



doi 10.26089/NumMet.v26r437

УДК 004.942;
669.046

Трехмерная нестационарная многофазная модель процесса локального плавления статичных и подвижных сплошных тел

Р. С. Рубля

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КАИ),
кафедра лазерных и аддитивных технологий, Казань, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-5194-0535, e-mail: rsrublya@kai.ru

С. А. Никифоров

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КАИ),
кафедра лазерных и аддитивных технологий, Казань, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-6467-1503, e-mail: sanikifov@kai.ru

И. В. Шварц

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КАИ),
кафедра лазерных и аддитивных технологий, Казань, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-6342-5220, e-mail: ivshvarts@kai.ru

А. Х. Гильмутдинов

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КАИ),
кафедра лазерных и аддитивных технологий, Казань, Российская Федерация

ORCID: 0000-0001-9383-6007, e-mail: albert.gilmutdinov@kai.ru

Аннотация: Разработана и верифицирована многофазная математическая модель для описания динамики статичных и подвижных сплошных тел, подвергаемых локальному плавлению в условиях действия сил тяжести и поверхностного натяжения. Ключевым элементом является модифицированный релаксационный источник ускорения, который позволяет задавать объекту целевую поступательную или вращательную скорость, при этом его действие плавно снижается в зоне фазового перехода первого рода и пространственно локализуется вблизи границы раздела фаз за счет введения температурно-зависимого и фазового множителей. Модель адаптирована для работы с произвольными объемными источниками тепла. На основе серии вычислительных экспериментов определены диапазоны калибровочных параметров модели, обеспечивающие баланс между высокой точностью, вычислительной стабильностью и приемлемыми временными затратами. Верификация подтверждена согласованием с аналитическими решениями. Модель применима для численного анализа процессов сварки, наплавки, индукционного плавления и др.

Ключевые слова: многофазная модель, локальное плавление, тормозящий источник, фазовый переход, вычислительный эксперимент, адаптивное сгущение сетки, метод конечных объемов, Ansys Fluent, UDF.

Благодарности: Работа выполнена за счет предоставленного в 2024 г. Академией наук Республики Татарстан гранта на осуществление фундаментальных и прикладных научных работ в научных и образовательных организациях, предприятиях и организациях реального сектора экономики Республики Татарстан.

Для цитирования: Рубля Р.С., Никифоров С.А., Шварц И.В., Гильмутдинов А.Х. Трехмерная нестационарная многофазная модель процесса локального плавления статичных и подвижных сплошных тел // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 4. 569–587. doi 10.26089/NumMet.v26r437.

Three-dimensional time-dependent multiphase model of local melting processes for stationary and moving continuous bodies

Ratmir S. Rublia

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (KAI),
Department of Laser and Additive Technologies, Kazan, Russia
ORCID: 0000-0001-5194-0535, e-mail: rsrublya@kai.ru

Sergei A. Nikiforov

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (KAI),
Department of Laser and Additive Technologies, Kazan, Russia
ORCID: 0000-0002-6467-1503, e-mail: sanikifov@kai.ru

Ivan V. Shvarts

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (KAI),
Department of Laser and Additive Technologies, Kazan, Russia
ORCID: 0000-0002-6342-5220, e-mail: ivshvarts@kai.ru

Albert Kh. Gilmudinov

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (KAI),
Department of Laser and Additive Technologies, Kazan, Russia
ORCID: 0000-0001-9383-6007, e-mail: albert.gilmudinov@kai.ru

Abstract: A multiphase mathematical model has been developed and verified to describe the dynamics of stationary and moving continuous bodies undergoing local melting under gravity and surface tension forces. The key element is a modified acceleration source that enables imposing target translational or rotational velocities on the object. Its action smoothly diminishes within the first-order phase transition zone and becomes spatially localized near the phase interface through the introduction of temperature-dependent and phase-based multipliers. The model is adapted to work with arbitrary volumetric heat sources. A series of computational experiments established optimal ranges for the calibration parameters, ensuring a balance between high accuracy, numerical stability, and acceptable computational cost. Verification was confirmed through agreement with analytical solutions. The model is applicable for numerical analysis of welding, cladding, induction melting, and similar processes.

Keywords: multiphase model, local melting, damping source term, phase transition, computational experiment, adaptive mesh refinement, finite volume method, Ansys Fluent, user-defined function (UDF).

Acknowledgements: The work was supported by a grant from the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan, provided in 2024 for the implementation of fundamental and applied research in scientific and educational institutions, enterprises, and organizations of the real sector of the economy of the Republic of Tatarstan.

For citation: R. S. Rublia, S. A. Nikiforov, I. V. Sharts, and A. Kh. Gilmudinov, “Three-dimensional time-dependent multiphase model of local melting processes for stationary and moving continuous bodies,” *Numerical Methods and Programming*. 26 (4), 569–587 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r437.

1. Введение. Современные высокоэнергетические технологии получения металлических материалов и деталей, основанные на локальном плавлении, предъявляют повышенные требования к точности прогнозирования динамики расплава, управлению процессами кристаллизации и обеспечению требуемых свойств конечного изделия. К таким технологиям относятся лазерная и электронно-лучевая резка и сварка, аддитивное производство (селективное лазерное плавление, прямая лазерная наплавка), а также бесштырьковая индукционная плавка и др.



Разработка и внедрение достоверных трехмерных многофазных численных моделей позволяют не только глубже понять физику протекающих процессов, но и существенно сократить затраты на проведение экспериментальных исследований, снизить количество пробных запусков и оптимизировать режимы работы оборудования [1]. Это, в свою очередь, ускоряет внедрение новых технологических решений и повышает экономическую эффективность производства.

В большинстве исследований, посвященных многофазному моделированию процессов локального нагрева и плавления, рассматриваются задачи с неподвижными объектами, короткими временными интервалами ($\tau \sim 1$ с) и малыми расчетными областями ($l \sim 10^{-3}$ – 10^{-2} м) [2–5]. Типичным примером является моделирование формирования ванны расплава при высокоэнергетическом точечном воздействии с характерным временем расчета порядка нескольких секунд [6]. В подобных работах, как правило, применяется упрощенная модель вязкого демпфирования с использованием завышенных значений коэффициента торможения ($\eta \sim 10^9$ – 10^{12} с $^{-1}$), которая обеспечивает точность и устойчивость решения только при использовании малых временных шагов ($\sim 10^{-8}$ – 10^{-5} с). Данный подход демонстрирует принципиальные ограничения при моделировании протяженных во времени макроскопических процессов ($l \sim 10^{-1}$ м, $\tau \sim 10^1$ с), сопровождающихся перемещением тел в условиях локального нагрева и интенсивного истечения расплава, как, например, в задачах индукционного плавления металлических стержней в технологии получения металлических порошков для нужд аддитивного производства EIGA [7].

К основным проблемам существующих подходов относятся:

- 1) жесткость системы уравнений — введение источника импульса с большим коэффициентом торможения приводит к существенному увеличению числа обусловленности системы дифференциальных уравнений, что требует использования чрезмерно малого временного шага интегрирования;
- 2) численные неустойчивости — резкий градиент демпфирующей силы на границе раздела фаз провоцирует возникновение осцилляций в решении.

