



doi 10.26089/NumMet.v26r431

УДК 50.34.01

## Ускорение численного моделирования сейсмических данных для мониторинга захоронения CO<sub>2</sub> с использованием нейронной сети

**Е. А. Гондюл**

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,  
Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: 0009-0009-0619-1198, e-mail: [gondyulea@ipgg.sbras.ru](mailto:gondyulea@ipgg.sbras.ru)

**В. В. Лисица**

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,  
Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: [lisitsavv@ipgg.sbras.ru](mailto:lisitsavv@ipgg.sbras.ru)

**Д. М. Вишневский**

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,  
Новосибирск, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0002-1439-4552, e-mail: [vishnevskydm@ipgg.sbras.ru](mailto:vishnevskydm@ipgg.sbras.ru)

**Аннотация:** Сейсмический мониторинг накопления и захоронения парниковых газов в породе-коллекторе имеет решающее значение для оценки безопасности и эффективности захоронения, предотвращения утечек. Малое изменение свойств пласта, вызванных флюидовытеснением, приводит к изменению сейсмических атрибутов. При этом моделирование распространения сейсмических волновых полей ресурсозатратно из-за необходимости решать задачу для серии сейсмогеологических моделей среды, соответствующих различным этапам закачки флюида. В работе представлен алгоритм моделирования сейсмических волновых полей с использованием сеточного метода и нейронной сети для подавления численных ошибок в сейсмограммах при применении к задаче сейсмического мониторинга захоронения парниковых газов. Алгоритм ускоряет расчеты до 4 раз за счет применения нейронной сети к быстро рассчитанным сейсмограммам с использованием грубой расчетной сетки.

**Ключевые слова:** сейсмический мониторинг, парниковые газы, фильтрация двухфазной жидкости, нейронные сети.

**Благодарности:** В. В. Лисица и Е. А. Гондюл разработали нейросетевой подход и провели численные эксперименты при финансовой поддержке РФФ (грант № 22-11-00004-П), Д. М. Вишневским разработан и реализован конечно-разностный алгоритм в рамках государственного задания ИМ СО РАН № FWNF-2022-0015.

**Для цитирования:** Гондюл Е.А., Лисица В.В., Вишневский Д.М. Ускорение численного моделирования сейсмических данных для мониторинга захоронения CO<sub>2</sub> с использованием нейронной сети // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 4. 465–478. doi 10.26089/NumMet.v26r431.



## Acceleration of numerical simulation of seismic data for monitoring the burial of CO<sub>2</sub> using a neural network

Elena A. Gondyul

Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia  
ORCID: 0009-0009-0619-1198, e-mail: [gondyulea@ipgg.sbras.ru](mailto:gondyulea@ipgg.sbras.ru)

Vadim V. Lisitsa

Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia  
ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: [lisitsavv@ipgg.sbras.ru](mailto:lisitsavv@ipgg.sbras.ru)

Dmitry M. Vishnevsky

Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia  
ORCID: 0000-0002-1439-4552, e-mail: [vishnevskydm@ipgg.sbras.ru](mailto:vishnevskydm@ipgg.sbras.ru)

**Abstract:** Seismic monitoring of greenhouse gases accumulations and injection in reservoir is critical for evaluating the safety and efficiency of injection and preventing leakage. Small changes in reservoir properties caused by fluid displacement lead to changes in seismic attributes. At the same time, modelling of seismic wavefield propagation is resource-consuming due to the need to solve the problem for a series of seismogeological models of the medium corresponding to different stages of fluid injection. The paper presents an algorithm for seismic modelling using a finite-difference method and a neural network to suppress numerical errors in seismograms when applied to the problem of seismic monitoring of greenhouse gas disposal. The algorithm speeds up calculations up to 4 times due to the application of the neural network to rapidly calculated seismograms using a coarse computational grid.

**Keywords:** seismic monitoring, greenhouse gases, filtration of two-phase flow, neural network.

**Acknowledgements:** V. V. Lisitsa and E. A. Gondyul developed the neural network and performed numerical experiments under the support of the Russian Science Foundation (grant No. 22-11-00004-П), D. M. Vishnevsky developed the finite difference algorithm under the support of the Russian State agreement FWNF-2022-0015 at IM SB RAS.

**For citation:** E. A. Gondyul, V. V. Lisitsa, and D. M. Vishnevsky, “Acceleration of numerical simulation of seismic data for monitoring the burial of CO<sub>2</sub> using a neural network,” Numerical Methods and Programming. **26** (4), 465–478 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r431.

**1. Введение.** Мониторинг захоронения парниковых газов, таких как H<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub> и CO<sub>2</sub> в сверхкритическом состоянии, выполняет ключевую роль в обеспечении безопасности и эффективности технологий улавливания и захоронения газов в породе-ловушке. Такой подход решает ряд задач: выбор места и скорости закачки газа, оценка стабильности при длительном хранении для предотвращения утечки и т.д. Это требует не только сейсморазведочных работ, но и использования численных методов для моделирования фильтрации двухфазной жидкости, а также моделирования сейсмических волновых полей для мониторинга изменений в сейсмограммах [1–3]. Сейсмический мониторинг позволяет отслеживать изменения сейсмических атрибутов, вызванные малым изменением свойств пласта при флюидовытеснении [4].

Однако высокая вычислительная стоимость такого моделирования, особенно когда требуется многократное моделирование для различных сценариев закачки и временных стадий при использовании мелкой расчетной сетки, существенно ограничивает его применимость для оперативного сейсмического мониторинга. В то же время использование классических численных методов, таких как конечно-разностный метод [5–9], метод конечных элементов [10], метод Галеркина [11, 12], совместно со спектральными методами [13, 14], при грубой дискретизации для увеличения вычислительной эффективности приводит к численной дисперсии.

Недавние достижения в области глубокого обучения открыли новые возможности для повышения вычислительной эффективности сейсмического мониторинга. Например, нейронные сети применяются для оценки вероятности утечки парниковых газов [15], в качестве эффективной замены численного расчета потоков флюидов, использующих нейронные операторы Фурье (FNO) [16, 17], для обнаружения и сегментации выбросов газов непосредственно на основе сейсмических данных с использованием сверточных сетей [18, 19]. Кроме того, основанные на физике нейронные сети находят применение при моделировании фильтрации парниковых газов [20, 21]. Однако лишь в ограниченном количестве исследований применяется нейронная сеть к результатам сейсмического моделирования для отслеживания изменений в сейсмических данных, вызванных движением жидкости в условиях многофазного потока. Настоящая работа восполняет этот пробел, объединяя численное моделирование фильтрации двухфазной жидкости, моделирование сейсмических волновых полей с использованием конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках и нейронную сеть NDM-net (Numerical dispersion mitigation neural network) [22, 23] на основе `pix2pix` [24] для подавления численной дисперсии в сейсмограммах и получения их эволюции, вызванной изменениями насыщенности газом. При этом фильтрация газа в породе-коллекторе моделируется с использованием конечно-разностного метода [25–28]. Проведенное исследование позволяет ускорить сейсмический мониторинг захоронения парниковых газов при численном моделировании сейсмограмм на грубой расчетной сетке для всех положений источников для набора скоростных моделей и на мелкой расчетной сетке для части сейсмограмм для измененных скоростных моделей с целью формирования обучающей выборки для нейронной сети NDM-net. Предлагаемый подход эффективен с точки зрения вычислений по сравнению с классическими методами моделирования сейсмических волновых полей.

В работе также моделируется многофазная фильтрация жидкости в пористых средах с использованием сеточного метода, при этом учитывается флюидозамещение. Модель описывается системой уравнений многофазного течения жидкости с учетом закона Дарси и сжимаемости жидкости.

**2. Постановка задачи.** В этой работе представлен алгоритм, объединяющий численное моделирование фильтрации двухфазной жидкости, моделирование распространения сейсмических волновых полей и нейронную сеть для подавления численных ошибок при применении к сейсмическому мониторингу захоронения газов в породе-коллекторе. Численно решается система уравнений фильтрации несжимаемой жидкости, для чего используется конечно-разностная схема на сдвинутых сетках. Затем рассчитываются такие параметры скоростной модели, как плотность  $\rho$  и скорости распространения сейсмических волн  $V_p, V_s$ , с использованием приближений Гассмана [29]. После этого моделируются сейсмические волновые поля и рассчитываются сейсмограммы для всего набора скоростных моделей и положений источников на грубой расчетной сетке. Для обучения нейронной сети NDM-net отображать сейсмограмму с дисперсией в сейсмограмму с малой ее долей формируется обучающая выборка: моделируется распространение сейсмических волновых полей на мелкой расчетной сетке для малой доли источников (от 10% до 20% от общего количества источников).

