x, \mathbf{u})| \leq \nu_1 \|\mathbf{u}\|$$

с некоторым  $\nu_1 > 0$ ;

**B2)** для любых  $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)} \in \Omega_\varepsilon$  и  $x > x_0$  при  $k = 1, \dots, n$  справедливо неравенство

$$|f_k(x, \mathbf{u}^{(1)}) - f_k(x, \mathbf{u}^{(2)})| \leq \nu_2 \|\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}\|$$

с для некоторым  $\nu_2 > 0$ .

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** (О параметризации). Пусть при  $x > x_0$  функции  $Q_k(x)$  удовлетворяют условиям A1–A3, и при некотором  $\varepsilon$  функции  $f_k(x, \mathbf{u})$  удовлетворяют условиям B1 и B2. Тогда существует гомеоморфизм  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}$  такой, что  $\mathcal{M}$ -образ вектора  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n$  является решением системы (6),  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{S}$ , а асимптотика решения  $\mathbf{u}$  при  $x \rightarrow +\infty$  имеет вид:

$$\begin{cases} u_k(x) = Q_k^{-1/4}(x) e^{-S_k(x_0, x)} (C_k + o(1)), \\ u_{k,x}(x) = -Q_k^{1/4}(x) e^{-S_k(x_0, x)} (C_k + o(1)), \end{cases} \quad (8)$$

где

$$S_k(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q_k(t)} dt. \quad (9)$$

**Замечание 1.** Очевидно, система (6) имеет нулевое решение, которое соответствует вектору  $\mathbf{C} = 0$ .

**Замечание 2.** Утверждение о том, что асимптотика любого стремящегося к нулю решения системы (6) имеет вид (8), следует из классической теории линейного уравнения Шредингера (см., например, [16]). Взаимная однозначность и непрерывность отображения  $\mathcal{M}$  доказана в приложении А работы [10].

**2.2. Теорема о сингулярности.** Напомним, что мы называем решение  $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$  системы (6) сингулярным, если в некоторой точке  $x^* \in \mathbb{R}$  выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \|\mathbf{u}(x)\| = \infty.$$

При этом будем говорить, что решение  $\mathbf{u}(x)$  имеет сингулярность в точке  $x^* \in \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 2.** (О сингулярности). Пусть существует некоторое значение  $X_0$  такое, что при  $x > X_0$  функции  $Q_k(x)$  и  $f_k(x, \mathbf{u})$  при всех  $k = 1, \dots, n$ , удовлетворяют следующим условиям:

**B1)** существует  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  такое, что  $Q_k(x) \geq \frac{\alpha_1}{2}$ ;

**B2)** существуют такие  $\alpha_2 > 0$  и  $N_0 > 0$ , что для любого  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{u}\| > N_0$ , выполняются условия

$$f_k(x, \mathbf{u}) \leq -\frac{\alpha_2}{2} \|\mathbf{u}\|^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Тогда решение задачи Коши для системы (6) с начальными условиями  $\mathbf{u}(X_0) = \mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_x(X_0) = \mathbf{u}'_0$ , удовлетворяющими неравенствам

$$\|\mathbf{u}_0\|^2 \geq \max \left\{ N_0^2, \frac{3\alpha_1}{2\alpha_2} \right\},$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_x \rangle \geq 0,$$

имеет сингулярность в некоторой точке  $X^*$  такой, что  $X^* \in (X_0, X_0 + d)$ , где

$$d = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2\alpha_2 \|\mathbf{u}_0\|^2 - \alpha_1}}.$$

Скобками  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено евклидово скалярное произведение.

**Замечание 3.** Теорема о сингулярности позволяет не только сделать заключение о том, что решение задачи Коши является сингулярным, но и локализовать точку сингулярности с точностью до  $d \propto \|\mathbf{u}_0\|^{-1}$ , где  $\|\mathbf{u}_0\|$  — достаточно большое значение, полученное при численном решении задачи Коши.

**2.3. Теорема о множестве сингулярных решений.** Введем следующее определение.

**Определение 1.** Будем говорить, что вектор-функция  $\mathbf{h}(x, \mathbf{u})$  удовлетворяет I-условию на множестве  $(x_1, x_2) \times D$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если все функции  $h_k(x, \mathbf{u})$  при  $k = 1, \dots, n$  являются монотонно возрастающими функциями любой из компонент  $u_j$  при условии, что остальные компоненты  $u_i$ ,  $i \neq j$ ,  $\mathbf{u} \in D$ , и  $x \in (x_1, x_2)$  фиксированы.

**Замечание 4.** Если  $\mathbf{h}(x, \mathbf{u})$  принадлежит классу  $C^1$  на множестве  $(x_1, x_2) \times D$ , она удовлетворяет I-условию тогда и только тогда, когда  $\frac{\partial h_k}{\partial u_j}(x, \mathbf{u}) \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , при  $x \in (x_1, x_2)$  и  $\mathbf{u} \in D$ .

Введем обозначение

$$h_k(x, \mathbf{u}) = (Q_k(x) - f_k(x, \mathbf{u}))u_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** (О множестве сингулярных решений). Пусть  $Q_k(x)$  и  $f_k(x, \mathbf{u})$  при всех  $k = 1, \dots, n$  удовлетворяют условиям теоремы о параметризации. Пусть вектор-функция  $\mathbf{h}(x, \mathbf{u})$  определена по-компонентно формулой (11) и для некоторого значения  $x_l$  (случай  $x_l = -\infty$  также допустим) функция  $\mathbf{h}(x, \mathbf{u})$  удовлетворяет I-условию на множестве  $(x_l, +\infty) \times \mathbb{R}_+^n$ , где

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{u} \mid u_k \geq 0, k = 1, \dots, n\}.$$

Кроме того, пусть существует вектор  $\mathbf{C}^* = (C_1^*, \dots, C_n^*)$ ,  $C_k^* > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , такой, что  $\mathcal{M}$ -образом этого вектора (см. теорему о параметризации) является решение  $\mathbf{u}^*(x) = (u_1^*(x), \dots, u_n^*(x))$  системы (6), обладающее следующими свойствами:

- существует  $X^* > x_l$  такое, что  $\lim_{x \rightarrow X^*+0} u_k^*(x) = +\infty$  при некотором  $k \in \{1, \dots, n\}$ ;
- $u_k^*(x) > 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$  и  $x > X^*$ .

Тогда для любого  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)$  такого, что  $C_k > C_k^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ , решение  $\mathbf{u}(x, \mathbf{C})$  будет положительным и будет иметь сингулярность в точке  $X^{**} \geq X^*$ .



