УДК 519.6

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДВУМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТ-ОСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МНОГОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА

С. П. Копысов[1]**, Ю. А. Сагдеева**[1]

Рассматривается вычислительная схема двумерного вейвлет-осреднения на основе базиса Хаара и ее особенности. Предлагаются способы улучшения эффективности схемы. Приводятся численные результаты вейвлет-осреднения в задачах теории упругости композитных материалов.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование, многомасштабный анализ, базис Хаара, метод конечных элементов, теория упругости композиционных материалов.

1. Введение. Вейвлеты являются одним из актуальных направлений развития прикладной математики. Основы теории вейвлетов представлены в [1−3]. В отечественной литературе основное внимание уделялось описанию вейвлетов с позиции цифровой обработки сигналов [4], где они использовались для анализа в частотной и временной областях динамически развивающихся систем. Однако область применения вейвлетов и вейвлет-преобразований намного шире.

Одно из главных преимуществ вейвлет-преобразования заключается в возможности работать с функцией на интересующем уровне разрешения. С помощью вейвлет-преобразования можно получить осредненное представление функции (грубый масштаб — “низкое разрешение”) и выделить ее локальные свойства (мелкий масштаб — “высокое разрешение”). Данное свойство преобразования позволяет ввести многомасштабный анализ исследуемой функции, или анализ с переменным разрешением. Впервые этот анализ был теоретически обоснован в [5].

В работе рассматривается задача вейвлет-осреднения на примере задачи теории упругости композиционного материала. Приводятся основные теоретические сведения, касающиеся вейвлетов, базиса Хаара, диадного дискретного преобразования и многомасштабного анализа функции. Рассматривается применение вейвлет-преобразования к системам алгебраических уравнений и схема двумерного вейвлет-преобразования. Основной акцент работы сделан на вычислительных особенностях предлагаемого алгоритма, поскольку получающиеся в процессе счета матрично-векторные объекты имеют определенную структуру. Обсуждаются численные результаты и дается анализ их сравнения с результатами метода асимптотического осреднения [6], который можно отнести к двухмасштабным методам.

2. Вейвлеты. В данном разделе кратко излагаются основные положения теории вейвлетов.

2.1. Базис Хаара. Рассмотрим пространство $L_2(\mathbb{R})$. Вейвлетами называются функции, образующие базис пространства $L_2(\mathbb{R})$ и получаемые сдвигом и сжатием одной функции (обозначим ее $\psi(x)$), называемой *материнским* вейвлетом, по формулам

$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\psi(2^n x - k), \quad k,\, n \in \mathbb{Z}.$$

Функции имеют конечный носитель и их средние равны нулю, т.е. $\int \psi_{n,k}\,dx = 0$. Кроме того, вводятся *масштабирующие* функции $\varphi_{n,k}(x)$, которые тоже являются базисом пространства $L_2(\mathbb{R})$ и образуются по аналогичной схеме

$$\varphi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\varphi(2^n x - k),$$

но среднее этих функций равно единице, т.е. $\int \varphi_{n,k}(x)\,dx = 1$. В качестве вейвлетов в данной работе был выбран базис Хаара. Его преимуществами являются простота, ортогональность и симметричность (к недостаткам можно отнести малую гладкость базиса). Базис Хаара задается следующими функциями:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

---

[1] Институт прикладной механики Уральского отделения РАН, ул. Т. Барамзиной, 34, 426067, г. Ижевск; e-mail: sagdeeva@vpost.ru

2.2. Кратномасштабная декомпозиция функций. Иерархические свойства вейвлетов и масштабирующих функций лежат в основе кратномасштабного анализа. Такой анализ позволяет представить функцию в виде ее последовательных приближений. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{Z}$ пространство, натянутое на масштабирующие функции

$$V_n = \operatorname{span}\left\{\varphi_{n,k}(x)\right\}. \tag{1}$$

Пространства (1) обладают свойствами вложенности и иерархичности:

$$V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n \subset \ldots \subset L_2(\mathbb{R}), \tag{2}$$

$$f(x) \in V_n \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{n+1}. \tag{3}$$

Пространство V_{n+1} может быть определено как прямая сумма пространства V_n и дополнения к нему $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ (в случае базиса Хаара это дополнение будет ортогональным). Вейвлеты $\psi_{n,k}(x)$ образуют базис пространства W_n.