Разработанный алгоритм содержит следующие шаги:

1. Моделирование фильтрации двухфазной жидкости с использованием конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках и использование приближения Гассмана для расчета параметров скоростных моделей  $M^i = \{V_p^i, V_s^i, \rho^i\}$ ,  $i = \overline{1, N_m}$ , где  $N_m$  — число стадий сейсмического мониторинга,  $\rho$  — плотность,  $V_p, V_s$  — скорости продольной и поперечной волны соответственно.
2. Моделирование сейсмических волновых полей для скоростных моделей  $M^i, i = \overline{1, N_m}$ , для всего набора источников на грубой расчетной сетке с характерным шагом  $h_1$  для получения сейсмограмм  $\mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k), i = \overline{1, N_m}, k = \overline{1, N_s}$ , где  $N_s$  — количество источников в системе наблюдения.
3. Формирование набора положений источников, соответствующих сейсмограммам, которые будут входить в тренировочную выборку, т.е. формирование набора индексов  $D_t \subset \{1, \dots, N_s\}$ .
4. Моделирование сейсмических волновых полей для скоростных моделей  $M^i, i = \overline{1, N_m}$ , на мелкой расчетной сетке с характерным шагом  $h_2 < h_1$  для получения сейсмограмм  $\mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k), k \in D_t$ , для формирования обучающей выборки.
5. Обучение нейронной сети для аппроксимации оператора  $G : \mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k) \rightarrow d\mathbf{u}_{h_2, h_1}^i(t, x_o, x_s^k)$ , где  $d\mathbf{u}_{h_2, h_1}^i(t, x_o, x_s^k) = \mathbf{u}_{h_2}^i(t, x_o, x_s^k) - \mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k)$ .
6. Применение обученной нейронной сети на весь набор сейсмограмм для всех  $M^i, i = \overline{1, N_m}$ :

$$\mathbf{u}_G^i(t, x_o, x_s^k) = \mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k) + G[\mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k)], \quad k = \overline{1, N_s}.$$

**3. Моделирование фильтрации двухфазной жидкости с использованием конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках.** В этом разделе рассматривается вычислительная модель процесса фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости без учета капиллярных сил, которая определяется уравнениями сохранения массы компонент жидкости [30]:

$$\phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}_\alpha) + q_\alpha, \quad \alpha = g, w,$$

где  $\phi$  — пористость, которая считается постоянной,  $S_\alpha$ ,  $\mathbf{u}_\alpha$  и  $q_\alpha$  — насыщенность, скорость фазы жидкости и дебит скважин каждой фазы соответственно. При этом выполняется условие, при котором все пористое пространство заполнено:

$$S_g + S_w = 1.$$

Скорость каждой фазы жидкости выражается через закон Дарси импульса:

$$\mathbf{u}_\alpha = -K \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \nabla(p_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{g}H),$$

где  $p_\alpha$ ,  $\rho_\alpha$ ,  $k_{r\alpha}$  и  $\mu_\alpha$  — давление, плотность, относительная проницаемость и динамическая вязкость фаз соответственно,  $K$  — абсолютная проницаемость пористой среды,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $H$  — расстояние от неподвижной опорной поверхности до точки среды в направлении действия силы тяжести. При этом относительные проницаемости выражаются эмпирическими формулами:

$$k_{rg} = k_{rg}^{\max} S_{\text{eff}}^\beta, \quad k_{rw} = k_{rw}^{\max} (1 - S_{\text{eff}})^\gamma,$$

где для численных экспериментов  $S_{\text{eff}} = \frac{S - S_{gc}}{1 - S_{gc} - S_{wr}}$ ,  $S_{gc} = 0.38$ ,  $S_{wr} = 0.26$ ,  $k_{rg}^{\max} = 0.31$ ,  $k_{rw}^{\max} = 0.92$ ,  $\beta = 1.552$ ,  $\gamma = 2.585$ .

При  $p = p_g = p_w$ ,  $S = S_g$ ,  $S_w = 1 - S$  общая скорость двухфазной жидкости выражается формулой

$$\mathbf{u} = -K\lambda \nabla p,$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_w$ ,  $\lambda(S) = \lambda_g(S) + \lambda_w(S)$  — мобильность,  $\lambda_g(S) = k_{rg}(S)/\mu_g$ ,  $\lambda_w(S) = k_{rw}(1 - S)/\mu_w$  — мобильность газа и воды соответственно. Так как  $\lambda(S) \geq (\sqrt{\mu_g} + \sqrt{\mu_w})^{-2}$  [31], фракционный поток  $f_g(S) = \frac{\lambda_g(S)}{\lambda(S)}$  вводится для определения скорости газа:

$$\mathbf{u}_g = f_g(S)\mathbf{u}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений для моделирования фильтрации двухфазной жидкости выражается следующим образом:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f_g(S)\mathbf{u}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = -K\lambda(s)\nabla p, \quad (1)$$

где  $S = S_g$ .

Начальная краевая задача решается с помощью системы уравнений (1) в двумерной области  $\Omega = [a_l, a_r] \times [b_u, b_d]$ . Пусть верхняя и нижняя границы обозначаются как  $\Gamma_o$ , левая и правая границы как  $\Gamma_l = \{x = a_l, b_u \leq z \leq b_d\}$  и  $\Gamma_r = \{x = a_r, b_u \leq z \leq b_d\}$ . Тогда граничные и начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} p|_{\Gamma_r} &= p_r, & p|_{\Gamma_l} &= p_l, \\ S|_{\Gamma_l} &= S_l, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_r} &= 0, & \mathbf{u}|_{\Gamma_l} &= 0, \\ \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} &= 0, \\ S|_{t=0} &= S_0. \end{aligned}$$

Существует множество алгоритмов решения системы уравнений (1), таких как IMPES (неявное давление — явное насыщение) [25], SS (одновременное решение) [26], последовательный алгоритм [27] и адаптивный неявный метод [28]. Однако в данной работе используется схема IMPES в силу простой реализации. Пусть время  $t \in [0, T]$  дискретизируется следующим образом:  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ . Классический алгоритм IMPES для каждого  $n = 0, 1, \dots, N$  имеет следующие шаги:

1.  $-\nabla \cdot (K\lambda(S^n)\nabla p^n) = 0$ .
2.  $\mathbf{u}^n = -K\lambda(S^n)\nabla p^n$ .
3.  $\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t} \approx \phi \frac{\partial S}{\partial t} = G(p^n, \mathbf{u}^n, S^n)$ , где  $G(p^n, \mathbf{u}^n, S^n)$  — правая часть,  $\Delta t$  — шаг по времени.

Для дискретизации системы уравнений (1) используется разностная схема на сдвинутых сетках. Для этого вводится равномерная прямоугольная сетка (рис. 1) с шагом  $h = h_x = h_z$  и количеством ячеек  $N_x, N_z$  в направлении  $x$  и  $z$  соответственно.

В данной работе используется схема второго порядка по времени и пространству, в которой производные аппроксимируются следующими конечно-разностными операторами для уравнения Пуассона по давлению:

$$-\frac{1}{h_x}((K\lambda^n)_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{h_x} - (K\lambda^n)_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{h_x}) - \frac{1}{h_z}((K\lambda^n)_{i,j+1/2} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h_z} - (K\lambda^n)_{i,j-1/2} \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{h_z}) = 0,$$

где абсолютная проницаемость, умноженная на мобильность, рассчитывается по среднему гармоническому значению:

$$(K\lambda)_{i+1/2,j} = \frac{2(K\lambda)_{i,j}(K\lambda)_{i+1,j}}{(K\lambda)_{i,j} + (K\lambda)_{i+1,j}}.$$

Далее компоненты скорости рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j}^n &= -(K\lambda^n)_{i+1/2,j}(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n), \\ v_{i,j+1/2}^n &= -(K\lambda^n)_{i,j+1/2}(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n). \end{aligned}$$

После этого скорости  $w_x, w_z$  рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} (w_x)_{i+1/2,j}^n &= \begin{cases} f'(S_{i,j}^n)u_{i+1/2,j}^n, & \text{если } u_{i+1/2,j}^n > 0, \\ f'(S_{i+1,j}^n)u_{i+1/2,j}^n, & \text{иначе,} \end{cases} \\ (w_z)_{i,j+1/2}^n &= \begin{cases} f'(S_{i,j}^n)v_{i,j+1/2}^n, & \text{если } v_{i,j+1/2}^n > 0, \\ f'(S_{i,j+1}^n)v_{i,j+1/2}^n, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