**2.4. Алгоритм нахождения нелинейных мод.** Нетрудно убедиться в том, что если потенциал в системе (1) имеет вид (5) и  $D > 0$ , то условия А1–А3, а также условия Б1–Б2 выполняются. Следовательно, применима теорема о параметризации и все решения системы (1), стремящиеся к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ , можно поставить во взаимно-однозначное соответствие точкам некоторого множества  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ . Далее легко проверить, что при выполнении неравенств (4) справедливы условия теоремы о сингулярности. Также неравенства (4) гарантируют выполнение для системы (1) I-условия, а следовательно, теорема о множестве сингулярных решений также применима. Для нахождения локализованных решений предлагается использовать следующий алгоритм, опирающийся на перечисленные выше теоремы.

Шаг 1. Используя теорему о множестве сингулярных решений, выделить множество  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  такое, что для любого  $\mathbf{C} \notin \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{M}$ -образ вектора  $\mathbf{C}$  является сингулярным решением системы (6). Построить сетку, покрывающую  $\mathcal{C}$ .

Шаг 2. Зафиксировать некоторое значение  $x_0$  и (достаточно большое) значение  $x = x_\infty$ .

Шаг 3. Для каждого узла сетки  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ :

- 3.1. Вычислить значения  $u_k(x_\infty)$ ,  $u_{k,x}(x_\infty)$ , играющие роль начальных условий для задачи Коши, по формулам

$$u_k(x_\infty) = C_k Q_k^{-1/4}(x_\infty) e^{-S_k(x_0, x_\infty)}, \quad (12)$$

$$u_{k,x}(x_\infty) = -C_k Q_k^{1/4}(x_\infty) e^{-S_k(x_0, x_\infty)}, \quad (13)$$

где  $S_k(x_0, x)$  задается формулой (9) при  $k = 1, 2$ .

- 3.2. Решить численно задачу Коши с полученными начальными условиями при помощи “стрельбы назад”. Используя теорему о сингулярности, выявить ситуации:

- a) решение не имеет сингулярности на  $(x_0, x_\infty)$ ;
- б) решение имеет сингулярность в некоторой точке  $x^* \in (x_0, x_\infty)$ .

Сохранить информацию о точке  $x^*$ , в которой имеется сингулярность, и о поведении решения вблизи точки  $x^*$ .

Шаг 4. Проанализировав полученную информацию, выделить среди всех векторов  $\mathbf{C} \in \mathcal{C}$  те, которые отвечают локализованным решениям системы (6).

К этому алгоритму уместно сделать следующие комментарии:

1. Выделение множества  $\mathcal{C}$  можно произвести достаточно грубо. Возможен также вариант этого алгоритма, когда границы множества  $\mathcal{C}$  не определяются заранее, а находятся непосредственно в ходе сканирования.
2. Расчеты производятся несколько раз с различными константами  $x_0$  и  $x_\infty$ . Результат не должен зависеть от их выбора.
3. Шаг 4 приведенного алгоритма может быть осуществлен различными способами. Одна из возможных реализаций описана в разделе 3.2.
4. Алгоритм допускает эффективное распараллеливание, поскольку процедуры решения задач Коши для различных узлов сетки не зависят друг от друга.

### 3. Исследование системы двух уравнений с двухъя姆ным потенциалом.

**3.1. Однокомпонентные нелинейные моды.** Система уравнений (1) допускает решения, у которых одна из компонент  $u_1(x)$  или  $u_2(x)$  тождественно равна нулю. Такие решения мы будем называть однокомпонентными нелинейными модами. Вторая компонента при этом удовлетворяет уравнению

$$\tilde{D}u_{xx} + (\mu - V(x))u - u^3 = 0, \quad (14)$$

где  $\tilde{D} = 1$  в случае первого уравнения и  $\tilde{D} = D$  в случае второго уравнения, а  $V(x)$  — двухъямы потенциал. Для качественного анализа уравнения (14) достаточно рассмотреть случай  $\tilde{D} = 1$ . Эта задача исследовалась ранее, например, в работе [17].

Семейства локализованных решений уравнения (14) удобно представлять при помощи диаграммы на плоскости  $(\mu, \|u\|)$ , где  $\|u\|$  —  $L_2$ -норма решения. Соответствующая диаграмма для потенциала (5) изображена на рис. 2. Сделаем три замечания, касающиеся поведения этих локализованных решений.

1. В пределе  $\|u\| \rightarrow 0$  решения описываются линейным уравнением

$$\hat{u}_{xx} + (\mu - V(x))\hat{u} = 0, \quad (15)$$

которое имеет локализованные на всей числовой прямой решения, только если  $\mu = \mu^{(k)}$  при  $k = 0, 1, \dots$  является собственным значением оператора  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ . Четность собственных функций при этом чередуется: наимизшее собственное значение  $\mu^{(0)}$  соответствует четной собственной функции  $\hat{u}^{(0)}(x)$ , следующее  $\mu^{(1)}$  — нечетной  $\hat{u}^{(1)}(x)$  и так далее. Кроме того, собственные функции упорядочены по числу нулей:  $\hat{u}^{(0)}(x)$  не имеет нулей,  $\hat{u}^{(1)}(x)$  имеет один нуль и т.д.

2. При  $\|u\| \ll 1$  решения нелинейного уравнения (14) хорошо аппроксимируются решениями линейного уравнения (15). На рис. 2 ветви решений нелинейной задачи выходят из точек  $(\mu^{(k)}, 0)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Симметрия собственной функции  $\hat{u}^{(k)}(x)$  “наследуется” решением нелинейной задачи: решения нелинейной задачи для ветви  $\Gamma_0$ , выходящей из  $\mu^{(0)}$ , являются четными, а для ветви  $\Gamma_1$ , выходящей из  $\mu^{(1)}$  — нечетными и т.д. В физической литературе решения ветви  $\Gamma_0$  называются светлыми солитонами, решения ветви  $\Gamma_1$  — темными солитонами, решения ветви  $\Gamma_2$  иногда называются  $M$ -солитонами. В дальнейшем мы будем придерживаться этой терминологии.
3. С ростом  $\|u\|$  некоторые из этих семейств решений претерпевают бифуркацию потери симметрии. При этой бифуркации при некотором критическом значении  $\mu$  от ветви симметричных решений отщепляется пара решений, связанных друг с другом преобразованием симметрии. На рис. 2 показано, что эта бифуркация имеет место для семейства нечетных решений  $\Gamma_1$  при некотором значении  $\mu = \mu^*$ . Возникшие при этом семейства решений на рисунке обозначены  $\Gamma_1^+$  и  $\Gamma_1^-$ . Эти решения имеют одну и ту же  $L_2$ -норму, поэтому соответствующие кривые на рис. 2 совпадают.