Таким образом, произвольная функция $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ может аппроксимироваться последовательностью функций $f_n(x) \in V_n$. Наилучшей аппроксимацией функции $f(x)$ в пространстве V_n является ее ортогональная проекция на это пространство:

$$f_n(x) = \sum_k \bigl(f(x), \varphi_{n,k}(x)\bigr)\varphi_{n,k}(x) = \sum_k c_{n,k}(x)\varphi_{n,k}(x). \tag{4}$$

В силу (1)–(3) функцию $f_n(x) \in V_n$ можно представить через функции подпространств V_j и W_j для $j = n-1, \ldots, n-M$:

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + g_{n-1}(x) = f_{n-M} + \sum_{i=1}^{M} g_{n-i}(x).$$

С учетом (4) можно записать

$$f_n(x) = c_{00}\varphi(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \in Z} d_{jk}\psi_{j,k}(x). \tag{5}$$

Представление (5) называется вейвлет-разложением функции f_n. Таким образом, функция из V_n представляется в виде совокупности грубого приближения (функция $\varphi(x)$) и уточняющих добавок (функции $\psi_{j,k}(x)$).

Введем в рассмотрение вектор c_n размерности 2^n. Данный вектор представим как последовательность коэффициентов разложения в многомасштабном анализе некоторой функции f_n:

$$f_n = \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\varphi_{n,k}, \quad c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, \ldots, c_{n,2^n}).$$

Для базисных функций $\varphi_{n,k}(x) \in V_n$ справедливо равенство

$$\varphi_{n,k}(x) = c_{n-1}\varphi_{n-1,k}(x) + d_{n-1}\psi_{n-1,k}(x).$$

Поэтому коэффициенты разложения выражаются в матрично-векторном виде: $c_{n-1} = P_n c_n$, $d_{n-1} = Q_n c_n$. Вектор c_{n-1} является проекцией вектора c_n на пространство V_{n-1}, т.е. его огрубленным представлением. Вектор d_{n-1} соответствует уточняющим коэффициентам. Строки матрицы P и Q образуются последовательным сдвигом первой строки, т.к. масштабирующие функции инвариантны относительно сдвига. Кроме того, возможна и обратная операция восстановления:

$$\begin{pmatrix} c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} c_n, \quad c_n = \bigl(P_n^{-1} | Q_n^{-1}\bigr) \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Если масштабирующие функции ортогональны между собой, ортогональны вейвлетам и вейвлеты ортогональны между собой, то преобразование

$$W_n = \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

является ортогональным, т.е. $W_n^{-1} = W_n^T$, а операции декомпозиции и восстановления запишутся в виде

$$r_n = W_n c_n, \quad c_n = W_n^T r_n, \quad \text{где} \quad r_n = \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2.3. Численное вейвлет-осреднение. Рассмотрим линейную систему алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad A = (a_{ij}), \quad b = (b_i), \quad x = (x_i), \quad i, j = 1, \ldots, 2^n. \tag{7}$$

Данная система получается при решений некоторого операторного уравнения $Lu = f$, где L — дифференциальный оператор, u — неизвестная функция. Способ получения системы зависит от метода решения этого операторного уравнения. В данной работе использовался метод конечных элементов. Кроме того, предполагалось, что матрица A — симметрична и положительно определена.