И наконец, противопоточная схема для насыщенности имеет следующий вид:

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\phi} (D_x(w_x S)_{i,j}^n + D_z(w_z S)_{i,j}^n),$$

$$D_x(w_x S)_{i,j}^n = \frac{F_{x,i+1/2,j} - F_{x,i-1/2,j}}{h_x},$$

$$D_z(w_z S)_{i,j}^n = \frac{F_{z,i,j+1/2} - F_{z,i,j-1/2}}{h_z},$$

где

$$F_{x,i+1/2,j} = \begin{cases} (w_x)_{i+1/2,j}^n S_{i,j}, & \text{если } (w_x)_{i+1/2,j}^n > 0, \\ (w_x)_{i+1/2,j}^n S_{i+1,j}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$F_{z,i,j+1/2} = \begin{cases} (w_z)_{i,j+1/2}^n S_{i,j}, & \text{если } (w_z)_{i,j+1/2}^n > 0, \\ (w_z)_{i,j+1/2}^n S_{i,j+1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

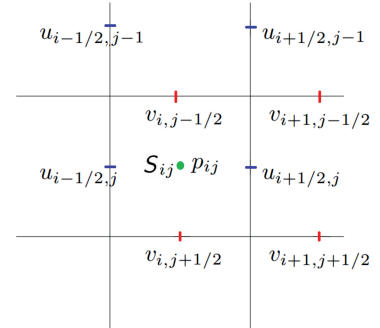


Рис. 1. Геометрия элементарной ячейки схемы на сдвинутых сетках

Fig. 1. Geometry of the unit cell of a diagram on staggered grid

**4. Изменение свойств скоростной модели среды при фильтрации газа.** Замещение флюида изменяет объемную плотность и модули упругости, что влияет на скорости продольной и поперечной волн. Так, предполагается использовать эмпирически выведенное приближение Гассмана [29]:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{sat}} &= S((1 - \phi)\rho_w + \phi\rho_g) + (1 - S)((1 - \phi)\rho_w + \phi\rho_g), \\ \rho_{\text{sat}} V_{\text{p}_{\text{sat}}}^2 &= K_p + K_{\text{dry}} + 4/3\mu, \\ \rho_{\text{sat}} V_{\text{S}_{\text{sat}}}^2 &= \mu,\end{aligned}$$

где  $\rho_{\text{sat}}$  — плотность насыщенного породе,  $V_{\text{p}_{\text{sat}}}$  — скорость Р-волн в насыщенном породе,  $V_{\text{S}_{\text{sat}}}$  — скорость S-волн в насыщенном породе,  $K_{\text{dry}} = K_0(1 - \phi)^{3/(1-\phi)}$  — модуль объемной упругости сухой породы,  $\mu = \mu_{\text{dry}} = \mu_{\text{sat}}$  — модуль сдвига породе ( $\mu_{\text{dry}}$  — эффективный модуль сдвига сухой породе,  $\mu_{\text{sat}}$  — эффективный модуль сдвига породе с поровой жидкостью),

$$K_p = \frac{(1 - K_{\text{dry}}/K_0)^2}{\phi/K_{\text{fl}} + (1 - \phi)/K_0 - K_{\text{dry}}/K_0^2},$$

$K_{\text{fl}}$  — эффективный объемный модуль поровой жидкости,  $K_0$  — объемный модуль минерального материала, составляющего породе.

С использованием таких приближений рассчитываются скоростные модели среды  $M^i = \{V_p^i, V_s^i, \rho^i\}$ ,  $i = \overline{1, N_m}$ , где  $N_m$  — число этапов мониторинга.

**5. Моделирование сейсмических волновых полей.** Для получения сейсмограмм решается волновое уравнение, записанное в терминах компонент вектора скорости и тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} + \hat{f}_{xx}, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \hat{f}_{zz}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} + \hat{f}_{xz},\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\mathbf{u} = (u_x, u_z)^T$  — вектор скорости частицы,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  — компоненты тензора напряжений,  $\rho = \rho(x, z)$  — плотность массы,  $\lambda = \lambda(x, z)$  и  $\mu = \mu(x, z)$  — параметры Ламе,  $\hat{f}_{xx} = f_{xx}(t)\delta(x - x_s)\delta(z - z_s)$ ,  $\hat{f}_{zz} = f_{zz}(t)\delta(x - x_s)\delta(z - z_s)$ ,  $\hat{f}_{xz} = f_{xz}(t)\delta(x - x_s)\delta(z - z_s)$  — компоненты тензора сейсмических моментов. Обычно рассматриваются точечные источники в виде дельта-функции Дирака  $\delta(x - x_s)$ , где  $(x_s, z_s)$  — координаты расположения источника. Временные вейвлеты  $f_{xx}(t)$ ,  $f_{zz}(t)$ ,  $f_{xz}(t)$  определяются полосовым ограниченным импульсом.

Подробное описание конечно-разностной схемы, аппроксимирующей систему уравнений (2), представлено в нескольких работах [32–34]. В результате такого моделирования и проектирования системы наблюдения рассчитываются сейсмограммы, которые здесь обозначаются как  $\mathbf{u}(t, x_o, x_s)$ , где  $x_o = x_r - x_s$  — координата смещения,  $x_r$  — положение приемника,  $x_s$  — положение источника.

В результате вычисляются два набора сейсмограмм: сейсмограммы  $\{\mathbf{u}_{h_1}(t, x_o, x_s^k)\}_{k=1}^{N_s}$  для всех  $N_s$  источников на грубой сетке с характерным шагом  $h_1$  и сейсмограммы  $\{\mathbf{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k)\}$ ,  $k \in D_t$ , для источников из обучающего набора данных  $D_t \subset \{1, \dots, N_s\}$  (10% от общего числа источников) с использованием мелкой сетки с характерным шагом  $h_2 < h_1$  для каждого этапа мониторинга парниковых газов.

**6. Нейронная сеть NDM-net.** Для аппроксимации оператора  $G$ , который отображает сейсмограмму  $\mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k)$  в расхождение сейсмограмм  $d\mathbf{u}_{h_2, h_1}^i(t, x_o, x_s^k) = \mathbf{u}_{h_2}^i(t, x_o, x_s^k) - \mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k)$ , и оператора  $D$  (дискриминатор), который отличает сейсмограммы от сгенерированных данных, используется нейронная сеть NDM-net на основе архитектуры pix2pix [24] путем минимизации функции потерь для выбора параметров  $\Theta$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\Theta) &= \arg \min_G \max_D \mathbb{E}_{k \in D_t} [\log D(G(\mathbf{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k), \Theta)) + \log(1 - D(d\mathbf{u}_{h_2, h_1}^i(t, x_o, x_s^k)))] + \\ &\quad + \lambda (\|d\mathbf{u}_{h_2, h_1}^i(t, x_o, x_s^k) - G(\mathbf{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k), \Theta)\|_1),\end{aligned}$$