В основу настоящей работы положена математическая модель, представленная в исследовании с участием авторов [8], в котором рассматривался процесс точечного нагрева и плавления нержавеющей стали 08X16H11M3 (AISI 316L) под воздействием ультразвукового поля.

Целью работы является модификация и развитие ранее предложенной многофазной модели с ее адаптацией к заданию вынужденного движения твердых тел, подвергаемых локальному плавлению.

Задачи работы:

- 1) добавление в источник импульса компоненты, отвечающей за вынужденное поступательное и вращательное движение твердых тел;
- 2) корректировка модели источника импульса и параметров модели с целью повышения производимости, численной стабильности и точности решения;
- 3) анализ сходимости и подбор оптимальных калибровочных параметров модели;
- 4) верификация модели на модельных вычислительных экспериментах.

2. Подход моделирования и ключевые допущения. Для описания течений расплава, вызванных релаксацией свободной поверхности сплошного тела при локальном плавлении, разработана математическая модель, основанная на следующих предположениях:

- 1) моделируемая среда представлена двухфазной системой “газ + металл”, при этом твердое состояние металла аппроксимируется как жидкость с высокой эффективной вязкостью ($\sim 10^1$ кг/м·с), тогда как жидкая фаза (расплав) характеризуется существенно меньшей вязкостью ($\sim 10^{-2}$ кг/м·с), но все же значительно превышающей таковую для газовой фазы;
- 2) течение жидкого металла рассматривается в ламинарном режиме, а сам расплав моделируется как несжимаемая ньютоновская жидкость;
- 3) материал считается изотропным и однородным, теплофизические свойства зависят от температуры как в твердой, так и в жидкой фазах;
- 4) фазовый переход первого рода описывается с учетом скрытой теплоты плавления, при этом испарение и связанные с ним эффекты (массовые потери, давление отдачи пара) не рассматриваются, поскольку температуры не достигают порога кипения;
- 5) химические реакции и тепловое расширение не учитываются.

Моделирование проведено в пакете программ инженерного анализа ANSYS Fluent 2023 R1 с использованием авторской пользовательской функции (UDF), реализующей модифицированный источник торможения и вынужденного движения.

3. Математическая постановка задачи.

3.1. Управляющие уравнения. Для моделирования динамики многофазного течения решается система уравнений Навье–Стокса для бинарной смеси “газ + металл”, которая записывается в следующем векторном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_{\text{см}}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\text{см}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\text{см}} = -\frac{1}{\rho_{\text{см}}} \nabla p + \frac{\mu_{\text{см}}}{\rho_{\text{см}}} \Delta \mathbf{u}_{\text{см}} + \mathbf{a}_{\text{внеш}}, \\ \frac{\partial \rho_{\text{см}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\text{см}} \mathbf{u}_{\text{см}}) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{u}_{\text{см}}$ — векторное поле скоростей течения смеси (м/с), $\rho_{\text{см}}$ — плотность смеси (кг/м³), p — динамическое давление (Па), $\mu_{\text{см}}$ — динамическая вязкость смеси (Па·с), $\mathbf{a}_{\text{внеш}}$ — результирующий источник ускорения за счет действия внешних сил (м/с²).

Для явного отслеживания границы раздела фаз используется метод Volume of Fluid (VOF) [9], основанный на решении обобщенного уравнения переноса на скалярное поле фазового индикатора $\varphi \in [0, 1]$, где $\varphi = 1$ соответствует главной (газовой) фазе, а $\varphi = 0$ — вторичной (металлической):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\text{см}} \cdot \nabla) \varphi = 0. \quad (2)$$

Для расчета распределения температур в подвижной многофазной среде при локальном нагреве решается нестационарное уравнение теплопроводности:

$$\rho_{\text{см}} C_{p_{\text{см}}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\text{см}} \cdot \nabla) T \right) = \nabla \cdot (k_{\text{см}} \nabla T) + Q, \quad (3)$$

где T — поле температур (К), $C_{p_{\text{см}}}$ — удельная теплоемкость (Дж/кг·К), $k_{\text{см}}$ — коэффициент теплопроводности (Вт/м·К), Q — объемный источник тепла (Вт/м³). Уравнение рассматривается в линейном приближении: нелинейность, возникающая в результате зависимости коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости от температуры, устраняется посредством итерационного пересчета этих свойств для предыдущего временного шага и последующего использования их как констант на текущем шаге по времени.

Физические свойства смеси определяются в зависимости от фазового индикатора φ с использованием линейных интерполяционных зависимостей:

$$\begin{cases} \rho_{\text{см}} = \rho_{\text{г}}(1 - \varphi) + \rho_{\text{м}}\varphi, \\ \mu_{\text{см}} = \mu_{\text{г}}(1 - \varphi) + \mu_{\text{м}}\varphi, \\ k_{\text{см}} = k_{\text{г}}(1 - \varphi) + k_{\text{м}}\varphi, \\ C_{p_{\text{см}}} = C_{p_{\text{г}}}(1 - \varphi) + C_{p_{\text{м}}}\varphi, \end{cases}$$

где индексы “г” и “м” обозначают газовую и металлическую фазы соответственно.

Результирующее ускорение $\mathbf{a}_{\text{внеш}}$ в системе (1) интегрирует все ключевые внешние физические воздействия, определяющие динамику многофазной системы:

$$\mathbf{a}_{\text{внеш}} = \mathbf{a}_{\text{г}} + \mathbf{a}_{\text{пн}} + \mathbf{a}_{\text{вд}},$$

где $\mathbf{a}_{\text{г}}$ — ускорение, вызванное действием силы тяжести (м/с²), $\mathbf{a}_{\text{пн}}$ — ускорение, эквивалентное действию силы поверхностного натяжения (м/с²), $\mathbf{a}_{\text{вд}}$ — ускорение вынужденного движения (м/с²).

Гравитационное ускорение рассчитывается по приближению Буссинеска, учитывающему температурную зависимость плотности:

$$\mathbf{a}_{\text{г}} = \mathbf{g} \frac{\rho_{\text{см}} - \rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{см}}},$$

где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения (м/с²).

Ускорение, эквивалентное действию поверхностного натяжения, вводится в форме модели непрерывной силы (Continuous Surface Force [10]):

$$\mathbf{a}_{\text{пн}} = \frac{\sigma \kappa \nabla \varphi}{\frac{1}{2}(\rho_{\text{м}} + \rho_{\text{г}})},$$



где σ — коэффициент поверхностного натяжения (Н/м), $\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right)$ — локальная кривизна межфазной границы.

Модифицированный источник ускорения $\mathbf{a}_{\text{вд}}$ реализует механизм вынужденного движения и вязкого торможения:

$$\mathbf{a}_{\text{вд}} = \eta \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{\text{см}}) = \frac{f_{\text{пл}} \cdot f_{\text{ф}}}{\tau_{\text{рел}}} \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{\text{см}}),$$

где η — коэффициент вязкого демпфирования (с^{-1}), \mathbf{u}_0 — целевая скорость вынужденного движения (м/с), $\tau_{\text{рел}}$ — время релаксации импульса (с), $f_{\text{пл}}$ — фактор плавления, $f_{\text{ф}}$ — фазовый фактор. Физически это соответствует внешнему воздействию, стремящемуся привести текущую скорость $\mathbf{u}_{\text{см}}$ к заданному значению \mathbf{u}_0 . Интенсивность и пространственное распределение такого воздействия корректируется двумя взаимонезависимыми факторами.