Таким образом, для системы (1) однокомпонентные нелинейные моды вида  $(u_1(x), 0)$ , где  $u_1(x)$  — светлый солитон (семейство  $\Gamma_0$  на рис. 2), существуют при  $\mu_1 > \mu^{(0)}$  и любом  $\mu_2$ . Соответствующие моды, где  $u_1(x)$  — темный солитон (семейство  $\Gamma_1$  на рис. 2), существуют при  $\mu_1 > \mu^{(1)}$  и любом  $\mu_2$  и так далее. Аналогично определяются области существования однокомпонентных нелинейных мод вида  $(0, u_k(x))$  при  $k = 0, 1, \dots$ . В целях единообразия обозначений для симметричных однокомпонентных нелинейных мод мы будем использовать символы вида  $S_{n\#}$  и  $S_{\#n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Например, однокомпонентный светлый солитон с ненулевой первой компонентой будет обозначаться  $S_{0\#}$ , однокомпонентный темный солитон с ненулевой второй компонентой  $S_{\#1}$ . Для обозначения однокомпонентных несимметричных мод (ветви  $\Gamma_1^\pm$ ) с ненулевой первой/второй компонентой мы будем использовать символы  $S_{1\#}^\pm$  и  $S_{\#\#1}^\pm$  соответственно.

**3.2. Двухкомпонентные нелинейные моды.** Известно, что если обе компоненты нелинейной моды отличны от нуля, возможны различные сочетания их типов. В частности, могут возникать пары светлый-светлый солитон, темный-светлый солитон и так далее [2, 4, 5, 7, 18]. Одним из способов нахождения таких решений является продолжение двухкомпонентных решений из линейного предела, в котором  $\mu_1$  и  $\mu_2$  близки к собственным значениям  $\mu^{(k)}$  линейной задачи (15) и обе компоненты малы [8, 9, 19]. При таком подходе возникает естественная кодировка решений символами  $S_{nm}$ , где  $n, m$  — номера собственных значений  $\mu^{(k)}$  в линейной задаче. Например, нелинейная мода, продолженная из линейного предела  $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)})$ , соответствует светло-темному солитону и обозначается  $S_{01}$ . Такая же кодировка решений использовалась в работе [10] для случая гармонического потенциала. Мы будем придерживаться этой кодировки решений, хотя ниже увидим, что в случае двухъя姆ного потенциала ее оказывается недостаточно.

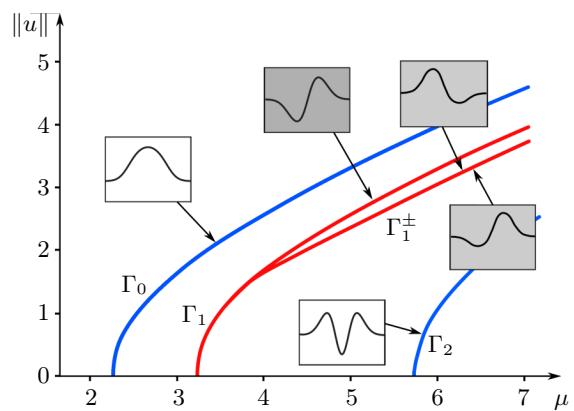


Рис. 2. Семейства решений уравнения (14) на плоскости  $(\mu, \|u\|)$  при  $\tilde{D} = 1$ . Параметры потенциала  $A = B = 5$

Fig. 2. The solution branches of equation (14) on the plane  $(\mu, \|u\|)$  for  $\tilde{D} = 1$ . Parameters of the potential are  $A = B = 5$



Для численного исследования была взята система уравнений (1) с параметрами  $D = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$ . Таким образом, исходная система принимала вид:

$$\begin{cases} u_{1,xx} + (\mu_1 - V(x))u_1 - (u_1^2 + u_2^2)u_1 = 0, \\ u_{2,xx} + (\mu_2 - V(x))u_2 - (u_1^2 + u_2^2)u_2 = 0. \end{cases}$$

Двухъямный потенциал  $V(x)$  при этом задавался формулой (5).

Опишем работу алгоритма при заданных параметрах потенциала и значениях  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Для сканирования выбиралась прямоугольная область на плоскости  $(C_1, C_2)$ , включающая точку  $(0, 0)$ . При этом, в силу нечетности нелинейностей по  $u_1$  и  $u_2$ , достаточно рассмотреть лишь четверть этой области

$$\mathcal{C} = \{(C_1, C_2) \mid 0 \leq C_1 \leq C_1^*, \quad 0 \leq C_2 \leq C_2^*\}.$$

Значения  $C_{1,2}^*$  выбирались экспериментально при помощи теоремы о множестве сингулярных решений.

В области  $\mathcal{C}$  вводилась прямоугольная сетка и выполнялась процедура численного сканирования. Для каждой пары  $(C_1, C_2)$ , соответствующей узлу сетки, по формулам (12), (13) находились начальные значения  $u_1(x_\infty), u_{1,x}(x_\infty), u_2(x_\infty), u_{2,x}(x_\infty)$  и решалась задача Коши при помощи “стрельбы назад”. Отмечались ситуации, когда решение оказывалось сингулярным, при этом фиксировалось, к плюс или минус бесконечности стремятся компоненты  $u_1$  и  $u_2$ . Соответственно, таким узлам решетки приписывался бинарный вектор  $(s_1, s_2)$ , где  $s_k \in \{0, 1\}$ . Случай  $s_k = 0$  отвечал уходу на минус бесконечность компоненты  $u_k$ ,  $k = 1, 2$ , случай  $s_k = 1$  — ее уходу на плюс бесконечность. Результат работы программы на этом этапе иллюстрирует рис. 3. Красные точки соответствуют решениям  $S_{01}^+$  и  $S_{01}^-$ .

Далее, производился анализ полученного массива бинарных векторов. Это делалось при помощи алгоритма “marching squares” (см., например, [20, раздел 6.2]), позволяющего найти линии  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в  $\mathcal{C}$ , для которых одна из компонент  $u_1$  или  $u_2$  не стремится к бесконечности. Точки пересечения этих линий и являются искомыми точками для данной процедуры. Поиск этих точек в ряде случаев осложнялся малостью угла между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , что при автоматической обработке массива приводило к ошибкам. Поэтому некоторые вызывающие сомнение результаты приходилось перепроверять и уточнять.