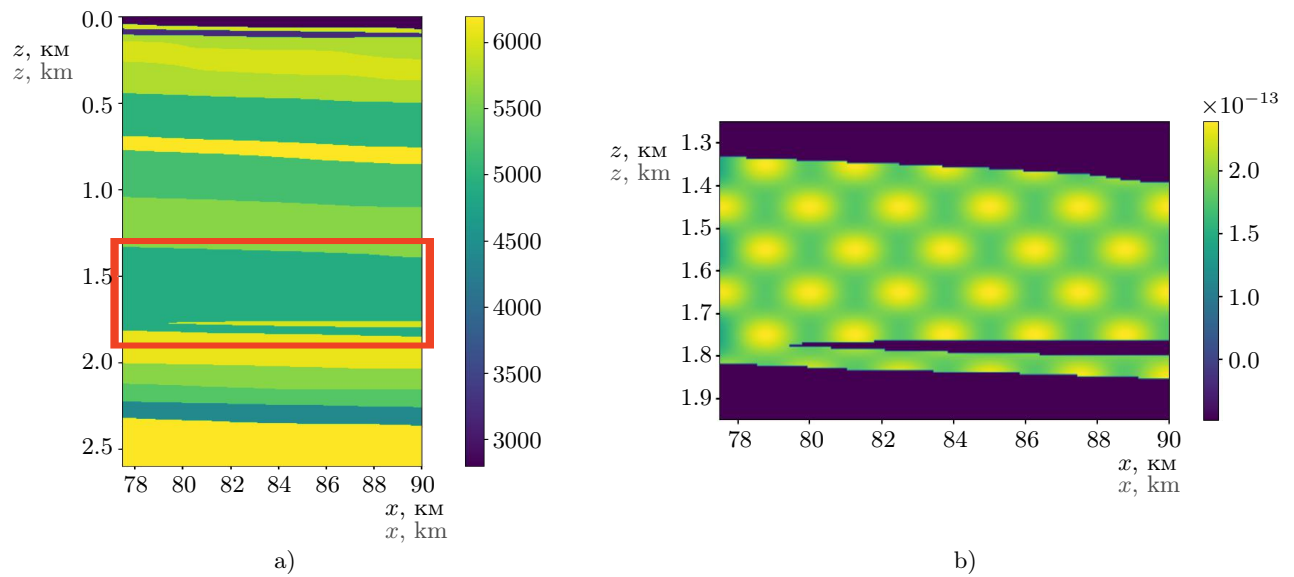


Рис. 2. Часть скоростной модели Ванавары: а) значения скорости продольной волны  $V_p$ ; б) значения абсолютной проницаемости в слое, в котором моделируется фильтрация двухфазной жидкости (выделен красным)

Fig. 2. Part of the Vanavara velocity model: a) longitudinal wave velocity values  $V_p$ ; b) absolute permeability values in the layer in which two-phase fluid filtration is modelled (highlighted in red)

где  $\Theta = \{W, \mathbf{b}\}$  — параметры сети для  $G$ , включающие весовую матрицу  $W$  и смещение  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbb{E}_{k \in D_t}$  — среднее по обучающему набору данных,  $\|\cdot\|_1$  — норма  $L_1$ .

После этого сейсмограмма с меньшей долей численной дисперсии восстанавливается по следующей формуле:

$$\mathbf{u}_G^i(t, x_o, x_s^k) = \mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k) + G(\mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k)).$$

Скорости обучения при аппроксимации операторов  $G$  и  $D$  составляют  $10^{-4}$  и  $10^{-7}$  соответственно, коэффициент  $\lambda = 10000$ . Для обучения нейронной сети используется адаптивный метод оптимизации Adam, который обеспечивает устойчивую и быструю сходимость. Набор обучающих данных формируется с использованием равномерно распределенных источников и составляет 20% от общего числа источников. Для уменьшения размерности в качестве предварительной обработки данных применяется быстрое преобразование Фурье [22]. Таким образом, размер входных и выходных данных составляет  $2 \times N_r \times N_f$ , где 2 — количество компонент быстрого преобразования Фурье (вещественная и мнимая компоненты),  $N_r$  — количество приемников,  $N_f$  — количество частот.

**7. Численные эксперименты.** Для численных экспериментов используется часть скоростной модели Ванавары размером 12.5 км по горизонтали и 2.6 км по вертикали (рис. 2а). Численно моделируется фильтрация  $\text{CO}_2$  в суперкритическом состоянии в водонасыщенном слое (рис. 2б). При этом абсолютная проницаемость слоя составляет  $K = 10^{-13} \text{ м}^2$ , в то время как абсолютная проницаемость остальных слоев составляет  $K = 10^{-15} \text{ м}^2$ . Используется расчетная сетка с шагами  $h_x = 50 \text{ м}$  и  $h_z = 5 \text{ м}$ , плотность и вязкость сверхкритического  $\text{CO}_2$  составляют  $\rho_{\text{CO}_2} = 800 \text{ кг/м}^3$  и  $\mu_{\text{CO}_2} = 0.7 \times 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$ , воды  $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$  и  $\mu_w = 2 \times 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$  соответственно.

Распространение сверхкритического  $\text{CO}_2$  и его влияние на плотность модели среды для нескольких значений времени показано на рис. 3. Таким образом, рассматривается семь скоростных моделей  $M^i, i = \overline{1, 7}$ , для численных экспериментов.

Для моделирования распространения сейсмического волнового поля и расчета сейсмограмм использовалась система наблюдения, состоящая из 125 источников, расположенных на расстоянии 100 м друг от друга. Каждая сейсмограмма регистрируется 512 приемниками, при этом максимальное расстояние между источником и приемниками составляет 6.4 км. Приемники расположены на расстоянии 25 м друг от друга. В качестве исходного сигнала используется вейвлет Рикера с центральной частотой 30 Гц. Скорости продольных волн варьируются от 3000 м/с до 6000 м/с (рис. 2). Моделируются два набора сейсмограмм:

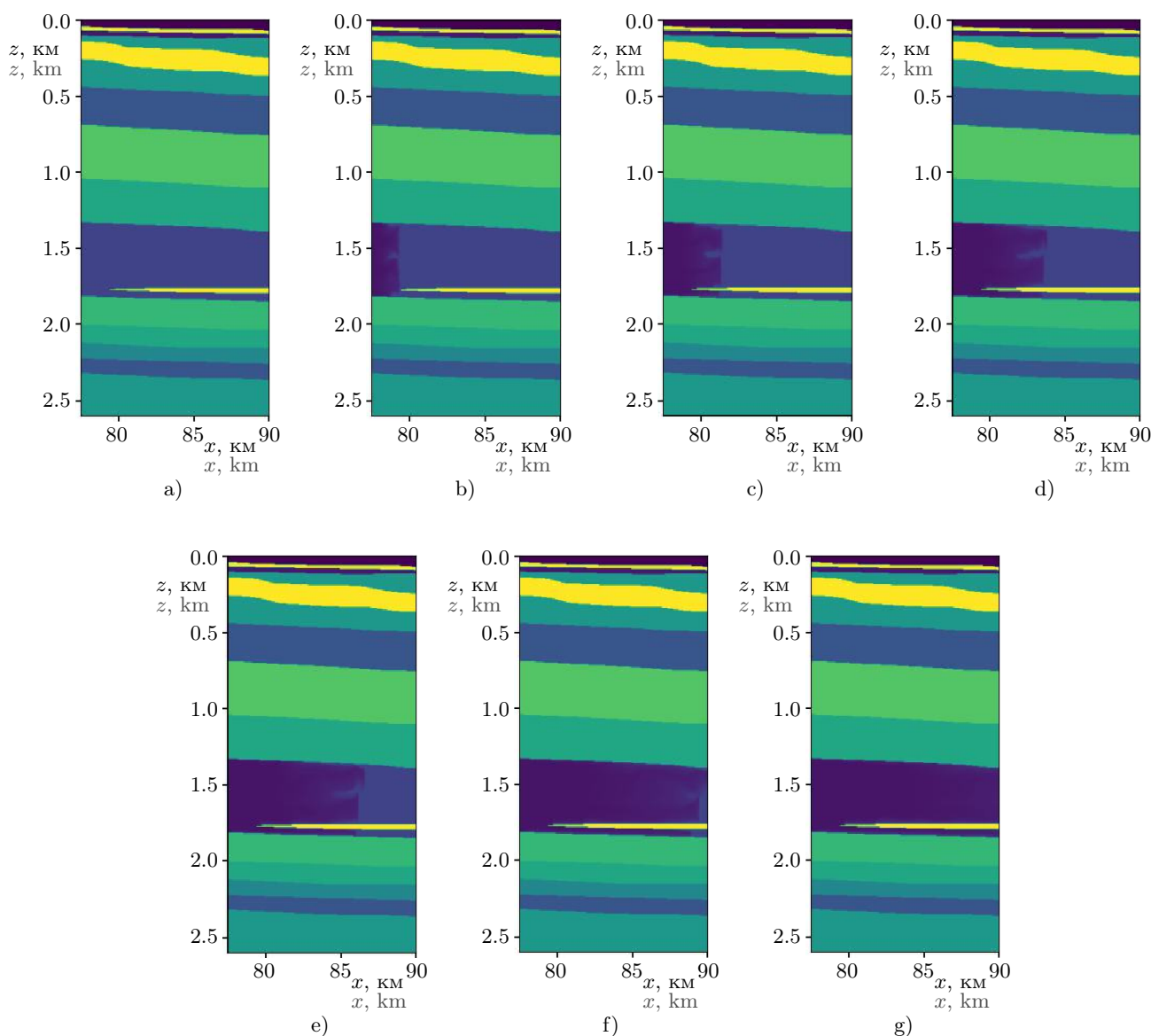


Рис. 3. Значение плотности при фильтрации  $\text{CO}_2$  в сверхкритическом состоянии без учета гравитации для значений времени: а)  $t = 0$  ч; б)  $t = 110$  ч; в)  $t = 220$  ч; д)  $t = 330$  ч; е)  $t = 440$  ч; ф)  $t = 550$  ч; г)  $t = 660$  ч

Fig. 3. The density value when filtering  $\text{CO}_2$  in a supercritical state without taking gravity into account for times: а)  $t = 0$  h; б)  $t = 110$  h; в)  $t = 220$  h; д)  $t = 330$  h; е)  $t = 440$  h; ф)  $t = 550$  h; г)  $t = 660$  h

с использованием грубой расчетной сетки с характерным шагом  $h_1 = 5$  м и с использованием мелкой расчетной сетки с характерным шагом  $h_2 = 2.5$  м.