Применим к (7) ортогональное одномерное вейвлет-преобразование W_n из (6). Получим

$$WAx = Wb,$$

$$WAW^T Wx = Wb, \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} A(P_n^T Q_n^T) \begin{pmatrix} x_{n-1}^c \\ x_{n-1}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1}^c \\ b_{n-1}^d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_n A P_n^T & P_n A Q_n^T \\ Q_n A P_n^T & Q_n A Q_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1}^c \\ x_{n-1}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1}^c \\ b_{n-1}^d \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Осредненный вектор x_{n-1}^c (этот вектор имеет вдвое меньше координат, чем исходный) выражается из последнего уравнения с помощью дополнения Шура. Введем обозначения

$$K_{11} = Q_n A Q_n^T, \quad K_{12} = Q_n A P^T, \quad K_{21} = P_n A Q_n^T, \quad K_{22} = P_n A P_n^T,$$

$$x_1 = x_{n-1}^d, \quad x_2 = x_{n-1}^c, \quad b_1 = b_{n-1}^d, \quad b_2 = b_{n-1}^c,$$

и перепишем систему (9) в виде

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Выразив x_1 из первого уравнения и подставив его во второе, получим систему

$$Sx_2 = b, \tag{10}$$

где S — дополнение Шура

$$S = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}, \quad b = b_2 - K_{21} K_{11}^{-1} b_1.$$

Разрешив (10), получаем искомое осредненное решение x_2.

При необходимости дальнейшего осреднения, к системе (10) можно опять применить вейвлет-преобразование. Таким образом, рекурсивно используя вейвлет-преобразование несколько раз, можно найти грубое представление вектора x в нужном масштабе, причем на самом грубом масштабе получается система из одного уравнения. Система (10) считается осредненной системой для (7).

2.4. Двумерное вейвлет-преобразование. Введем расширение вейвлет-представления с одномерного случая на двумерный $L_2(\mathbb{R}^2)$. Базисные функции в этом случае образуются за счет всевозможных комбинаций тензорных произведений базисных функций для одномерного случая:

$$\varphi_{j,k} \otimes \varphi_{j,k}, \quad \psi_{j,k} \otimes \varphi_{j,k}, \quad \varphi_{j,k} \otimes \psi_{j,k}, \quad \psi_{j,k} \otimes \psi_{j,k}.$$

Аналогично одномерному случаю, введем последовательность вложенных пространств $\mathcal{V}_n$ и пространств $\mathcal{W}_n$:

$$\mathcal{V}_n = \operatorname{span}\{\varphi_{n,k_1} \otimes \varphi_{n,k_2}, k_i \in Z\},$$

$$\mathcal{W}_n = \operatorname{span}\{\psi_{n,k_3} \otimes \varphi_{n,k_4}, \varphi_{n,k_5} \otimes \psi_{n,k_6}, \psi_{n,k_7} \otimes \psi_{n,k_8}, k_i \in Z\}.$$

Как видно, $\dim(\mathcal{W}_n) = 3 \times \dim(\mathcal{V}_n)$. Пространство $\mathcal{V}_n = V_n \otimes V_n$ отвечает за осредненные величины, пространство $\mathcal{W}_n = (W_n \otimes W_n) \oplus (W_n \otimes V_n) \oplus (V_n \otimes W_n)$ содержит информацию о взаимосвязи двух направлений и уточняющую информацию.

В двумерном случае вектор d_{n-1} состоит из трех компонент, а вейвлет-преобразование формируется из четырех операторов проекций

$$\mathcal{W}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{Q}_1 \\ \mathcal{Q}_2 \\ \mathcal{Q}_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \mathcal{P}\ &: V_n \otimes V_n \longrightarrow V_{n-1} \otimes V_{n-1}, \\ \mathcal{Q}_1 &: V_n \otimes V_n \longrightarrow V_{n-1} \otimes W_{n-1}, \\ \mathcal{Q}_2 &: V_n \otimes V_n \longrightarrow W_{n-1} \otimes V_{n-1}, \\ \mathcal{Q}_3 &: V_n \otimes V_n \longrightarrow W_{n-1} \otimes W_{n-1}. \end{aligned}$$