Температурно-зависимый фактор $f_{\text{пл}}$, изменяющийся от 1 до 0 в интервале температур плавления $T \in [T_{\text{сол}}, T_{\text{лик}}]$, задается через сглаженный фазовый индикатор $f_{\text{ж}}$, отражающий локальную объемную долю жидкой фазы металла в процессе фазового перехода первого рода:

$$f_{\text{ж}} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{T - T_{\text{пл}}}{\sigma} \right) \right],$$

$$f_{\text{пл}} = 1 - f_{\text{ж}} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - T_{\text{пл}}}{\sigma} \right) \right],$$

где $T_{\text{пл}} = (T_{\text{сол}} + T_{\text{лик}})/2$ представляет собой среднюю температуру плавления, а параметр $\sigma = (T_{\text{лик}} - T_{\text{сол}})/6$ задает ширину зоны сглаживания в интервале $\pm 3\sigma \approx [T_{\text{сол}}, T_{\text{лик}}]$.

Такая форма зависимости обеспечивает:

- $f_{\text{пл}} \rightarrow 1$ при $T < T_{\text{сол}}$ (полное воздействие в твердой фазе);
- плавное уменьшение воздействия в зоне фазового перехода при $T \in [T_{\text{сол}}, T_{\text{лик}}]$;
- $f_{\text{пл}} \rightarrow 0$ при $T > T_{\text{лик}}$ (полное отключение в жидкой фазе).

Данный подход показал свою эффективность для описания процесса плавления металлов [8–11], наряду с более сложным микроструктурозависимым подходом, основанным на методе Козени–Кармана [2–5].

Для пространственной локализации действия источника вынужденного движения и торможения в области преобладания вторичной (металлической) фазы $\varphi_{\text{м}} = 1 - \varphi$ в бинарной смеси введен фазовый фактор $f_{\text{ф}} \in [0, 1]$:

$$f_{\text{ф}} = \varphi_{\text{м}}^{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

где α — показатель фазовой чувствительности. При $\alpha = 1$ реализуется линейная зависимость, при $\alpha > 1$ воздействие источника концентрируется в областях с высокой долей металлической фазы $\varphi_{\text{м}}$, при $\alpha < 1$ оно распространяется на области с малыми значениями $\varphi_{\text{м}}$, обеспечивая более плавное включение источника. Таким образом, варьирование параметра α позволяет управлять режимами усиленного или ослабленного демпфирования на границе раздела фаз, обеспечивая гибкость модели при сохранении физической достоверности.

Фазовый переход первого рода моделируется с помощью эффективных свойств, которые описывают его как резкое, но сглаженное изменение, накладывающееся на исходную зависимость термофизических параметров от температуры в рамках каждой отдельной фазы [12, 13].

Для учета скрытой теплоты плавления используется модель эффективной теплоемкости:

$$C_p^{\text{эфф}} = C_p^{\text{осн}} + C_p^{\text{скр}},$$

где

$$C_p^{\text{осн}} = C_{\text{тв}}(1 - f_{\text{ж}}) + C_{\text{ж}}f_{\text{ж}}, \quad C_p^{\text{скр}} = L_{\text{пл}} \frac{df_{\text{ж}}/dT}{\int_{T_{\text{сол}}}^{T_{\text{лик}}} (df_{\text{ж}}/dT) dT}. \quad (4)$$

Здесь $C_{\text{тв}}$ и $C_{\text{ж}}$ — теплоемкости твердой и жидкой фаз, $L_{\text{пл}}$ — удельная теплота плавления (Дж/кг). Такой подход обеспечивает непрерывность термических свойств, а нормировка интеграла в выражении для $C_p^{\text{скр}}$

гарантирует, что его интегрирование по всему температурному интервалу плавления дает в точности $L_{пл}$, обеспечивая физически корректный скачок энтальпии при фазовом переходе [12].

Аналогичный подход используется для учета изменения реологических свойств. Вводится эффективная динамическая вязкость, непрерывно зависящая от локальной доли жидкой фазы $f_{ж}$:

$$\mu^{\text{эфф}} = \mu_{\text{ТВ}}(1 - f_{ж}) + \mu_{ж}f_{ж}, \quad (5)$$

где $\mu_{\text{ТВ}}$ и $\mu_{ж}$ — динамические вязкости твердой и жидкой фаз.

При этом важно отметить, что свойства материалов $C_{\text{ТВ}}$, $C_{ж}$, $\mu_{\text{ТВ}}$, $\mu_{ж}$ в (4) и (5) сами по себе температурно-зависимы даже за пределами интервала фазового перехода $[T_{\text{сол}}, T_{\text{лик}}]$.

3.2. Начальные и граничные условия. В начальный момент времени ($t = 0$) задавались распределения основных полей — скорости, давления, температуры и фазового индикатора, определяющие исходное состояние системы:

$$\mathbf{u}_{\text{см}}(\mathbf{x}, 0), \quad p(\mathbf{x}, 0), \quad T(\mathbf{x}, 0), \quad \varphi(\mathbf{x}, 0). \quad (6)$$

На границах расчетной области ($\Gamma = \Gamma_{\text{с}} \cup \Gamma_{\text{вх}} \cup \Gamma_{\text{вых}}$) использовались следующие типы граничных условий.

Для системы уравнений Навье–Стокса:

- 1) на твердой стенке $\Gamma_{\text{с}}$ — условие прилипания и непроницаемости (wall no-slip):

$$\mathbf{u}_{\text{см}}|_{\Gamma_{\text{с}}} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{\text{с}}} = 0, \quad (7)$$

- 2) на входе $\Gamma_{\text{вх}}$ — фиксированное значение скорости (inlet):

$$\mathbf{u}_{\text{см}}|_{\Gamma_{\text{вх}}} = (\mathbf{u}_{\text{см}})_{\text{вх}}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{\text{вх}}} = 0, \quad (8)$$

- 3) на выходе $\Gamma_{\text{вых}}$ — условие свободного выхода (pressure-outlet):

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_{\text{см}}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{\text{вых}}} = 0, \quad p|_{\Gamma_{\text{вых}}} = p_{\text{вых}}. \quad (9)$$

Для уравнения теплопроводности:

- 1) на входе $\Gamma_{\text{вх}}$ — условие Дирихле:

$$T|_{\Gamma_{\text{вх}}} = T_{\text{вх}}, \quad (10)$$

- 2) на границах $\Gamma_{\text{с}} \cup \Gamma_{\text{вых}}$ — условие Неймана (теплоизоляция):

$$-k_{\text{см}} \left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_{\text{с}} \cup \Gamma_{\text{вых}}} = 0. \quad (11)$$

Для уравнения переноса фазового индикатора на всех границах расчетной области используется условие нулевого потока через границу:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

Система уравнений (1)–(3), дополненная условиями однозначности (6)–(12), определяет полное математическое описание задачи многофазного течения с локальным нагревом.