В качестве обучающей выборки используется набор сейсмограмм, соответствующих равноудаленным источникам и двум скоростным моделям  $M^1, M^4$ . Размер обучающей выборки составляет 20% от общего количества источников при этапах 1, 4 мониторинга соответственно. Важной составляющей в предлагаемом алгоритме является процесс обучения нейронной сети для аппроксимации оператора  $G$  и дискриминатора  $D$ . Кривые обучения и валидации (рис. 4) демонстрируют, что нейронная сеть успешно обучилась в течение 300 эпох. Время обучения на NVIDIA GeForce RTX 3090 с 8 ГБ памяти и процессоре Intel(R) Core(TM) i9-10980XE (18 ядер) с тактовой частотой 3 ГГц и 24 ГБ ОЗУ составило примерно 60 мин.

Пример результата, полученного с использованием нейронной сети, т.е. сейсмограммы  $u_G^7(t, x_o, x_s^k)$ , соответствующей скоростной модели  $M^7$  (рис. 5 б), демонстрирует, что он визуально соответствует численному решению задачи распространения сейсмических волн на мелкой расчетной сетке  $u_{h_2}^7(t, x_o, x_s^k)$



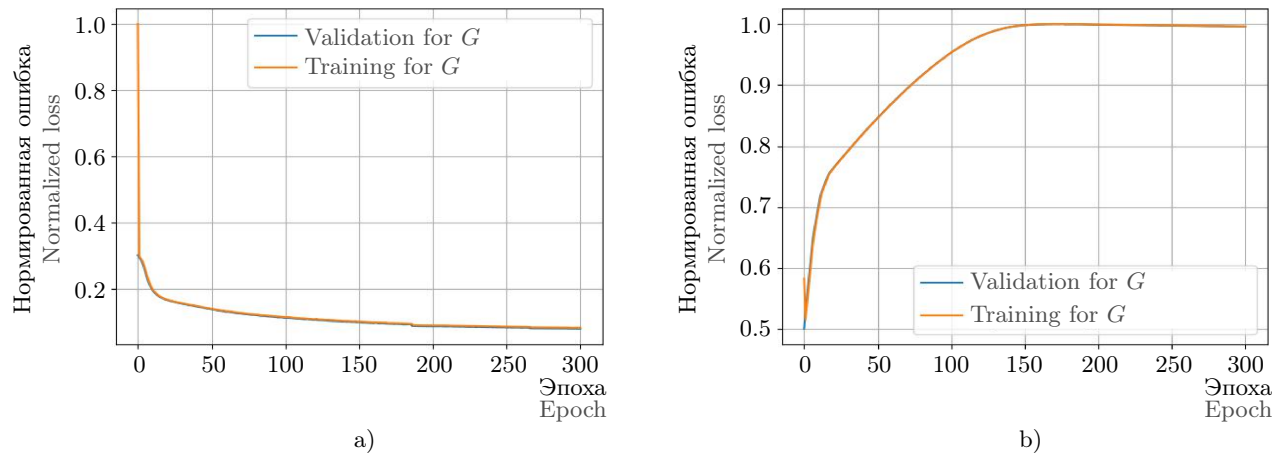


Рис. 4. Кривые обучения и валидации для нейронных сетей, аппроксимирующих: а) оператор  $G$ ; б) дискриминатор  $D$

Fig. 4. Training and validation curves for neural networks approximating: a) operator  $G$ ; б) discriminator  $D$

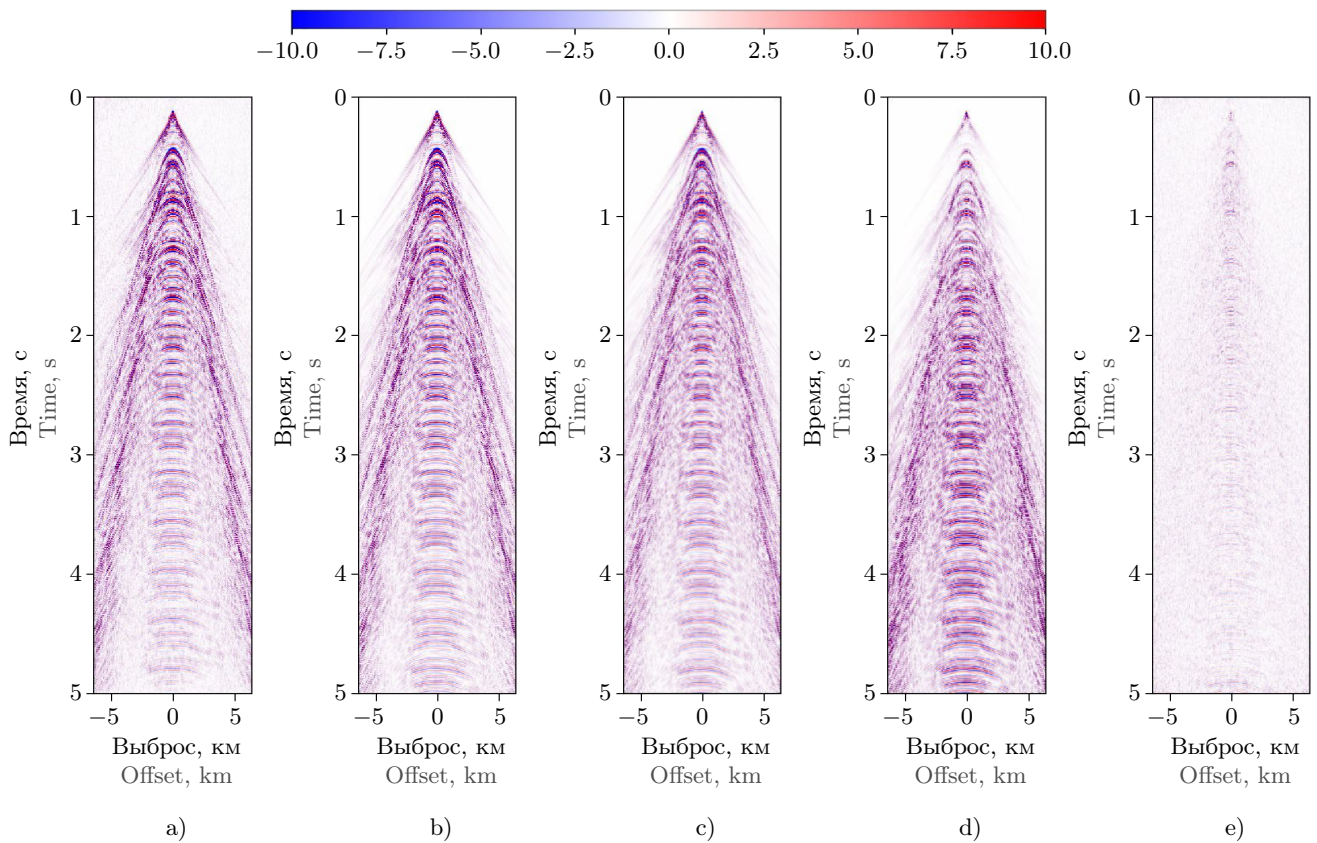


Рис. 5. Решения волнового уравнения для скоростной модели  $M^7$ : а) на мелкой расчетной сетке; б) после применения нейронной сети NDM-net; в) на грубой расчетной сетке; д) расхождение между решениями на грубой и мелкой расчетных сетках; е) расхождение между решением на мелкой расчетной сетке и решением после применения нейронной сети NDM-net

Fig. 5. Solutions of the wave equation for the velocity model  $M^7$ : а) on a fine computational grid; б) after applying the NDM-net neural network; в) on a coarse computational grid; д) difference between solutions on coarse and fine computational grids; е) difference between the solution on a fine computational grid and the solution after applying the NDM-net neural network