Операторы $\mathcal{P}, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$ состоят из двух блоков — один из них действует по координате x, а второй — по координате y:

$$\mathcal{P} = P_x P_y, \quad \mathcal{Q}_1 = P_x Q_y, \quad \mathcal{Q}_2 = Q_x P_y, \quad \mathcal{Q}_3 = Q_x Q_y.$$

Преобразование $\mathcal{W}_n$ является ортогональным, т.к. свойства базисных функций сохраняются. Применяя преобразование $\mathcal{W}_n$ к системе (7), получим (индексы n и $n-1$ опущены)

$$\mathcal{W}A\mathcal{W}^T\mathcal{W}x = \mathcal{W}b, \qquad \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{Q}_1 \\ \mathcal{Q}_2 \\ \mathcal{Q}_3 \end{pmatrix} A(\mathcal{P}^* \mathcal{Q}_1^* \mathcal{Q}_2^* \mathcal{Q}_3^*) \begin{pmatrix} x^c \\ x_1^d \\ x_2^d \\ x_3^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^c \\ b_1^d \\ b_2^d \\ b_3^d \end{pmatrix};$$

в матрично-блочном виде система приводится к виду

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Размерность полученной системы будет совпадать с размером исходной системы. Разложение системы на подпространства меньшей размерности может быть продолжено, как и в одномерном случае.

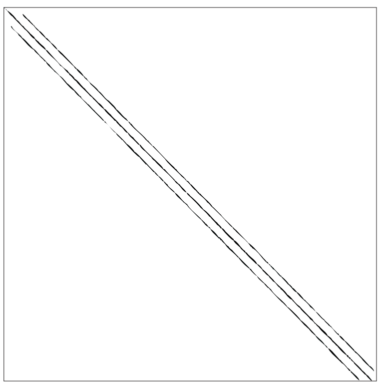

Рис. 1. Портрет матрицы A

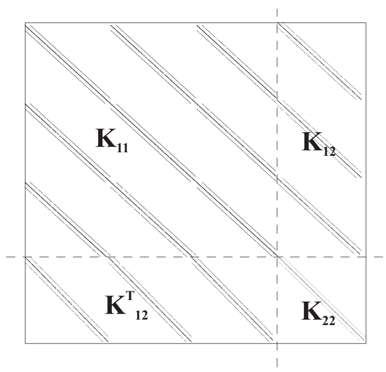

Рис. 2. Структура матрицы WAW^T

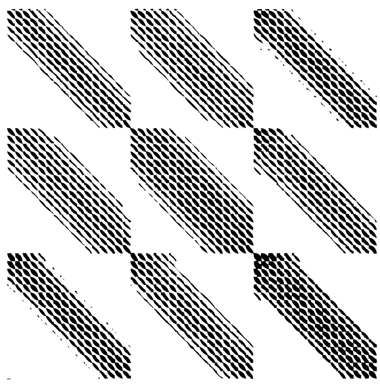

Рис. 3. Матрица K_{11}^{-1} (сетка 32×32)

3. Алгоритмические особенности вейвлет-преобразования. Рассмотренная вычислительная схема вейвлет-преобразования имеет ряд интересных и специфических особенностей. Основными операциями алгоритма являются преобразование матрицы A и вектора правых частей (8), обращение матрицы K_{11}, матричные и матрично-векторные операции умножения и сложения. Рассмотрим структуру матриц A, K_{11}, K_{12}, K_{22}, S, участвующих в вычислениях, на примере двумерной задачи теории упругости для квадратной пластинки с одним включением (см. п. 4). Задача решалась на двух треугольных сетках 32×32 и 64×64.