Области существования решений различных типов можно показать на плоскости  $\mathcal{M} = (\mu_1, \mu_2)$ . В нашем исследовании в квадрате  $0 < \mu_1, \mu_2 < 7$  была введена сетка, и описанная выше процедура применялась для каждого узла этой сетки. Фиксировалось количество нелинейных мод и их типы, одновременно существующие в рассматриваемой точке  $\mathcal{M}$ . После этого производилось уточнение границ областей, предсказанных процедурой сканирования (см. описание ниже). “Карта” областей, полученная в результате процедуры сканирования, приведена на рис. 4 а, а результат ее уточнения показан на рис. 4 б. Пунктирными линиями показаны значения  $\mu$ , при которых возникают бифуркции в однокомпонентном случае.

Резюмируем полученные результаты.

1. Нелинейные моды вида  $S_{nn}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , у которых обе компоненты имеют один и тот же тип (например, светлый-светлый солитон, темный-темный солитон), существуют только при  $\mu_1 = \mu_2$ .
2. На плоскости  $\mathcal{M}$  имеется клиновидная область  $G_{10}$ , для пар  $(\mu_1, \mu_2)$  внутри которой существуют нелинейные моды вида  $S_{10}$  (симметричный темный солитон в  $u_1$ -компоненте, симметричный светлый — в  $u_2$ -компоненте). Вершина “клина” находится в точке  $(\mu^{(1)}, \mu^{(0)})$  (см. раздел 3.1). На нижней

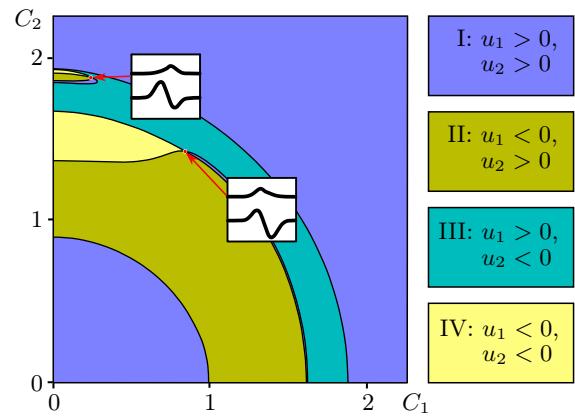


Рис. 3. Области на плоскости  $(C_1, C_2)$  (показан первый квадрант) с различным поведением решений задачи Коши вблизи точки сингулярности.

Параметры потенциала  $A = B = 5$ ;  $\mu_1 = 3.5$ ,  $\mu_2 = 5$

Fig. 3. Areas on the plane  $(C_1, C_2)$  (the first quadrant is shown) with different behaviour of the initial value problem in vicinity of the singularity. The parameters of the potential are  $A = B = 5$ ;  $\mu_1 = 3.5$ ,  $\mu_2 = 5$

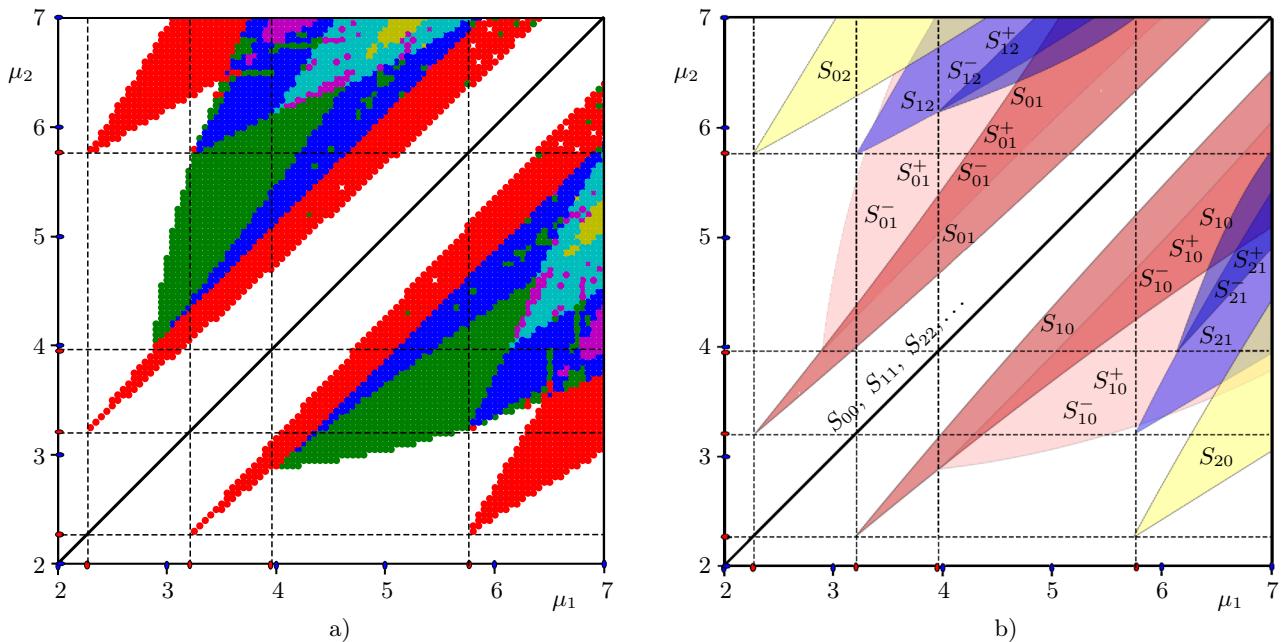


Рис. 4. Результаты численных расчетов для двухъя姆ного потенциала с параметрами  $A = B = 5$ : а) “карта” областей непосредственно после процедуры сканирования, разными цветами показано число одновременно существующих нелинейных мод при данных  $\mu_{1,2}$ ; б) то же самое после расшифровки и уточнения границ областей

Fig. 4. The results of computations for the double-well potential with parameters  $A = B = 5$ : a) “a map” of the areas immediately after the scanning procedure, different colors correspond to various numbers of coexisting nonlinear modes for given  $\mu_{1,2}$ ; b) the same but after decoding and refining the boundaries of the areas

границе этой области стремится к нулю  $u_2$ -компоненты нелинейной моды, на верхней границе стремится к нулю ее  $u_1$ -компоненты.