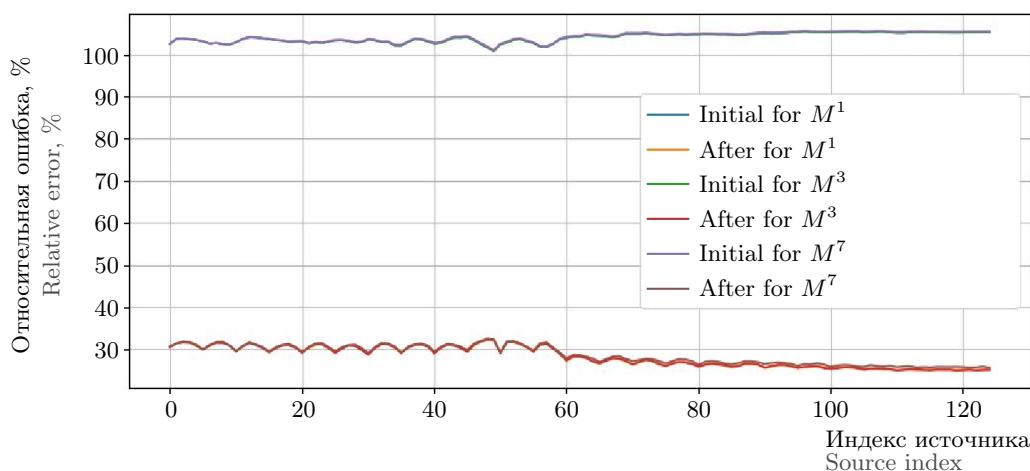


Рис. 6. Относительная ошибка между решениями для этапов 1, 3, 7 сейсмического мониторинга

Fig. 6. Relative error between solutions for stages 1, 3, 7 of seismic monitoring

(рис. 5а). В то же время уровень дисперсии в виде расхождения между решением на мелкой сетке и решением на грубой сетке (рис. 5д) существенно уменьшается после применения нейронной сети (рис. 5е). Для оценки качества результатов применения нейронной сети используется ошибка в норме  $L_2$ :

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k), \mathbf{u}_{h_1}^1(t, x_o, x_s^k)) = \frac{\|\mathbf{u}_{h_1}^i(t, x_o, x_s^k) - \mathbf{u}_{h_1}^1(t, x_o, x_s^k)\|_2}{\|\mathbf{u}_{h_1}^1(t, x_o, x_s^k)\|_2} \times 100\%.$$

Такая ошибка используется также при расчете начального расхождения между решениями на мелкой и грубой расчетных сетках, ее обозначают  $\varepsilon_{\text{init}}^i$ .

Средняя ошибка для каждого источника и результирующая ошибка после применения нейронной сети (рис. 6) показывают, что численная дисперсия в среднем уменьшилась в три раза со 119% до 41% в норме  $L_2$  для трех рассматриваемых этапов захоронения газа ( $M^1, M^3, M^7$ ).

Расчет одной сейсмограммы на грубой расчетной сетке составляет 1 мин, на мелкой сетке 6 мин. Следовательно, при применении разработанного алгоритма для каждого этапа захоронения при  $N_m = 7$  потребуется 1235 мин для формирования обучающей выборки и обучения нейронной сети, в то время как проводимый сейсмический мониторинг на мелкой расчетной сетке занимает 5250 мин. Таким образом, достигается четырехкратное ускорение для данной задачи.

**8. Вывод.** В работе представлен алгоритм, сочетающий моделирование двухфазной фильтрации в пористом пространстве, моделирование распространения сейсмических волновых полей и использование нейронной сети для решения задачи сейсмического мониторинга захоронения газов в породе-коллекторе. Алгоритм позволяет ускорить расчеты за счет применения нейронной сети, подавляющей численную дисперсию в сейсмограммах, рассчитанных на грубой сетке. При этом результаты численных экспериментов подтверждают, что алгоритм ускоряет моделирование данных сейсмического мониторинга в четыре раза. Количественный анализ с использованием относительной ошибки в норме  $L_2$  показывает значительное снижение численной дисперсии, средние ошибки уменьшаются в три раза. Полученные результаты показывают, что предложенный метод успешно повышает точность моделирования данных сейсмического мониторинга в реальном времени при уменьшении времени счета.

## Список литературы

1. Paffenholz J. Introduction to this special section: The role of advanced modeling in enhanced carbon storage // The Leading Edge. 2021. 40, №6. 408–412. doi 10.1190/tle40060408.1.
2. Pevzner R., Uroevic M., Caspari E., Galvin R.J., Madadi M., Dance T., Shulakova V., Gurevich B., Tcheverda V., Cinar Y. Feasibility of time-lapse seismic methodology for monitoring the injection of small quantities of co2 into a saline formation, co2crc otway project // Energy Procedia. 2013. 37, 4336–4343. doi 10.1016/j.egypro.2013.06.336.

3. Wang Z., Harbert W. P., Dilmore R. M., Huang L. Modeling of time-lapse seismic monitoring using co2 leakage simulations for a model co2 storage site with realistic geology: Application in assessment of early leak-detection capabilities // International Journal of Greenhouse Gas Control. 2018. **76**, 39–52. doi [10.1016/j.ijggc.2018.06.011](https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2018.06.011).
4. Ivandic M., Bergmann P., Kummerow J., Huang F., Juhlin C., Lueth S. Monitoring CO2 saturation using time-lapse amplitude versus offset analysis of 3D seismic data from the Ketzin CO2 storage pilot site, Germany // Geophysical Prospecting. 2018. **66**, №.8. 1568–1585. doi [10.1111/1365-2478.12666](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12666).
5. Virieux J. P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method // Geophysics. 1986. **51**, №.4. 889–901. doi [10.1190/1.1442147](https://doi.org/10.1190/1.1442147).
6. Levander A. R. Fourth-order finite-difference p-sv seismograms // Geophysics. 1988. **53**, №.11. 1425–1436. doi [10.1190/1.1442422](https://doi.org/10.1190/1.1442422).
7. Saenger E. H., Gold N., Shapiro S. A. Modeling the propagation of the elastic waves using a modified finite-difference grid // Wave Motion. 2000. **31**. 77–92. doi [10.1016/S0165-2125\(99\)00023-2](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(99)00023-2).
8. Lisitsa V., Vishnevskiy D. Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3d anisotropic elasticity // Geophysical Prospecting. 2010. **58**, №. 4. 619–635. doi [10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x).
9. Lisitsa V., Tcheverda V., Vishnevsky D. Numerical simulation of seismic waves in models with anisotropic formations: coupling virieux and lebedev finite-difference schemes // Computational Geosciences. 2012. **16**, №.4. 1135–1152. doi [10.1007/s10596-012-9308-0](https://doi.org/10.1007/s10596-012-9308-0).
10. Idesman A., Pham D. Finite element modeling of linear elastodynamics problems with explicit time-integration methods and linear elements with the reduced dispersion error // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2014. **271**. 86–108. doi [10.1016/j.cma.2013.12.002](https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.12.002).
11. Dumbser M., Kaser M. An arbitrary high-order discontinuous galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - ii. the three-dimensional isotropic case // Geophysical Journal International. 2006. **167**, №.1, 319–336. doi [10.1111/j.1365-246X.2006.03120.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03120.x).
12. Lisitsa V., Tcheverda V., Botter C. Combination of the discontinuous galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation // Journal of Computational Physics. 2016. **311**. 142–157. doi [10.1016/j.jcp.2016.02.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.005).
13. Komatitsch D., Vilotte J. P. The spectral element method; an efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures // Bulletin of the Seismological Society of America. 1998. **88**, №.2. 368–392. doi [10.1785/BSSA0880020368](https://doi.org/10.1785/BSSA0880020368).
14. Tromp J., Komatitsch D., Liu Q. Spectral-element and adjoint methods in seismology // Commun. Comput. Phys. 2008. **3**, №.1. 1–32. <https://www.geophysik.uni-muenchen.de/~igel/EGU2007/Material/Tromp/CiCP-06-077.pdf>. (Дата обращения: 23 октября 2025).
15. Anyosa S., Bunting S., Eidsvik J., Romdhane A., Bergmo P. Assessing the value of seismic monitoring of CO2 storage using simulations and statistical analysis // International Journal of Greenhouse Gas Control. 2021. **105**. 103219. doi [10.1016/j.ijggc.2020.103219](https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2020.103219).
16. Wen G., Li Z., Azizzadenesheli K., Anandkumar A., Benson S. M. U-FNO—an enhanced fourier neural operator-based deep-learning model for multiphase flow // Advances in Water Resources. 2022. **163**, 104180. doi [10.1016/j.advwatres.2022.104180](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2022.104180).
17. Yin Z., Siahkoobi A., Louboutin M., Herrmann F. J. Learned coupled inversion for carbon sequestration monitoring and forecasting with fourier neural operators // Second International Meeting for Applied Geoscience & Energy, August 28, 2022, Houston, Texas. Society of Exploration Geophysicists, 2022. 467–472. doi [10.1190/image2022-3722848.1](https://doi.org/10.1190/image2022-3722848.1).
18. Bei L., Yunyue E. L. Neural Network-Based CO2 Interpretation From 4D Sleipner Seismic Images // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2021. **126**, №.12. e2021JB022524. doi [10.1029/2021JB022524](https://doi.org/10.1029/2021JB022524).
19. Sheng H., Wu X., Sun X., Wu L. Deep learning for characterizing co2 migration in time-lapse seismic images // Fuel. 2023. **336**, 126806. doi [10.1016/j.fuel.2022.126806](https://doi.org/10.1016/j.fuel.2022.126806).
20. Shokouhi P., Kumar V., Prathipati S., Hosseini S. A., Giles C. L., Kifer D. Physics-informed deep learning for prediction of CO2 storage site response // Journal of Contaminant Hydrology. 2021. **241**. 103835. doi [10.1016/j.jconhyd.2021.103835](https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2021.103835).
21. Wen G., Hay C., Benson S. M. CCSNet: A deep learning modeling suite for CO2 storage // Advances in Water Resources. 2021. **155**. 104009. doi [10.1016/j.advwatres.2021.104009](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2021.104009).
22. Gadyshin K., Lisitsa V., Gadyshina K., Vishnevsky D. Frequency domain numerical dispersion mitigation network // Computational Science and Its Applications (ICCSA 2023), July 3–6, 2023, Athens, Greece. Lecture Notes in Computer Science, 2023. 31–41. doi [10.1007/978-3-031-37111-0\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-031-37111-0_3).
23. Gondyul E., Lisitsa V., Gadyshin K., Vishnevsky D. Numerical dispersion mitigation neural network with the model-based training dataset optimization // Computational Science and Its Applications (ICCSA 2023), July 3–6, 2023, Athens, Greece. Lecture Notes in Computer Science, 2023. 19–30. doi [10.1007/978-3-031-37111-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-031-37111-0_2).