Портрет матрицы A представлен на рис. 1 (он будет одинаков для обеих сеток). Как видно, матрица сильно разрежена, а ненулевые элементы компактно размещаются в трех “лентах-полосах”. После применения вейвлет-преобразования структура матрицы меняется — она становится блочной, причем каждый малый блок имеет портрет, близкий к портрету исходной матрицы, и несет информацию или об уточнениях (локальные свойства), или об осреднении исходной матрицы. На рис. 2 представлена структура преобразованной матрицы. Пунктирной линией показано разделение матрицы WAW^T на блоки K_{11}, K_{12}, K_{12}^T, K_{22}. Каждая из подматриц имеет блочную структуру (K_{11} — девять блоков, K_{12} и K_{21} — три блока).

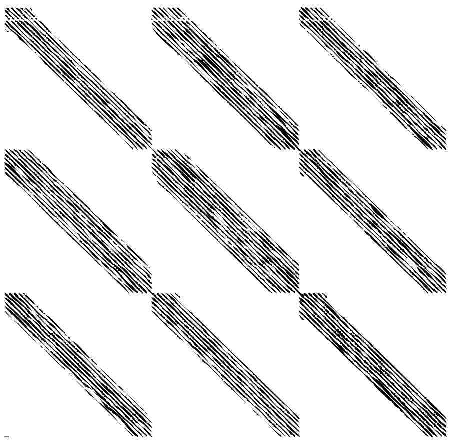

Рис. 4. Матрица K_{11}^{-1} (сетка 64×64)

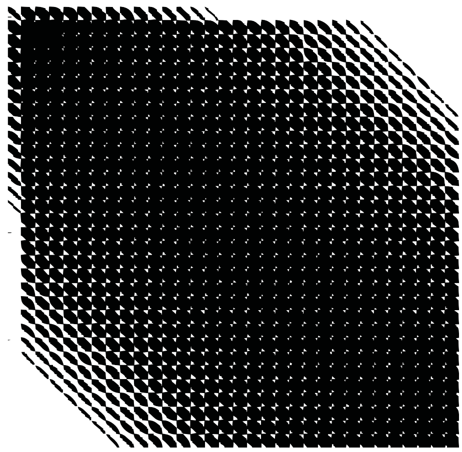

Рис. 5. Структура дополнения Шура S (сетка 64×64)

После применения вейвлет-преобразования вычисляем обратную матрицу K_{11}^{-1}. Как видно из рис. 3 и рис. 4, при обращении возникает заполнение матрицы, для хранения которого требуется дополнительная память. Видно также, что чем мельче шаг сетки, тем сильнее выражена разреженность матриц. Поскольку хранение матриц (A, K_{11}, K_{12}, K_{22}) в памяти в плотном виде численно неэффективно, необходимы разумные схема хранения и алгоритмы работы с матрицами. Существуют несколько путей для более эффективной вычислительной работы. Следует учесть, что матрицы разрежены только на первых шагах вычисления, а затем приходится иметь дело с плотными матрицами. Поэтому на первом этапе можно использовать формат хранения матрицы без нулей, а затем более экономично хранить матрицы полностью. Вместо прямых методов решения уравнений в целях экономии памяти следует использовать итерационные методы. Матрицы K_{11} и K_{22} симметричны, поэтому достаточно хранения половины элементов.

После преобразования (8) требуется выполнить матричное умножение и получить дополнение Шура S из (10) (рис. 5). Система уравнений для дополнения Шура становится плотной. В процессе одного шага осреднения разреженность матрицы для представленной сетки теряется. Однако элементы матрицы Шура обладают одним полезным свойством — они убывают пропорционально расстоянию от главной диагонали. Поэтому в некоторых работах (см., например, [7, 8]) была предложена процедура усечения матрицы, т.е. малые элементы, удаленные от главной диагонали, обнуляются так, что получающаяся в итоге матрица становится ленточной.