3. На плоскости  $\mathcal{M}$  имеется клиновидная область  $\tilde{G}_{10}$ , внутри которой существуют пары несимметричных нелинейных мод  $(u_1^\pm(x), u_2^\pm(x))$ , связанных между собой симметрией

$$u_1^+(x) = -u_1^-(x), \quad u_2^+(x) = u_2^-(x).$$

Эти нелинейные моды представляют собой комбинации несимметричных темных солитонов по  $u_1$ -компоненте и светлых — по  $u_2$ -компоненте. Вершина “клина” лежит на прямой  $\mu_1 = \mu^*$  (см. раздел 3.1). На верхней границе области  $\tilde{G}_{10}$  пара несимметричных нелинейных мод сливаются, образуя нелинейную моду  $S_{10}$  (бифуркация типа “вилка”). На нижней границе области  $\tilde{G}_{10}$  стремится к нулю  $u_2$ -компонента нелинейной моды. Для обозначения таких несимметричных нелинейных мод мы будем использовать символы  $S_{10}^-$  и  $S_{10}^+$ .

Области  $G_{10}$  и  $\tilde{G}_{10}$  частично накладываются друг на друга. В результате возникает достаточно сложная картина бифуркаций нелинейных мод при изменении параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . В качестве примера опишем бифуркации нелинейных мод, происходящие при фиксированном значении  $\mu_1 = 6$  и возрастании  $\mu_2$ . Соответствующая ситуация иллюстрируется на рис. 5.

Пусть  $\mu_1 > \mu^*$  (см. раздел 3.1), тогда:

- a) при пересечении параметром  $\mu_2$  нижней границы области  $\tilde{G}_{10}$  происходит бифуркация рождения несимметричных мод  $S_{10}^\pm$  из однокомпонентной моды  $S_{1\#}$ ;
- б) при пересечении параметром  $\mu_2$  нижней границы области  $G_{10}$  происходит бифуркация рождения нелинейных симметричных мод  $S_{10}$  из однокомпонентной моды  $S_{1\#}$ ;
- в) при пересечении параметром  $\mu_2$  верхней границы области  $\tilde{G}_{10}$  происходит бифуркация типа “вилка”, при которой несимметричные моды вида  $S_{10}^\pm$  сливаются с симметричной модой  $S_{10}$ ;
- г) при пересечении параметром  $\mu_2$  верхней границы области  $G_{10}$  симметричная мода  $S_{10}$  вырождается в однокомпонентную моду  $S_{\#0}$ .

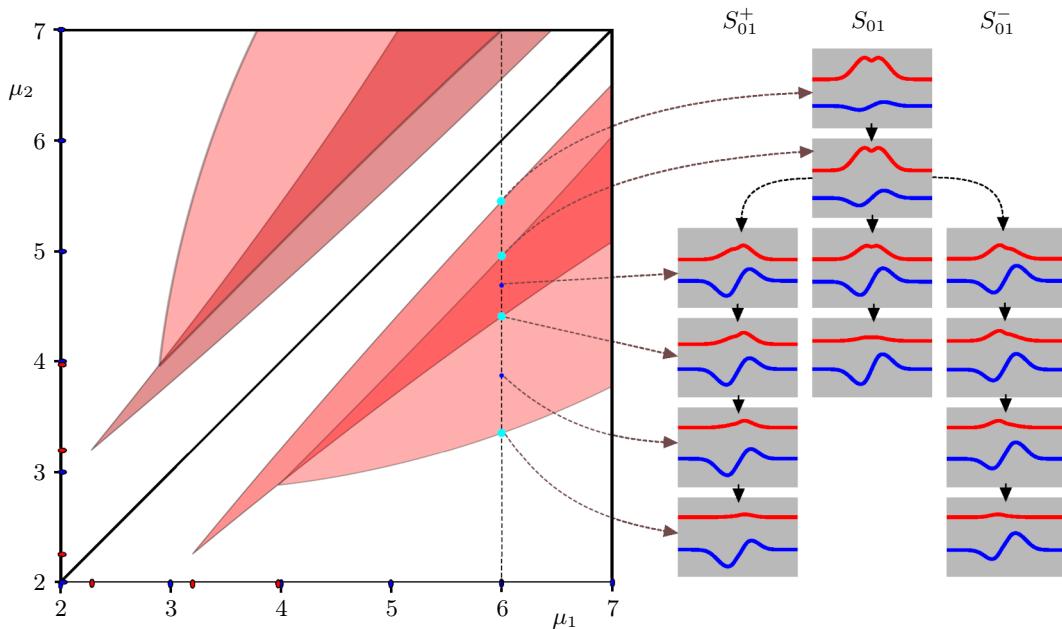


Рис. 5. Бифуркации темно-светлых солитонов

Fig. 5. Bifurcations of dark-bright solitons

4. Аналогичная картина имеет место, если поменять местами компоненты нелинейной моды. А именно, на плоскости  $\mathcal{M}$  имеются области  $G_{01}$  и  $\tilde{G}_{01}$ , расположенные симметрично относительно прямой  $\mu_1 = \mu_2$ , в которых существуют нелинейные моды  $S_{01}$  и  $S_{01}^\pm$  соответственно.
5. Бифуркации более сложных нелинейных мод также происходят по сценарию, подобному описанному выше. В частности, на плоскости  $\mathcal{M}$  имеется клиновидная область  $G_{21}$ , в которой существуют нелинейные моды  $S_{21}$ , имеющие вид симметричного темного солитона в  $u_1$ -компоненте и симметричного  $M$ -солитона в  $u_2$ -компоненте. Также имеется клиновидная область  $\tilde{G}_{21}$ , на одной из границ которой рождается пара решений  $S_{21}^\pm$ , имеющих вид несимметричного темного солитона в  $u_1$ -компоненте и  $M$ -солитона в  $u_2$ -компоненте. На рис. 4 b эти области обозначены синим цветом. В областях  $G_{12}$  и  $\tilde{G}_{12}$ , симметричных относительно прямой  $\mu_1 = \mu_2$  (также отмечены на рис. 4 b синим цветом), существуют нелинейные моды  $S_{12}$  и  $S_{12}^\pm$ , аналогичные  $S_{21}$  и  $\tilde{G}_{21}$  с точностью до перестановки местами компонент  $u_1$  и  $u_2$ . Имеется также область  $G_{20}$ , в которой существует решение со светлым солитоном в  $u_1$ -компоненте и  $M$ -солитоном в  $u_2$ -компоненте (показана на рис. 4 b желтым цветом). На нижней границе области  $G_{20}$  стремится к нулю  $u_2$ -компонента нелинейной моды, на верхней границе стремится к нулю ее  $u_1$ -компонента.