24. Isola P., Zhu J., Zhou T., Efros A. A. Image-to-image translation with conditional adversarial networks // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2017), July 21–26, 2017, Honolulu, USA. IEEE, 2017. 5967–5976. doi [10.1109/CVPR.2017.632](https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.632).
25. Sheldon J. W., Zondek B., Cardwell W. T. One-dimensional, incompressible, non-capillary, two-phase fluid flow in a porous medium // Trans. SPE AIME. 1959. **216**. 290–296. doi [10.2118/978-G](https://doi.org/10.2118/978-G).
26. Douglas Jr. J., Peaceman D. W., Rachford Jr. H. H. A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement // Trans. SPE AIME. 1959. **216**. 297–306. doi [10.2118/1327-G](https://doi.org/10.2118/1327-G).
27. MacDonald R. C. Methods for Numerical Simulation of Water and Gas Coning // Society of Petroleum Engineers Journal. 1970. **10**, №. 04. 425–436. doi [10.2118/2796-PA](https://doi.org/10.2118/2796-PA).
28. Thomas G. W., Thurnau D. H. Reservoir Simulation Using an Adaptive Implicit Method // Society of Petroleum Engineers Journal. 1983. **23**, №. 24. 759–768. doi [10.2118/10120-PA](https://doi.org/10.2118/10120-PA).
29. Murphy W. F., Schwartz L. M., Hornby B. Interpretation physics of VP and VS in sedimentary rocks // Trans. SPWLA 32nd Ann. Logging Symp., June 16–19, 1991, Midland, Texas. <https://onepetro.org/SPWLAALS/proceedings-abstract/SPWLA-1991/SPWLA-1991/SPWLA-1991-FF/18997>. (Дата обращения: 23 октября 2025).
30. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. doi [10.1137/1.9780898718942](https://doi.org/10.1137/1.9780898718942).
31. Laevsky Yu. M., Popov P. E., Kalinkin A. A. Modeling of Two-Phase Fluid Filtration by a Mixed Method of Finite Elements // Mat. Model. 2010. **3**. 74–90. [https://www.mathnet.ru/links/d005d54746cd4b0d4878f90d6c121b63/mm\\_2950\\_refs\\_eng.pdf](https://www.mathnet.ru/links/d005d54746cd4b0d4878f90d6c121b63/mm_2950_refs_eng.pdf). (Дата обращения: 23 октября 2025).
32. Virieux J., Madariaga R. Dynamic faulting studied by a finite difference method // Bulletin of the Seismological Society of America. 1982. **72**, №. 2. 345–369. doi [10.1785/BSSA0720020345](https://doi.org/10.1785/BSSA0720020345).
33. Gadyshin K., Vishnevsky D., Gadyshina K., Lisitsa V. Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling // Geophysics. 2022. **87**, №. 3. T237–T249. doi [10.1190/geo2021-0242.1](https://doi.org/10.1190/geo2021-0242.1).
34. Gondyul E., Lisitsa V., Gadyshin K., Vishnevsky D. Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction // Computers & Geosciences. 2025. **196**. 105806. doi [10.1016/j.cageo.2024.105806](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2024.105806).

Получена  
1 сентября 2025 г.

Принята  
13 октября 2025 г.

Опубликована  
17 ноября 2025 г.

### Информация об авторах

Елена Александровна Гондюл — мл. науч. сотр.; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Вадим Викторович Лисица — д.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Дмитрий Михайлович Вишневский — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

### References

1. J. Paffenholz, “Introduction to this special section: The role of advanced modeling in enhanced carbon storage,” The Leading Edge. **40** (6). 408–412 (2021). doi [10.1190/tle40060408.1](https://doi.org/10.1190/tle40060408.1).
2. R. Pevzner, M. Urosevic, E. Caspari, R. J. Galvin, M. Madadi, T. Dance, V. Shulakova, B. Gurevich, V. Tcheverda., Y. Cinar, “Feasibility of time-lapse seismic methodology for monitoring the injection of small quantities of co2 into a saline formation, co2crc otway project,” Energy Procedia. **37**, 4336–4343 (2023). doi [10.1016/j.egypro.2013.06.336](https://doi.org/10.1016/j.egypro.2013.06.336).
3. Z. Wang, W. P. Harbert, R. M. Dilmore, L. Huang, “Modeling of time-lapse seismic monitoring using co2 leakage simulations for a model co2 storage site with realistic geology: Application in assessment of early leak-detection capabilities,” International Journal of Greenhouse Gas Control. **76**, 39–52 (2018). doi [10.1016/j.ijggc.2018.06.011](https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2018.06.011).
4. M. Ivandic, P. Bergmann, J. Kummerow, F. Huang, C. Juhlin, S. Lueth, “Monitoring CO2 saturation using time-lapse amplitude versus offset analysis of 3D seismic data from the Ketzin CO2 storage pilot site, Germany,” Geophysical Prospecting. **66** (8). 1568–1585 (2018). doi [10.1111/1365-2478.12666](https://doi.org/10.1111/1365-2478.12666).
5. J. Virieux, “P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method,” Geophysics. **51** (4). 889–901 (1986). doi [10.1190/1.1442147](https://doi.org/10.1190/1.1442147).