3.3. Описание модели. Расчетная область представляла собой куб со стороной $L = 4 \cdot 10^{-2}$ м, грани которого обозначены в соответствии с ориентацией координатных осей: x^{\pm} , y^{\pm} , z^{\pm} . Для дискретизации использовалась трехмерная адаптивная сетка с прямоугольными декартовыми элементами: начальное число ячеек составляло 64 000, после адаптации $\sim 135 000$. Базовый размер элемента равнялся 1 мм, локальное сгущение выполнялось до $1/2$ и $1/4$ этого значения. Адаптация проводилась вблизи границы раздела фаз.

Материалами для многофазной смеси выбраны: для металлической фазы — сталь 08X16H1M3 (AISI 316), для газовой фазы — аргон. Свойства представлены в работе [8].

В начальный момент времени в центре расчетной области инициализируется металлическая сфера диаметром $d = 1.5 \cdot 10^{-2}$ м (рис. 1). Начальная температура равна 300 К во всей расчетной области. Распределение краевых условий по границам расчетной области выполнено следующим образом.

1. Для системы уравнений Навье-Стокса:
 - на x^{\pm}, y^{\pm} (Γ_c) задавалась непроницаемая стенка без проскальзывания;
 - на z^+ ($\Gamma_{вх}$) — вход без притока вещества (нулевая скорость);
 - на z^- ($\Gamma_{вых}$) — свободный выход потока.
2. Для уравнения теплопроводности:
 - на z^+ ($\Gamma_{вх}$) поддерживалась фиксированная температура $T = 300$ К;
 - на остальных гранях ($\Gamma_c \cup \Gamma_{вых}$) задавалось условие теплоизоляции.
3. Для уравнения переноса фазового индикатора:
 - на всех границах расчетной области (Γ) задавалось условие нулевого потока через границу.

Системы уравнений сохранения массы и количества движения решались методом конечных объемов с использованием алгоритма PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators), обеспечивающего согласование полей давления и скорости. Алгоритм применялся на каждом временном шаге для коррекции поля давления и уточнения компонент скорости. Для расчета давления использовалась схема PRESTO! (Pressure Staggering Option), специально разработанная для неструктурированных сеток и обеспечивающая корректное восстановление давления при наличии сильных градиентов, что предотвращает осцилляции, характерные для стандартных методов. Для повышения точности алгоритм был дополнен коррекциями неортогональности (Skewness Correction) и межъячеечного взаимодействия (Neighbor Correction), что особенно важно при моделировании течений с резкими градиентами свойств на межфазной границе.

Уравнение энергии интегрировалось с применением неявной схемы второго порядка точности (Second Order Upwind), минимизирующей численную диффузию и обеспечивающей сохранение резких температурных фронтов.

Для расчета переноса объемной доли фазы использовался метод геометрической реконструкции интерфейса (Geo-Reconstruct), позволяющий точно отслеживать границу раздела фаз даже при ее значительных деформациях. Для исключения влияния численного шума в зонах, удаленных от интерфейса, применялся порог отсечения объемной доли фазы на уровне 10^{-4} .

Минимальное значение невязки (Residuals) для всех переменных (continuity, x -velocity, y -velocity, z -velocity, energy) устанавливалось равным 10^{-4} .

Коэффициенты недорелаксации (Under-relaxation factors) выбирались с учетом нестационарного характера задачи и наличия жестких источников: давление (Pressure) — 0.3, плотность (Density) — 1.0, объемные силы (Body Forces) — 0.4, количество движения (Momentum) — 0.4, энергия (Energy) — 1.0.

Такая комбинация численных методов обеспечивает решение ключевых задач модели.

4. Методика верификации модели. Для проверки корректности работы разработанной численной модели и оценки ее функциональных возможностей выполнено четыре серии модельных вычислительных экспериментов. Каждая серия направлена на анализ отдельного аспекта физического поведения системы — от статического подвеса до динамических режимов с фазовым переходом.

Подбор параметров источника торможения и вынужденного движения ($\tau_{\text{рел}}$ и α) осуществлялся на этапе моделирования статического подвешивания. В последующих экспериментах использовались найденные оптимальные значения, что позволило оценить воспроизводимость различных типов движения и тепломеханических взаимодействий при неизменных характеристиках модели источника.

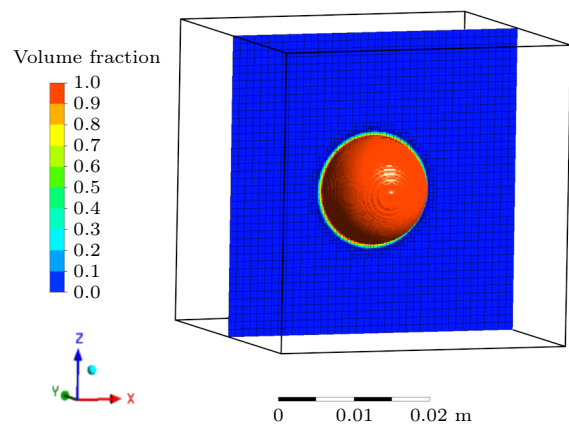


Рис. 1. Изоконтур объемной фракции металла в расчетной области в начальный момент времени и адаптивная расчетная сетка

Fig. 1. Isocontour of metal volume fraction in the computational domain at initial time and adaptive computational grid

Таблица 1. Параметры временной дискретизации для серий расчетов

Table 1. Parameters of temporal discretization for calculation series

№ серии Series No.	Временной шаг, с Time step, s	Количество временных шагов Number of time steps	Количество итераций на временной шаг Number of iterations per time step
1–3	$1.0 \cdot 10^{-3}$	200	20
4	$5.0 \cdot 10^{-4}$	400	25

Для каждой серии расчетов шаг по времени, общее время и количество итераций подбирались индивидуально, исходя из условия устойчивой работы решателя при достаточно большом временном шаге, характерном для моделирования длительных макроскопических процессов (табл. 1).

4.1. Серия “Подвешивание”. В рамках первой серии выполнено 15 расчетов, включающих две группы параметрических исследований: девять расчетов с варьированием времени релаксации импульса $\tau_{\text{рел}}$ в диапазоне 10^{-7} – 10^{-3} с и шесть расчетов с изменением показателя фазовой чувствительности α в диапазоне 0.25–4.0 (для системного анализа применен подход зеркальных пар значений α и $1/\alpha$ (рис. 2), что позволило последовательно оценить режимы как усиленного, так и ослабленного демпфирования на границе раздела фаз). В постановке задачи учитывались сила тяжести и источник торможения, обеспечивающий удержание металлической сферы в равновесном положении.

Цель серии — поэтапная верификация численной реализации модели, включающая проверку корректности воспроизведения статического состояния подвешенной сферы, оценку устойчивости численного алгоритма, анализ сходимости решателя и исследование чувствительности модели источника к ключевым параметрам $\tau_{\text{рел}}$ и α .