Относительная погрешность поля перемещений u_x, u_y для сеток 64×64 и 32×32

Сетка 64×64					Сетка 32×32		
Схема усечения S	1 шаг рекурсии (сетка 32×32)		2 шага рекурсии (сетка 16×16)		Схема усечения S	1 шаг рекурсии (сетка 16×16)	
$h = 1/3$	0.009 %	0.002 %	160 %	35 %	$h = 1/3$	41 %	4.4 %
$h = 1/2$	$9.9\,e^{-6}$ %	$2.2\,e^{-7}$ %	76 %	1.8 %	$h = 1/2$	6.08 %	0.132 %
$h = 2/3$	$4.4\,e^{-10}$ %	$4.6\,e^{-12}$ %	0.035 %	0.0095 %	$h = 2/3$	0.0009 %	0.0003 %

Результаты исследования зависимости решения (а именно поля перемещений в плоском случае по координатам x и y) от степени усечения h приведены в таблице. В ней представлена относительная погрешность результатов для сеток 32×32, 64×64 и сеток, получающихся после одного шага осреднения. Использовались следующие схемы усечения: отбрасывались элементы, лежащие вне главной диагонали на расстоянии большем, чем h (h полагается равным 1/3, 1/2 или 2/3 ширины ленты), и меньшие по модулю, чем $a_{\max}/1000$, где $a_{\max}$ — максимальный элемент соответствующей матрицы.

Из приведенных результатов следует, что чем мельче шаг сетки, тем меньшее влияние оказывает усечение. Кроме того, на осредненные результаты такая процедура усечения будет оказывать тем меньшее воздействие, чем больший шаг рекурсии мы рассматриваем. Практически нулевая ошибка в третьей строке результатов в таблице для обеих сеток говорит о хорошей точности.

4. Численные результаты. В качестве тестового примера рассматривалось применение двумерного вейвлет-преобразования к следующей задаче теории упругости:

$$Lu = f.$$

Здесь L — дифференциальный оператор, описывающий поведение неоднородного линейно-упругого тела, а $u = (u_1, u_2)$ — вектор перемещения:

$$-\mathrm{div}\, E(x)\nabla u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad x = (x_1, x_2), \tag{11}$$

$$u(x) = U(x), \quad x \in \Gamma_u, \tag{12}$$

$$n(x)E(x)\nabla u(x) = t(x), \quad x \in \Gamma_t, \tag{13}$$

где Γ_u — закрепленный участок границы, Γ_t — участок границы, на котором действует сила, $E(x)$ — тензор упругости. Рассматривался следующий расчетный случай. На двумерную прямоугольную пластинку размерами 1×1 по краю действует растягивающая сила $F = 69000$. Симметрично в центре пластинки находится включение квадратной формы. Численные примеры для нескольких включений можно найти в [9]. Матрица композита имеет коэффициент Пуассона и модуль сдвига, соответственно равные $\nu = 0.33$ и $\mu = 178947.36$, а включение — $\nu = 0.2$ и $\mu = 1178750$. Задача решалась в перемещениях на треугольной сетке 64×64. Использовались конечные элементы с линейной аппроксимацией.

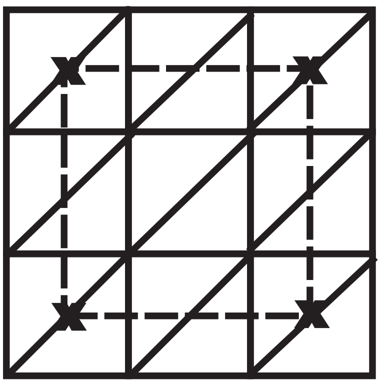

Рис. 6. Схема двумерного осреднения. Исходная сетка (сплошная линия, 16 узлов, 18 элементов) и сетка после одного шага осреднения (пунктир, 4 узла, 2 элемента)