Покажем, как можно уточнить полученную в результате сканирования “карту” областей на примере области  $G_{10}$ . Рассмотрим нижнюю границу области  $G_{10}$ . Численное исследование показало, что на этой границе стремится к нулю  $u_2$ -компонента решения. Тогда с точностью до квадратичных членов функция  $u_2(x)$  удовлетворяет линейному уравнению

$$u_{2,xx} + (\mu_2 - V(x) - u_1^2(x))u_2 = 0, \quad (16)$$

где  $u_1(x)$  — решение уравнения

$$u_{1,xx} + (\mu_1 - V(x))u_1 - u_1^3 = 0. \quad (17)$$

Пусть  $\mu_1$  задано и найдено соответствующее ему решение  $u_1(x)$  уравнения (17), имеющее вид темного солитона. Уравнение (16) при этом является уравнением Шредингера с потенциалом  $V(x) + u_1^2(x)$ . Оно имеет ограниченные решения только если  $\mu_2$  принадлежит спектру этого потенциала. Найдя численно наименьшее собственное значение  $\mu_2$ , соответствующее собственной функции уравнения (16), не имеющей нулей на  $\mathbb{R}$ , получаем точку  $(\mu_1, \mu_2)$ , лежащую на нижней границе области  $G_{10}$ . Варьируя  $\mu_1$ , получаем зависимость  $\mu_2(\mu_1)$ , соответствующую рассматриваемой границе области  $G_{10}$ . Аналогичным образом можно уточнить верхнюю границу области  $G_{10}$ .

**4. Заключение.** В данной работе мы исследовали нелинейные моды, описываемые системой двух связанных нелинейных уравнений Шредингера/Гросса–Питаевского с дополнительным двухъярмым потенциалом. Задача ставилась следующим образом: необходимо найти все нелинейные моды, существующие одновременно при заданных значениях параметров, и обосновать полноту проведенного поиска. Для решения этой задачи использовался “метод исключения сингулярных решений”, предложенный в работе [10]. Он состоит в сканировании некоторой области в пространстве начальных данных задачи Коши для системы двух связанных ОДУ. При этом решения задачи Коши для этой системы, уходящие на бесконечность при конечном значении аргумента (сингулярные решения), выявляются и исключаются из рассмотрения. Случай, когда решения задачи Коши не являются сингулярными, локализуются и анализируются. Диагностика сингулярностей и критерий остановки процесса сканирования основываются на математически строгих утверждениях. В результате для случая двухъярмного потенциала определены области параметров задачи, в которых существуют нелинейные моды различных типов (светлый-темный солитон, темный-темный солитон и др.).

В результате данного исследования было продемонстрировано, что указанная процедура сканирования позволяет получить общее представление о наборе нелинейных мод, одновременно существующих при заданных значениях параметров. Когда общее представление о возможных типах нелинейных мод получено, найденные границы соответствующих областей можно уточнить, используя достаточно простые алгоритмы, которые обсуждаются в конце раздела 3.2. Природа возникающих при сканировании неточностей понятна. Повышение эффективности алгоритма сканирования может быть реализовано путем сгущения сетки, покрывающей область сканирования в проблемных областях. Одно из направлений совершенствования данного алгоритма связано с генерацией таких адаптивных сеток. Другое направление совершенствования этого алгоритма связано с эффективным распараллеливанием его процессов.

Процедура может быть применена к поиску стационарных решений различных задач нелинейной оптики и теории конденсата Бозе–Эйнштейна. В частности, интересно детально изучить влияние параметров задачи, констант  $D$ , а также  $\alpha_{nm}$  на полученную “карту” областей существования решений. Также представляет интерес провести подобные исследования для несимметричных двухъярмых потенциалов.

Еще одно возможное применение описанного алгоритма связано с активно обсуждаемой в настоящее время системой уравнений из теории ультрахолодных газов [21]

$$\begin{cases} i\psi_{1,t} = \psi_{1,xx} - V(x)\psi_1 - (\alpha_{11}|\psi_1|^2 + \alpha_{12}|\psi_2|^2)\psi_1 + \gamma_1(\alpha_{11}|\psi_1|^2 + \alpha_{22}|\psi_2|^2)^{1/2}\psi_1, \\ i\psi_{2,t} = \psi_{2,xx} - V(x)\psi_2 - (\alpha_{21}|\psi_1|^2 + \alpha_{22}|\psi_2|^2)\psi_2 + \gamma_2(\alpha_{11}|\psi_1|^2 + \alpha_{22}|\psi_2|^2)^{1/2}\psi_2. \end{cases} \quad (18)$$

Система (18) описывает сигарообразное облако двухкомпонентного БЭК в модели среднего поля с поправкой Ли–Хуанга–Янга. Можно убедиться в том, что если  $\alpha_{nm} > 0$ ,  $n, m = 1, 2$ , условия трех теорем, на которые опирается алгоритм, также выполняются. Насколько нам известно, детального исследования данной задачи до сих пор не проводилось.

После нахождения областей существования нелинейных мод различных типов естественным является выяснение вопроса об их устойчивости. Для исследования устойчивости по линейному приближению необходимо найти спектр некоторой задачи на собственные значения. Предполагается, что процедуры нахождения нелинейных мод и исследования их устойчивости можно свести в единый программный комплекс, который мог бы оказаться полезным для физиков-теоретиков, занимающихся данной тематикой.

## Список литературы

1. Sowinski T., Garcia-March M.A. One-dimensional mixtures of several ultracold atoms: a review // Reports on Progress in Physics. 2019. **82**, No. 10. Article Number 104401. doi [10.1088/1361-6633/ab3a80](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab3a80).
2. Busch Th., Anglin J.R. Dark-bright solitons in inhomogeneous Bose–Einstein condensates // Physical Review Letters. 2001. **87**, No. 1. Article Id. 010401. doi [10.1103/PhysRevLett.87.010401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.010401).
3. Becker C., Stellmer S., Soltan-Panahi P., et al. Oscillations and interactions of dark and dark-bright solitons in Bose–Einstein condensates // Nature Physics. 2008. **4**. 496–501. doi [10.1038/nphys9](https://doi.org/10.1038/nphys9).
4. Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J. Solitons in coupled nonlinear Schrödinger models: a survey of recent developments // Reviews in Physics. 2016. **1**. 140–153. doi [10.1016/j.revip.2016.07.002](https://doi.org/10.1016/j.revip.2016.07.002).
5. Kevrekidis P.G., Nistazakis H.E., Frantzeskakis D.J., et al. Families of matter-waves in two-component Bose–Einstein condensates // Eur. Phys. J. D. 2004. **28**, No. 2. 181–185. doi [10.1140/epjd/e2003-00311-6](https://doi.org/10.1140/epjd/e2003-00311-6).