Основными показателями точности служили средняя z -компонента скорости металлической фазы $\bar{u}_{z,m}$ (м/с), абсолютное $\Delta z_{\text{цм}}$ (м) и относительное $\delta z_{\text{цм}}$ (%) смещения центра масс. Средняя скорость определялась как объемно-взвешенное значение с учетом локальной доли металла:

$$\bar{u}_{z,m} = \frac{\sum_i u_{z,i} \varphi_{m,i} V_i}{\sum_i \varphi_{m,i} V_i},$$

где $u_{z,i}$ — локальная z -скорость в i -й ячейке (м/с), $\varphi_{m,i}$ — объемная фракция металлической фазы в i -й ячейке, V_i — объем i -й ячейки (м³). Такое усреднение корректно отражает движение металлического тела как единого объекта. Абсолютное и относительное смещения центра масс определялись следующим образом:

$$\Delta z_{\text{цм}} = |z_{\text{цм}} - z_{\text{цм}}^0|, \quad \delta z_{\text{цм}} = \frac{\Delta z_{\text{цм}}}{R_{\text{сф}}} \cdot 100\%,$$

где $z_{\text{цм}}$ и $z_{\text{цм}}^0$ — текущее и исходное положения центра масс (м), $R_{\text{сф}}$ — радиус сферы (м).

Устойчивость численного алгоритма оценивалась по средним и максимальным значениям числа Куранта (CFL), а сходимость — по числу итераций решателя, необходимых для выполнения заданного количества временных шагов.

4.2. Серия “Поступательное движение”. На втором этапе верификации проверялась способность модели воспроизводить заданное поступательное движение металлического тела при оптимальных значениях параметров источника торможения и вынужденного движения $\tau_{\text{рел}}$ и α , полученных в первой

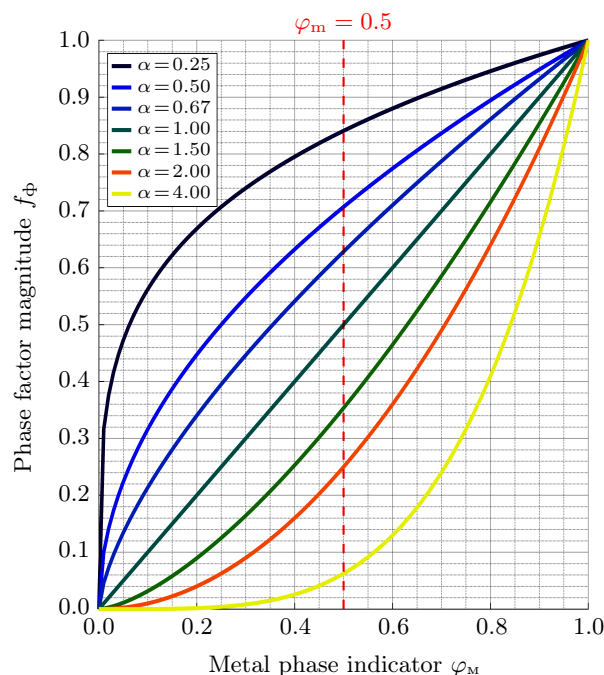


Рис. 2. Зависимость фазового фактора f_ϕ от объемной доли металлической фазы φ_m при различных значениях α

Fig. 2. Dependence of the phase factor f_ϕ on the volume fraction of the metal phase φ_m for different values of α

серии. Сферическому объекту задавалась постоянная скорость перемещения вдоль оси z : $u_z = -0.01$ м/с. В постановке задачи учитывались сила тяжести и источник вынужденного движения. Оценка точности, устойчивости и сходимости выполнялась по тем же критериям, что и в первой серии.

4.3. Серия “Вращательное движение”. Третьим этапом верификации являлась проверка корректности воспроизведения вращательного движения. В данном расчете сферическому объекту придавалась постоянная угловая скорость $\omega = \pi/2$ с⁻¹, соответствующая частоте вращения $1/4$ об/с.

Локальные компоненты скорости вращающегося тела задавались в декартовой системе координат формулами

$$u_x = -\omega R \frac{y - y_0}{R_{\text{сгл}}}, \quad u_y = \omega R \frac{x - x_0}{R_{\text{сгл}}}, \quad u_z = 0,$$

где $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — локальный радиус вращения (м), $R_{\text{сгл}} = R + \varepsilon e^{-R/\varepsilon}$ — сглаженный радиус, предотвращающий сингулярность при $R \rightarrow 0$, ε — малый параметр сглаживания ($\varepsilon \ll R$). Такая форма источника движения обеспечивает равномерное вращение металлической фазы вокруг оси z при сохранении сферической формы межфазной границы.

Точность решения оценивалась по распределению u_y вдоль оси x в пределах металлической фазы и величине $\Delta z_{\text{цм}}$, а устойчивость и сходимость — по аналогии с предыдущими этапами.

4.4. Серия “Локальное плавление подвижного тела”. На заключительном этапе верификации моделировался процесс локального плавления металлического тела, движущегося с заданными угловой и поступательной скоростями. В качестве источника теплового воздействия использовался сферически симметричный объемный источник тепла интенсивностью $Q = 4 \cdot 10^{10}$ Вт/м³, локализованный в нижней полусфере (рис. 3).

Объекту задавались угловая скорость $\omega = 2\pi$ с⁻¹ (соответствующая частоте вращения 1 об/с) и поступательная скорость вдоль оси z $u_z = 0.01$ м/с. Рассматривались два варианта моделирования — с учетом и без учета сил поверхностного натяжения на межфазной границе.

Цель серии вычислительных экспериментов — комплексная проверка корректности воспроизведения процесса локального плавления в условиях вынужденного движения и оценка устойчивости численного алгоритма при резких изменениях физических свойств материала.

Критериями точности решения служили средняя объемно-взвешенная z -компонента скорости металлической фазы $\bar{u}_{z,\text{м}}$ и абсолютное смещение центра масс $\Delta z_{\text{цм}}$. Оценка устойчивости и сходимости решения выполнялась аналогично предыдущим этапам.

5. Результаты верификации модели.

5.1. Серия “Подвешивание”. Результаты серии из девяти расчетов (табл. 2) показывают влияние параметра $\tau_{\text{рел}}$ на эффективность источника торможения, устойчивость и сходимость решения. На рис. 4 представлены соответствующие зависимости основных расчетных характеристик от времени релаксации в логарифмической шкале. Во всех расчетах показатель фазовой чувствительности α принимался равным 1.

При больших значениях $\tau_{\text{рел}}$ порядка $5 \cdot 10^{-4}$ – 10^{-3} с средние z -скорости достигают $\sim -10^{-2}$ м/с, а абсолютные смещения центра масс составляют $\sim 10^{-3}$ м. Такое поведение свидетельствует о недостаточном демпфировании со стороны источника торможения, что приводит к значительным отклонениям центра масс металлической фазы от исходного положения. Количество итераций на 100 временных шагов при этом максимальное (2000), что отражает низкую эффективность и медленную сходимость алгоритма. Средние значения числа Куранта также остаются высокими, подтверждая меньшую устойчивость численной схемы.