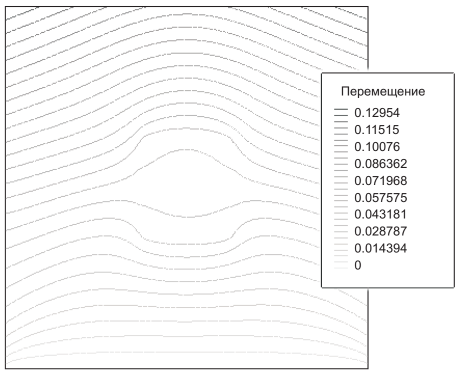

Рис. 7. Решение на сетке 64×64

Вейвлет-преобразование было реализовано в рамках библиотеки программ конечно-элементного анализа [10]. В силу симметрии хранились только половины матриц K_{11}, K_{22}, S. Для обращения матрицы K_{11} использовалась соответствующая процедура стандартного пакета Lapack. Вследствие того, что процедуры Lapack не поддерживают схемы хранения разреженных матриц, за исключением ленточных, в дальнейшем планируется переход к использованию других стандартных библиотек для работы с системами и матрицами. Для сетки 64×64 матрицы K_{11} и K_{22} занимают соответственно 294 Мб и 32 Мб, а для сетки 128×128 — уже 1.15 Гб и 128 Мб. Задача для сетки 32×32 на машине Celeron 2.2 GHz с 512 Мб оперативной памяти считается около 3 минут, а для сетки 64×64 — около 4.5 часов.

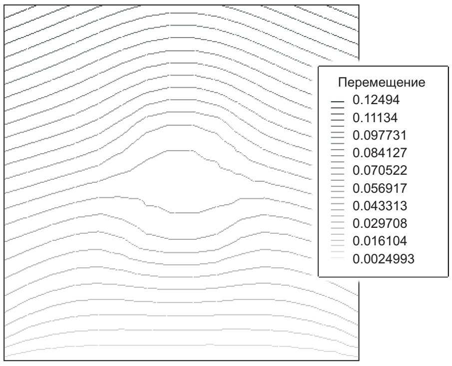

Рис. 8. Решение после двух шагов (сетка 16×16)

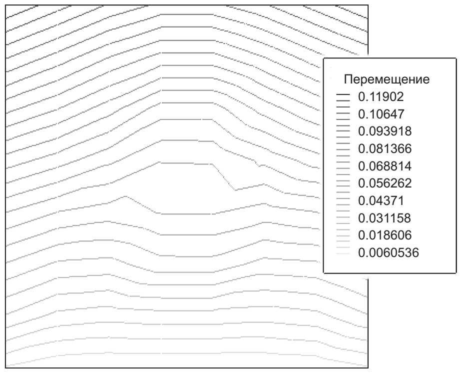

Рис. 9. Решение после трех шагов (сетка 8×8)

Схема осреднения представлена на рис. 6. За один шаг осреднения общее число узлов сокращается в четыре раза. Результаты вейвлет-осреднения даны на рис. 7, 8 и 9. На первом из них показано поле перемещений без использования осреднения. На втором и третьем — результаты, полученные после двух и трех шагов осреднения соответственно. Как видно из этих рисунков, картина, близкая к точной, наблюдается после двух шагов. После трех шагов осреднения сетка становится грубой и начинает оказывать сильное влияние на решение.

На рис. 10 для сравнения показано поле перемещений при усечении с $h = 2/3$ после двух шагов осреднения.

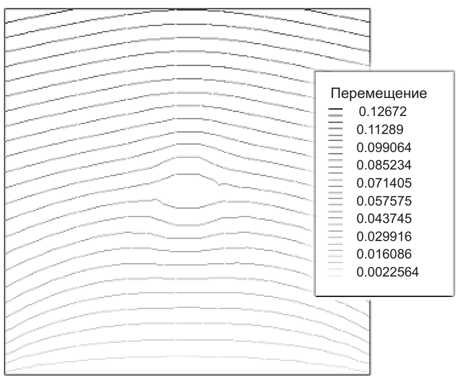

Рис. 10. Решение после усечения на двух шагах осреднения (сетка 16×16)