6. Middelkamp S., Chang J.J., Hamner C., et al. Dynamics of dark-bright solitons in cigar-shaped Bose–Einstein condensates // Physics Letters A. 2011. **375**, No. 3. 642–646. doi [10.1016/j.physleta.2010.11.025](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.11.025).
7. Yan D., Chang J. J., Hamner C., et al. Beating dark-dark solitons in Bose–Einstein condensates // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2012. **45**, No. 11. Article Number 115301. doi [10.1088/0953-4075/45/11/115301](https://doi.org/10.1088/0953-4075/45/11/115301).
8. Wang W., Zhao L.-C., Charalampidis E.G., Kevrekidis P.G. Dark-dark soliton breathing patterns in multi-component Bose–Einstein condensates // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2021. **54**, No. 5. Article Number 055301. doi [10.1088/1361-6455/abe67d](https://doi.org/10.1088/1361-6455/abe67d).
9. Wang W. Systematic solitary waves from their linear limits in two-component Bose–Einstein condensates with unequal dispersion coefficients // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2023. **56**, No 13. Article Number 135301. doi [10.1088/1361-6455/acdb16](https://doi.org/10.1088/1361-6455/acdb16).
10. Alfimov G.L., Fedotov A.P., Kutsenko N.A., Zezyulin D.A. Stationary modes for vector nonlinear Schrödinger-type equations: a numerical procedure for complete search and its mathematical background // Phys. D: Nonlinear Phenom. 2023. **454**. Article Id. 133858. doi [10.1016/j.physd.2023.133858](https://doi.org/10.1016/j.physd.2023.133858).
11. Alfimov G.L., Avramenko A.I. Coding of nonlinear states for the Gross–Pitaevskii equation with periodic potential // Phys. D: Nonlinear Phenom. 2013. **254**. 29–45. doi [10.1016/j.physd.2013.03.009](https://doi.org/10.1016/j.physd.2013.03.009).
12. Alfimov G.L., Kizin P.P., Zezyulin D.A. Gap solitons for the repulsive Gross–Pitaevskii equation with periodic potential: coding and method for computation // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2017. **22**, No. 4. 1207–1229. doi [10.3934/dcdsb.2017059](https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017059).
13. Lebedev M.E., Alfimov G.L. Numerical evidence of hyperbolic dynamics and coding of solutions for Duffing-type equations with periodic coefficients // Regul. Chaot. Dyn. 2024. **29**, No. 3. 451–473. doi [10.1134/S156035472451004X](https://doi.org/10.1134/S156035472451004X).
14. Wang C., Kevrekidis P.G., Whitaker N., Malomed B.A. Two-component nonlinear Schrödinger models with a double-well potential // Phys. D: Nonlinear Phenom. 2008. **237**, No. 22. 2922–2932. doi [10.1016/j.physd.2008.04.023](https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.04.023).
15. Raghavan S., Smerzi A., Fantoni S., Shenoy S.R. Coherent oscillations between two weakly coupled Bose–Einstein condensates: Josephson effects, pi-oscillations, and macroscopic quantum self-trapping // Phys. Rev. A. 1999. **59**, No. 1. 620–633. doi [10.1103/PhysRevA.59.620](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.620).
16. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
17. Alfimov G.L., Zezyulin D.A. Nonlinear modes for the Gross–Pitaevskii equation — a demonstrative computation approach // Nonlinearity. 2007. **20**, No. 9. 2075–2092. doi [10.1088/0951-7715/20/9/004](https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/9/004).
18. Navarro R., Carretero-González R., Kevrekidis P.G. Phase separation and dynamics of two-component Bose–Einstein condensates // Phys. Rev. A. 2009. **80**, No. 2. Article Id. 023613. doi [10.1103/PhysRevA.80.023613](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.023613).
19. Wang W. Systematic vector solitary waves from their linear limits in one-dimensional n-component Bose–Einstein condensates // Phys. Rev. E. 2021. **104**, No. 1. Article Number 014217. doi [10.1103/PhysRevE.104.014217](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.014217).
20. Schroeder W., Martin K., Lorenzen B. The visualization toolkit. An object-oriented approach to 3D graphics. <https://gitlab.kitware.com/vtk/textbook/raw/master/VTKBook/VTKTextBook.pdf>. Cited June 28, 2025.
21. Abdullaev F.K., Galimzyanov R.M., Shermakhmatov A.M. Beyond-mean-field effects in dynamics of BEC in the double-well potential // Eur. Phys. J. D. 2024. **78**, No. 9. Article Id. 118. doi [10.1140/epjd/s10053-024-00909-4](https://doi.org/10.1140/epjd/s10053-024-00909-4).

Получена  
27 мая 2025 г.

Принята  
24 июня 2025 г.

Опубликована  
18 июля 2025 г.

### Информация об авторах

*Никита Андреевич Кученко* — аспирант; Национальный исследовательский университет “Московский институт электронной техники”, Зеленоград, пл. Шокина, 1, 124498, Москва, Российская Федерация.

*Георгий Леонидович Алфимов* — д.ф.-м.н., профессор; Национальный исследовательский университет “Московский институт электронной техники”, Зеленоград, пл. Шокина, 1, 124498, Москва, Российская Федерация.

### References

1. T. Sowinski and M. A. Garcia-March, “One-Dimensional Mixtures of Several Ultracold Atoms: A Review,” Rep. Prog. Phys. **82** (10), Article Number 104401 (2019). doi [10.1088/1361-6633/ab3a80](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab3a80).
2. Th. Busch and J. R. Anglin, “Dark-Bright Solitons in Inhomogeneous Bose–Einstein Condensates,” Phys. Rev. Lett. **87** (1), Article Id. 010401 (2001). doi [10.1103/PhysRevLett.87.010401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.010401).