При уменьшении времени релаксации до $\tau_{\text{рел}} = 10^{-4}$ с наблюдается перелом тенденции: средние скорости снижаются до $\sim -10^{-3}$ м/с, смещение уменьшается до $\sim 10^{-5}$ м, а количество итераций со-

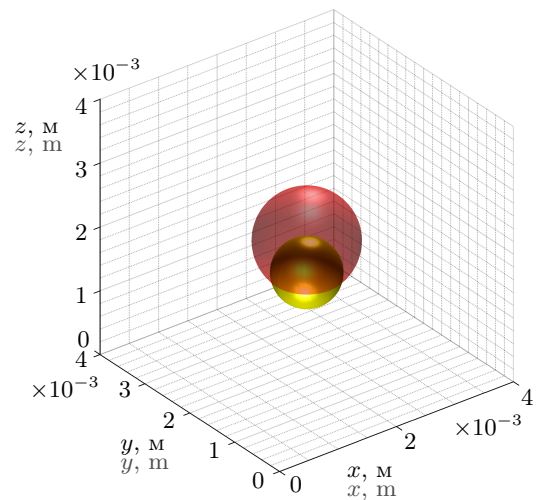


Рис. 3. Визуализация взаимного расположения объемной фракции металла (красный цвет) и объемного источника нагрева (желтый цвет)

Fig. 3. Visualization of the mutual arrangement of the metal volume fraction (red color) and the volumetric heat source (yellow color)

Таблица 2. Результаты верификации серии “Подвешивание” с варьированием времени релаксации $\tau_{\text{рел}}$
Table 2. Results of the “Levitation” calculation series verification with variation of relaxation time $\tau_{\text{рел}}$

№ No.	$\tau_{\text{рел}}, \text{с}$ $\tau_{\text{рел}}, \text{s}$	$\bar{u}_{z,m}, \text{м/с}$ $\bar{u}_{z,m}, \text{m/s}$	$\Delta z_{\text{цм}}, \text{м} (\delta z_{\text{цм}}, \%)$ $\Delta z_{\text{цм}}, \text{m} (\delta z_{\text{цм}}, \%)$	CFL_{max}	CFL_{mean}	Количество итераций Number of iterations
1	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$-9.74 \cdot 10^{-3}$	$9.50 \cdot 10^{-4}$ (12.67)	$4.26 \cdot 10^{-2}$	$4.04 \cdot 10^{-2}$	2000
2	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$-4.98 \cdot 10^{-3}$	$4.85 \cdot 10^{-4}$ (6.47)	$2.16 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	2000
3	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$-1.02 \cdot 10^{-3}$	$9.80 \cdot 10^{-5}$ (1.31)	$9.74 \cdot 10^{-3}$	$4.23 \cdot 10^{-3}$	585
4	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$-5.11 \cdot 10^{-4}$	$4.90 \cdot 10^{-5}$ (0.65)	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$2.07 \cdot 10^{-3}$	555
5	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$-1.03 \cdot 10^{-4}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$ (0.12)	$1.32 \cdot 10^{-3}$	$4.64 \cdot 10^{-4}$	595
6	$5.0 \cdot 10^{-6}$	$-5.18 \cdot 10^{-5}$	$5.0 \cdot 10^{-6}$ (0.07)	$6.24 \cdot 10^{-4}$	$2.97 \cdot 10^{-4}$	590
7	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$-1.05 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$ (0.01)	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$9.34 \cdot 10^{-5}$	1020
8	$5.0 \cdot 10^{-7}$	$-5.28 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$ (0.01)	$1.53 \cdot 10^{-4}$	$4.71 \cdot 10^{-5}$	1030
9	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$-1.08 \cdot 10^{-6}$	0.0 (0.0)	$2.84 \cdot 10^{-4}$	$4.82 \cdot 10^{-5}$	1040

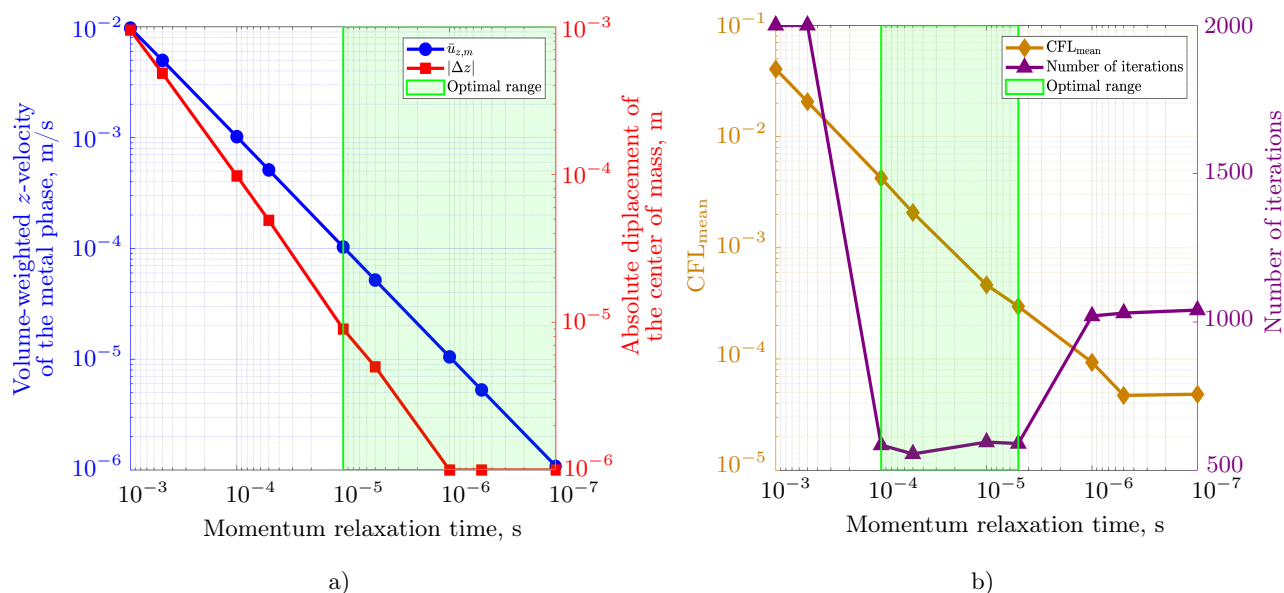


Рис. 4. Влияние величины времени релаксации $\tau_{\text{рел}}$ на: а) объемно-взвешенную z -скорость (синий цвет) и абсолютное смещение центра масс (красный цвет) металлической фазы; б) среднее значение числа CFL_{mean} (оранжевый цвет) и количество итераций на 200 временных шагов (фиолетовый цвет)

Fig. 4. Effect of the relaxation time τ_{rel} on: a) the volume-weighted z -velocity (blue) and the absolute displacement of the center of mass (red) of the metal phase; b) the average CFL_{mean} number (orange) and the number of iterations per 200 time steps (purple)

кращается более чем втрое (до 585). Значения CFL также уменьшаются, что указывает на улучшение устойчивости. При дальнейшем уменьшении до $\tau_{\text{рел}} = 5 \cdot 10^{-5}$ с показатели улучшаются: скорости снижаются до $-5 \cdot 10^{-4}$ м/с, смещение уменьшается до $5 \cdot 10^{-5}$ м, а число итераций стабилизируется на минимальном уровне (555). Таким образом, значения $\tau_{\text{рел}}$ порядка $5 \cdot 10^{-5}$ – 10^{-4} с можно отнести к переходному диапазону, в котором система быстро приближается к оптимальным характеристикам.