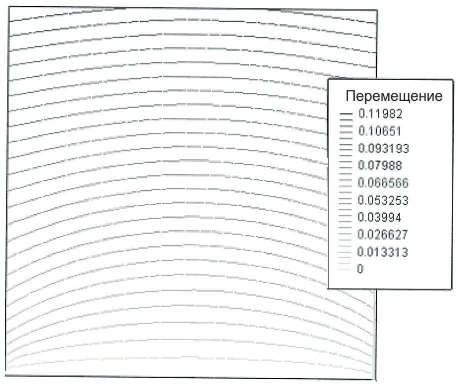

Рис. 11. Асимптотическое осреднение (сетка 32×32)

Полученное вейвлет-осреднение поля перемещения задачи сравнивалось с результатами решения этой же задачи с помощью асимптотического метода (метод Н. С. Бахвалова [6]). Данный метод может быть рассмотрен в качестве двухмасштабного метода, поскольку он оперирует понятиями микро- и макромасштабов. При использовании этого метода решение представляется в виде разложения по степеням малого параметра, а исходная задача (11) – (13) сводится к системе двух уравнений — уравнению на ячейке с периодическими граничными условиями и осредненному уравнению. Обе эти задачи решались методом конечных элементов. Из уравнения на ячейке периодичности (сетка 64×64) определялся осредненный (эффективный) тензор упругости. После подстановки найденного тензора в осредненное уравнение на сетке 32×32 вычисляется вектор осредненного перемещения (см. рис. 11). Более подробно сравнение с асимптотическим методом осреднения приводится в [11]. Получающаяся картина поля перемещения не отражает локальных свойств материала. Общее же (глобальное) поведение хорошо согласуется с результатами вейвлет-преобразования. Верхнее и нижнее значения диапазона перемещений двух сравниваемых методов практически совпадают.

5. Заключение В работе выполнен анализ вычислительных особенностей двумерного вейвлет-преобразования Хаара. Было выявлено, что матрицы, получаемые в процессе преобразования, имеют определенный портрет и свойства. Отметим условия, выполнение которых необходимо для более эффективной вычислительной работы:

— схема хранения матриц должна быть достаточно гибкой: желательно использовать форматы хранения матриц без нулей на начальных этапах осреднения, а затем лучше применять обычные схемы хранения;

— процедура усечения дает выигрыш в памяти и (в случае разумного применения) не вносит существенных ухудшений в решение; влияние усечения на точность решения уменьшается с шагом сетки;

— использование итерационных методов позволяет снизить необходимые ресурсы памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.* Многомасштабный анализ на основе МКЭ и вейвлет-преобразования // Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач. Материалы второй всероссийской молодежной научной школы-конференции. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2003. **20**. 181–191.
2. *Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.
3. *Переберин А.В.* О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 2. 133–158.
4. *Васильева Л.Г., Жилейкин Я.М., Осипик Ю.И.* Преобразования Фурье и вейвлет-преобразования. Их свойства и применение // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 79–82.
5. *Brewster M., Beylkin G.* A multiresolution strategy for numerical homogenization // Appl. Comput. Harmon. Anal. 1995. N 2. 327–349.
6. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
7. *Dorobantu M., Engquist B.* Wavelet-based numerical homogenization // SIAM. J. Numer. Anal. 1998. **35**, N 2. 540–559.
8. *Coult N.* A multiresolutional strategy for homogenization of partial differentials. PhD Thesis. Colorado, 1997.
9. *Sagdeeva Yu.A.* The multiresolution decomposition for obtaining the averaged characteristics of composites // Proc. of Intern. Congress on Math. Modeling. Nizhny Novgorod, 2004. 339.
10. *Копысов С.П., Красноперов И.В., Рычков В.Н.* Объектно-ориентированный метод декомпозиции области // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 1. 176–193.
11. *Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.* Двумерное вейвлет-преобразование Хаара и его применение к многомасштабному анализу // Ижевск: ИПМ УрО РАН, 2004. Деп. в ВИНИТИ, № 796–В2004.

Поступила в редакцию
20.10.2004