6. A. R. Levander, “Fourth-order finite-difference p-sv seismograms,” *Geophysics*. **53** (11).1425–1436 (1988). doi [10.1190/1.1442422](https://doi.org/10.1190/1.1442422).
7. E. H. Saenger, N. Gold, S. A. Shapiro, “Modeling the propagation of the elastic waves using a modified finite-difference grid,” *Wave Motion*. **31**. 77–92 (2000). doi [10.1016/S0165-2125\(99\)00023-2](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(99)00023-2).
8. V. Lisitsa and D. Vishnevskiy, “Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3d anisotropic elasticity,” *Geophysical Prospecting*. **58** (4). 619–635 (2010). doi [10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x).
9. V. Lisitsa, V. Tcheverda, D. Vishnevsky, “Numerical simulation of seismic waves in models with anisotropic formations: coupling virieux and lebedev finite-difference schemes,” *Computational Geosciences*. **16** (4). 1135–1152 (2012). doi [10.1007/s10596-012-9308-0](https://doi.org/10.1007/s10596-012-9308-0).
10. A. Idesman and D. Pham, “Finite element modeling of linear elastodynamics problems with explicit time-integration methods and linear elements with the reduced dispersion error,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **271**. 86–108 (2014). doi [10.1016/j.cma.2013.12.002](https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.12.002).
11. M. Dumbser and M. Kaser, “An arbitrary high-order discontinuous galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - ii. the three-dimensional isotropic case,” *Geophysical Journal International*. **167** (1), 319–336 (2006). doi [10.1111/j.1365-246X.2006.03120.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03120.x).
12. V. Lisitsa, V. Tcheverda, C. Botter, “Combination of the discontinuous galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation,” *Journal of Computational Physics*. **311**. 142–157 (2016). doi [10.1016/j.jcp.2016.02.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.005).
13. D. Komatitsch and J. P. Vilotte, “The spectral element method; an efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures,” *Bulletin of the Seismological Society of America*. **88** (2). 368–392 (1988). doi [10.1785/BSSA0880020368](https://doi.org/10.1785/BSSA0880020368).
14. J. Tromp, D. Komatitsch, Q. Liu, “Spectral-element and adjoint methods in seismology,” *Commun. Comput. Phys.* **3** (1). 1–32 (2008). <https://www.geophysik.uni-muenchen.de/~igel/EGU2007/Material/Tromp/CiCP-06-077.pdf>. Cited October 23, 2025.
15. S. Anyosa, S. Bunting, J. Eidsvik, A. Romdhane, P. Bergmo, “Assessing the value of seismic monitoring of CO2 storage using simulations and statistical analysis,” *International Journal of Greenhouse Gas Control*. **105**. 103219 (2021). doi [10.1016/j.ijggc.2020.103219](https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2020.103219).
16. G. Wen, Z. Li, K. Azizzadenesheli, A. Anandkumar, S. M. Benson, “U-FNO—an enhanced fourier neural operator-based deep-learning model for multiphase flow,” *Advances in Water Resources*. **163**, 104180 (2022). doi [10.1016/j.advwatres.2022.104180](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2022.104180).
17. Z. Yin, A. Siahkoobi, M. Louboutin, F. J. Herrmann, “Learned coupled inversion for carbon sequestration monitoring and forecasting with fourier neural operators,” in *Second International Meeting for Applied Geoscience & Energy, Houston, Texas, August 28, 2022* (Society of Exploration Geophysicists, 2022), pp. 467–472. doi [10.1190/imag-e2022-3722848.1](https://doi.org/10.1190/imag-e2022-3722848.1).
18. L. Bei, E. L. Yunyue, “Neural Network-Based CO2 Interpretation From 4D Sleipner Seismic Images,” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. **126** (12). e2021JB022524 (2021). doi [10.1029/2021JB022524](https://doi.org/10.1029/2021JB022524).
19. H. Sheng, X. Wu, X. Sun, L. Wu, “Deep learning for characterizing co2 migration in time-lapse seismic images,” *Fuel*. **336**, 126806 (2023). doi [10.1016/j.fuel.2022.126806](https://doi.org/10.1016/j.fuel.2022.126806).
20. P. Shokouhi, V. Kumar, S. Prathipati, S. A. Hosseini, C. L. Giles, D. Kifer, “Physics-informed deep learning for prediction of CO2 storage site response,” *Journal of Contaminant Hydrology*. **241**. 103835 (2021). doi [10.1016/j.jconhyd.2021.103835](https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2021.103835).
21. G. Wen, C. Hay, S. M. Benson, “CCSNet: A deep learning modeling suite for CO2 storage,” *Advances in Water Resources*. **155**. 104009 (2021). doi [10.1016/j.advwatres.2021.104009](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2021.104009).
22. K. Gadylyshin, V. Lisitsa, K. Gadylyshina, D. Vishnevsky, “Frequency domain numerical dispersion mitigation network,” in *Computational Science and Its Applications (ICCSA 2023), Athens, Greece, July 3–6, 2023* (Lecture Notes in Computer Science, 2023), pp. 31–41. doi [10.1007/978-3-031-37111-0\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-031-37111-0_3).
23. E. Gondyul, V. Lisitsa, K. Gadylyshin, D. Vishnevsky, “Numerical dispersion mitigation neural network with the model-based training dataset optimization,” in *Computational Science and Its Applications (ICCSA 2023), Athens, Greece, July 3–6, 2023* (Lecture Notes in Computer Science, 2023), pp. 19–30. doi [10.1007/978-3-031-37111-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-031-37111-0_2).
24. P. Isola, J. Zhu, T. Zhou, A. A. Efros, “Image-to-image translation with conditional adversarial networks,” in *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2017), Honolulu, USA July 21–26, 2017* (IEEE, 2017), pp. 5967–5976. doi [10.1109/CVPR.2017.632](https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.632).
25. J. W. Sheldon, B. Zondek, W. T. Cardwell, “One-dimensional, incompressible, non-capillary, two-phase fluid flow in a porous medium,” *Trans. SPE AIME*. **216**. 290–296 (1959). doi [10.2118/978-G](https://doi.org/10.2118/978-G).

26. Jr. J. Douglas, D. W. Peaceman, Jr. H. H. Rachford, “A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement,” *Trans. SPE AIME*. **216**. 297–306 (1959). doi [10.2118/1327-G](https://doi.org/10.2118/1327-G).
27. R. C. MacDonald, “Methods for Numerical Simulation of Water and Gas Coning,” *Society of Petroleum Engineers Journal*. **10** (4), 425–436 (1970). doi [10.2118/2796-PA](https://doi.org/10.2118/2796-PA).
28. G. W. Thomas and D. H. Thurnau, “Reservoir Simulation Using an Adaptive Implicit Method,” *Society of Petroleum Engineers Journal*. **23** (24). 759–768 (1983). doi [10.2118/10120-PA](https://doi.org/10.2118/10120-PA).
29. W. F. Murphy, L. M. Schwartz, B. Hornby, “Interpretation physics of VP and VS in sedimentary rocks,” in *Trans. SPWLA 32nd Ann. Logging Symp, Midland, Texas, June 16–19, 1991*, <https://onepetro.org/SPWLAALS/proceedings-abstract/SPWLA-1991/SPWLA-1991/SPWLA-1991-FF/18997>. Cited October 23, 2025.
30. Z. Chen, G. Huan, Y. Ma, *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, (Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006). doi [10.1137/1.9780898718942](https://doi.org/10.1137/1.9780898718942).
31. Yu. M. Laevsky, P. E. Popov, A. A. Kalinkin, “ Modeling of Two-Phase Fluid Filtration by a Mixed Method of Finite Elements,” *Mat. Model.* **3**. 74–90 (2010). [https://www.mathnet.ru/links/d005d54746cd4b0d4878f90d6c121b63/mm\\_2950\\_refs\\_eng.pdf](https://www.mathnet.ru/links/d005d54746cd4b0d4878f90d6c121b63/mm_2950_refs_eng.pdf). Cited October 23, 2025.
32. J. Virieux and R. Madariaga, “Dynamic faulting studied by a finite difference method,” *Bulletin of the Seismological Society of America*. **72** (2). 345–369 (1982). doi [10.1785/BSSA0720020345](https://doi.org/10.1785/BSSA0720020345).
33. K. Gadylyshin, D. Vishnevsky, K. Gadylyshina, V. Lisitsa, “Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling,” *Geophysics*. **87** (32). T237–T249 (2022). doi [10.1190/geo2021-0242.1](https://doi.org/10.1190/geo2021-0242.1).
34. E. Gondyul, V. Lisitsa, K. Gadylyshin, D. Vishnevsky, “Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction,” *Computers & Geosciences*. **196**. 105806 (2025). doi [10.1016/j.cageo.2024.105806](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2024.105806).

*Received*  
*September 1, 2025*

*Accepted*  
*October 13, 2025*

*Published*  
*November 17, 2025*

### Information about the authors

*Elena A. Gondyul* — Junior Researcher; Sobolev institute of mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.

*Vadim V. Lisitsa* — Dr. Sci., Head of Laboratory; Sobolev institute of mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.

*Dmitry G. Vishnevsky* — Ph.D., Research Scientist; Sobolev institute of mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.