Оптимальные результаты достигаются для значений $\tau_{\text{рел}}$ порядка $5 \cdot 10^{-6}$ – 10^{-5} с. В этом диапазоне средние скорости составляют $\sim -10^{-4}$ м/с, смещение центра масс не превышает 10^{-5} м, а значения среднего CFL_{mean} остаются ниже 10^{-3} . Количество итераций умеренное (590–595), что обеспечивает баланс между высокой точностью, устойчивостью и эффективностью алгоритма.

Дальнейшее уменьшение $\tau_{\text{рел}}$ до 10^{-7} – 10^{-6} с приводит лишь к незначительному дополнительному снижению скоростей и смещений, но сопровождается ростом вычислительных затрат: количество итераций возрастает почти вдвое (до ~ 1000). Это свидетельствует об излишней жесткости задачи и снижении эффективности без существенного выигрыша в точности.

Таблица 3. Результаты верификации серии “Подвешивание” с варьированием показателя фазовой чувствительности α

Table 3. Results of the “Levitation” calculation series verification with variation of the phase sensitivity exponent α

№ No.	α	$\bar{u}_{z,M}$, м/с $\bar{u}_{z,M}$, m/s	$\Delta z_{\text{цм}}$, м ($\delta z_{\text{цм}}$, %) $\Delta z_{\text{цм}}$, m ($\delta z_{\text{цм}}$, %)	CFL_{max}	CFL_{mean}	Количество итераций Number of iterations
10	0.25	$-9.96 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$ (0.13)	$1.19 \cdot 10^{-3}$	$4.51 \cdot 10^{-4}$	560
11	0.5	$-1.01 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$ (0.13)	$1.20 \cdot 10^{-3}$	$4.83 \cdot 10^{-4}$	560
12	0.67	$-1.02 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$ (0.13)	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$5.06 \cdot 10^{-4}$	565
5	1.0	$-1.03 \cdot 10^{-4}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$ (0.12)	$1.32 \cdot 10^{-3}$	$4.64 \cdot 10^{-4}$	595
13	1.5	$-1.05 \cdot 10^{-4}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$ (0.12)	$7.13 \cdot 10^{-4}$	$4.47 \cdot 10^{-4}$	550
14	2.0	$-1.06 \cdot 10^{-4}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$ (0.12)	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$5.01 \cdot 10^{-4}$	580
15	4.0	$-1.11 \cdot 10^{-4}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$ (0.12)	$9.65 \cdot 10^{-4}$	$4.89 \cdot 10^{-4}$	550

Результаты вычислительных экспериментов 1–9 позволили выделить для $\tau_{\text{рел}}$ диапазон оптимальных значений $[5 \cdot 10^{-6}, 10^{-5}]$ с, обеспечивающих минимальное смещение центра масс, подавление скоростей и устойчивую сходимость при малых вычислительных затратах.

Результаты варьирования показателя фазовой чувствительности α при фиксированном $\tau_{\text{рел}} = 10^{-5}$ с представлены в табл. 3.

При малых значениях α в диапазоне 0.25–0.5 система демонстрирует наилучшие показатели точности: средние скорости находятся на уровне $\sim 10^{-4}$ м/с, смещения центра масс не превышают 10^{-5} м, а количество итераций минимально (560). Число Куранта ($4.5 \cdot 10^{-4}$ – $4.8 \cdot 10^{-4}$) остается в допустимой зоне, что подтверждает высокую устойчивость. Визуализации распределений z -скорости в zx -сечении (рис. 5 а, б)

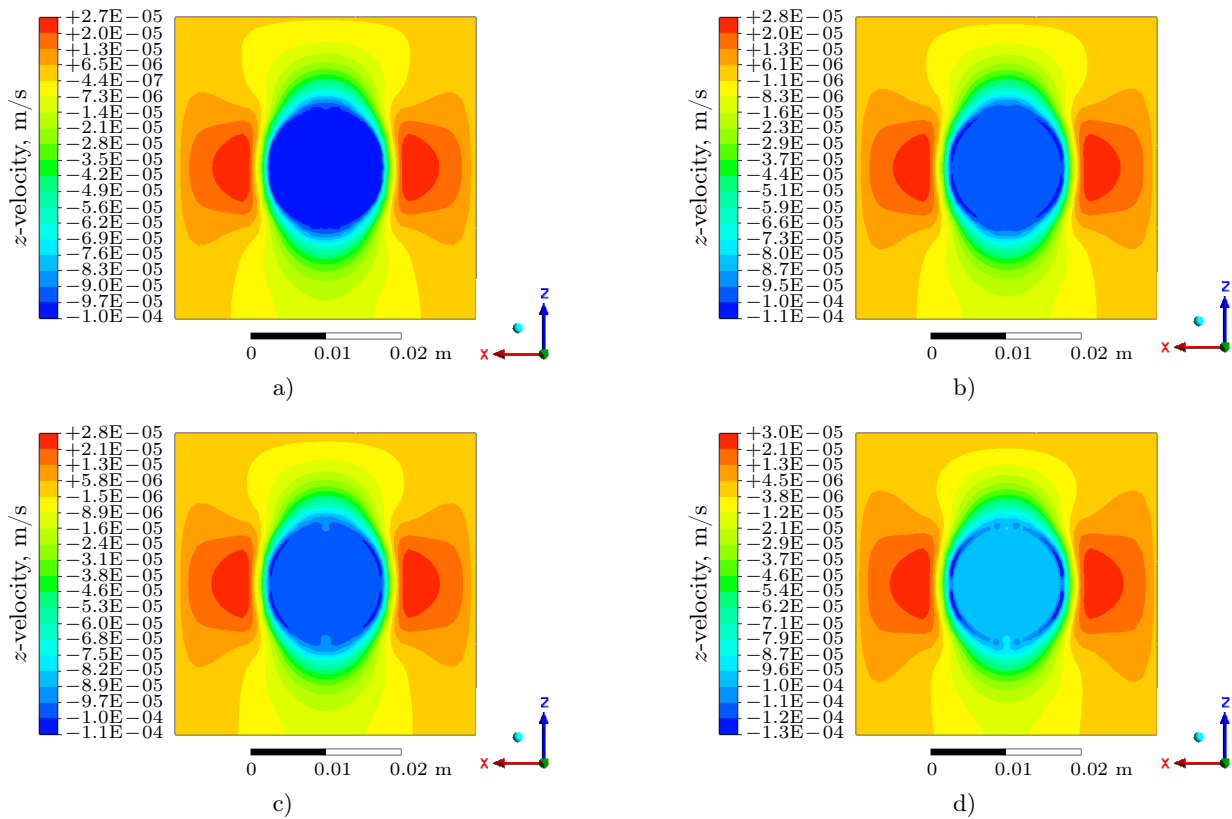


Рис. 5. Распределение z -компоненты скорости в zx -сечении расчетной области для различных значений α :

a) $\alpha = 0.25$; b) $\alpha = 0.5$; c) $\alpha = 0.67$; d) $\alpha = 1.5$

Fig. 5. Distribution of the z -velocity component in the zx -plane of the computational domain for different values of α :

a) $\alpha = 0.25$; b) $\alpha = 0.5$; c) $\alpha = 0.67$; d) $\alpha = 1.5$

показывают однородное течение с плавными градиентами и низкой контрастностью, что соответствует эффективному торможению без дополнительных возмущений. Максимальные значения скорости при этом не превышают $3 \cdot 10^{-5}$ м/с.