3. C. Becker, S. Stellmer, P. Soltan-Panahi, et al., “Oscillations and Interactions of Dark and Dark-Bright Solitons in Bose–Einstein Condensates,” *Nat. Phys.* **4**, 496–501 (2008). doi [10.1038/nphys962](https://doi.org/10.1038/nphys962).
4. P. G. Kevrekidis and D. J. Frantzeskakis, “Solitons in Coupled Nonlinear Schrödinger Models: A Survey of Recent Developments,” *Rev. Phys.* **1**, 140–153 (2016). doi [10.1016/j.revip.2016.07.002](https://doi.org/10.1016/j.revip.2016.07.002).
5. P. G. Kevrekidis, H. E. Nistazakis, D. J. Frantzeskakis, et al., “Families of Matter-Waves in Two-Component Bose–Einstein Condensates,” *Eur. Phys. J. D* **28** (2), 181–185 (2004). doi [10.1140/epjd/e2003-00311-6](https://doi.org/10.1140/epjd/e2003-00311-6).
6. S. Middelkamp, J. J. Chang, C. Hamner, et al., “Dynamics of Dark-Bright Solitons in Cigar-shaped Bose–Einstein Condensates,” *Phys. Lett. A* **375** (3), 642–646 (2011). doi [10.1016/j.physleta.2010.11.025](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.11.025).
7. D. Yan, J. J. Chang, C. Hamner, et al., “Beating Dark-Dark Solitons in Bose–Einstein Condensates,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45** (11), Article Number 115301 (2012). doi [10.1088/0953-4075/45/11/115301](https://doi.org/10.1088/0953-4075/45/11/115301).
8. W. Wang, L.-C. Zhao, E. G. Charalampidis, and P. G. Kevrekidis, “Dark-Dark Soliton Breathing Patterns in Multi-Component Bose–Einstein Condensates,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **54** (5), Article Number 055301 (2021). doi [10.1088/1361-6455/abe67d](https://doi.org/10.1088/1361-6455/abe67d).
9. W. Wang, “Systematic Solitary Waves from Their Linear Limits in Two-Component Bose–Einstein Condensates with Unequal Dispersion Coefficients,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **56** (13), Article Number 135301 (2023). doi [10.1088/1361-6455/acdb16](https://doi.org/10.1088/1361-6455/acdb16).
10. G. L. Alfimov, A. P. Fedotov, N. A. Kutsenko, and D. A. Zezyulin, “Stationary Modes for Vector Nonlinear Schrödinger-Type Equations: A Numerical Procedure for Complete Search and Its Mathematical Background,” *Phys. D: Nonlinear Phenom.* **454**, Article Id. 133858 (2023). doi [10.1016/j.physd.2023.133858](https://doi.org/10.1016/j.physd.2023.133858).
11. G. L. Alfimov and A. I. Avramenko, “Coding of Nonlinear States for the Gross–Pitaevskii Equation with Periodic Potential,” *Phys. D: Nonlinear Phenom.* **254**, 29–45 (2013). doi [10.1016/j.physd.2013.03.009](https://doi.org/10.1016/j.physd.2013.03.009).
12. G. L. Alfimov, P. P. Kizin, and D. A. Zezyulin, “Gap Solitons for the Repulsive Gross–Pitaevskii Equation with Periodic Potential: Coding and Method for Computation,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **22** (4), 1207–1229 (2017). doi [10.3934/dcdsb.2017059](https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017059).
13. M. E. Lebedev and G. L. Alfimov, “Numerical Evidence of Hyperbolic Dynamics and Coding of Solutions for Duffing-Type Equations with Periodic Coefficients,” *Regul. Chaot. Dyn.* **29** (3), 451–473 (2024). doi [10.1134/S156035472451004X](https://doi.org/10.1134/S156035472451004X).
14. C. Wang, P. G. Kevrekidis, N. Whitaker, and B. A. Malomed, “Two-Component Nonlinear Schrödinger Models with a Double-Well Potential,” *Phys. D: Nonlinear Phenom.* **237** (22), 2922–2932 (2008). doi [10.1016/j.physd.2008.04.023](https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.04.023).
15. S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni, and S. R. Shenoy, “Coherent Oscillations between Two Weakly Coupled Bose–Einstein Condensates: Josephson Effects, pi-Oscillations, and Macroscopic Quantum Self-Trapping,” *Phys. Rev. A* **59** (1), 620–633 (1999). doi [10.1103/PhysRevA.59.620](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.620).
16. F. A. Berezin and M. A. Shubin, *The Schrödinger Equation* (Kluwer, Dordrecht, 1991; Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1983). doi [10.1007/978-94-011-3154-4](https://doi.org/10.1007/978-94-011-3154-4).
17. G. L. Alfimov and D. A. Zezyulin, “Nonlinear Modes for the Gross–Pitaevskii Equation — a Demonstrative Computation Approach,” *Nonlinearity* **20** (9), 2075–2092 (2007). doi [10.1088/0951-7715/20/9/004](https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/9/004).
18. R. Navarro, R. Carretero-González, and P. G. Kevrekidis, “Phase Separation and Dynamics of Two-Component Bose–Einstein Condensates,” *Phys. Rev. A* **80** (2), Article Id. 023613 (2009). doi [10.1103/PhysRevA.80.023613](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.023613).
19. W. Wang, “Systematic Vector Solitary Waves from Their Linear Limits in One-Dimensional n-Component Bose–Einstein Condensates,” *Phys. Rev. E* **104** (1), Article Number 014217 (2021). doi [10.1103/PhysRevE.104.014217](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.014217).
20. W. Schroeder, K. Martin, and B. Lorensen, *The Visualization Toolkit. An Object-Oriented Approach to 3D Graphics* <https://gitlab.kitware.com/vtk/textbook/raw/master/VTKBook/VTKTextBook.pdf>. Cited June 28, 2025.
21. F. K. Abdullaev, R. M. Galimzyanov, and A. M. Shermakhmatov, “Beyond-Mean-Field Effects in Dynamics of BEC in the Double-Well Potential,” *Eur. Phys. J. D* **78** (9), Article Id. 118 (2024). doi [10.1140/epjd/s10053-024-00909-4](https://doi.org/10.1140/epjd/s10053-024-00909-4).

Received  
May 27, 2025

Accepted  
June 24, 2025

Published  
July 18, 2025

#### Information about the authors

*Nikita A. Kutsenko* — Ph.D. student; National Research University of Electronic Technology, Zelenograd, Shokina ploshchad', 1, 124498, Moscow, Russia.

*Georgy L. Alfimov* — Dr. Sci., Professor; National Research University of Electronic Technology, Zelenograd, Shokina ploshchad', 1, 124498, Moscow, Russia.