При значениях α в переходном диапазоне 0.67–1.0 наблюдается постепенное усиление динамики: средние скорости возрастают до $-1.03 \cdot 10^{-4}$ м/с, при этом смещения центра масс снижаются до $9 \cdot 10^{-6}$ м. Количество итераций достигает максимума (595 при $\alpha = 1.0$), что указывает на возросшую сложность численного решения. На визуализации (рис. 5с) формируются пространственные структуры с локализованными зонами повышенной скорости (до $5 \cdot 10^{-5}$ м/с). Таким образом, диапазон значений α 0.67–1.0 можно рассматривать как переходный диапазон от оптимального режима к более активной динамике.

При больших значениях α , находящихся в диапазоне 1.5–4.0, фиксируется дальнейший рост скоростей (до $-1.11 \cdot 10^{-4}$ м/с) при сохранении смещений на уровне $9 \cdot 10^{-6}$ м. Количество итераций снижается (550–580), однако визуализация (рис. 5d) демонстрируют появление резких градиентов и локализованных зон течения со скоростями до $1.5 \cdot 10^{-4}$ м/с, что отражает нелинейный отклик системы. Несмотря на сохранение устойчивости по CFL, эффективность торможения в этом диапазоне заметно ниже.

Таким образом, показатель фазовой чувствительности α оказывает выраженное влияние на пространственную структуру течения и эффективность источника торможения. Малые значения α в диапазоне 0.25–0.5 обеспечивают оптимальное сочетание минимальных скоростей, однородности распределений и устойчивости, тогда как большие значения α в диапазоне 1.5–4.0 сопровождаются усилением динамики и снижением эффективности подавления движения.

В отличие от времени релаксации $\tau_{\text{рел}}$, определяющего фундаментальные характеристики устойчивости и сходимости, показатель α играет вспомогательную роль. Его варьирование позволяет уточнить локализацию источника и выбрать режим, обеспечивающий дополнительное подавление движения без ущерба для численной стабильности.

5.2. Серия “Поступательное движение”. Результаты проверки корректности источника вынужденного поступательного движения представлены в табл. 4.

Для визуальной оценки пространственного распределения скоростей выполнен анализ полей течения в zx -сечении (рис. 6). Из распределения видно, что поле скорости сохраняет однородный характер по всему объему жидкой фазы, без признаков неустойчивости и локальных возмущений.

Средняя объемно-взвешенная z -компонента скорости металлической фазы демонстрирует высокую согласованность с целевым значением: в первом расчете отклонение не превышает $\sim 1\%$, а во втором достигается полное совпадение. Это подтверждает корректность реализации источника вынужденного движения и устойчивость его функционирования при различных значениях параметра $\tau_{\text{рел}}$.

Величина смещения центра масс $\Delta z_{\text{цм}}$ за время моделирования 0.1 с совпадает для обоих расчетов и соответствует ожидаемому при заданной поступательной скорости, что подтверждает согласованность динамики металлической фазы с внешним воздействием. Численные параметры решения также сохраняют стабильность: максимальные значения CFL_{max} не превышают $5 \cdot 10^{-2}$, а средние CFL_{mean} составляют порядка $4 \cdot 10^{-2}$. Количество итераций на 100 временных шагов близко к

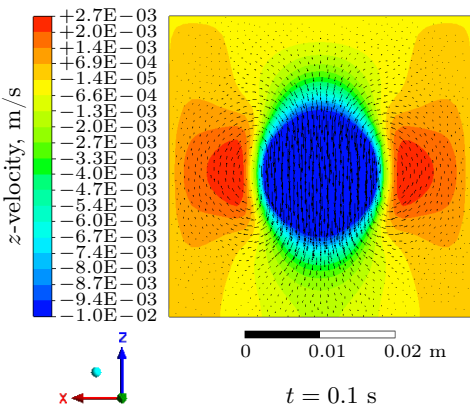


Рис. 6. Распределение z -скорости в zx -сечении расчетной области в момент времени 0.1 с
Fig. 6. Distribution of z -velocity in the zx -plane of the computational domain at time 0.1 s

Таблица 4. Результаты верификации источника вынужденного поступательного движения

Table 4. Results of the forced translational motion source verification

№ No.	$\tau_{\text{рел}}$, с $\tau_{\text{рел}}$, s	α	$\bar{u}_{z,\text{м}}$, м/с $\bar{u}_{z,\text{м}}$, m/s	$\Delta z_{\text{цм}}$, м $\Delta z_{\text{цм}}$, m	CFL_{max}	CFL_{mean}	Количество итераций Number of iterations
16	$1.0 \cdot 10^{-5}$	0.25	$-1.01 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$4.59 \cdot 10^{-2}$	$4.22 \cdot 10^{-2}$	1980
17	$5.0 \cdot 10^{-6}$	0.25	$-1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$4.53 \cdot 10^{-2}$	$4.20 \cdot 10^{-2}$	1980

Таблица 5. Результаты верификации источника вращательного движения

Table 5. Results of the forced rotational motion source verification

№ No.	$\tau_{\text{рел}}, \text{с}$ $\tau_{\text{рел}}, \text{s}$	α	$\bar{u}_{z,\text{м}}, \text{м/с}$ $\bar{u}_{z,\text{м}}, \text{m/s}$	$\Delta z_{\text{цм}}, \text{м}$ $\Delta z_{\text{цм}}, \text{m}$	CFL_{max}	CFL_{mean}	Количество итераций Number of iterations
18	$-1.0 \cdot 10^{-5}$	0.25	$-9.86 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$4.91 \cdot 10^{-2}$	$4.85 \cdot 10^{-2}$	865
19	$-5.0 \cdot 10^{-6}$	0.25	$-4.93 \cdot 10^{-5}$	$5.0 \cdot 10^{-6}$	$4.94 \cdot 10^{-2}$	$4.85 \cdot 10^{-2}$	830

верхней границе диапазона, что указывает на повышенную жесткость системы уравнений и возможную необходимость уменьшения шага по времени при переходе к более сложным нестационарным режимам.

5.3. Серия “Вращательное движение”. Результаты проверки корректности работы источника вынужденного вращательного движения в условиях подвеса представлены в табл. 5.

Распределение y -компоненты скорости в zx -сечении расчетной области (рис. 7) показывает формирование устойчивого вращательного течения без признаков неустойчивости или паразитных выбросов скорости. Распределение y -компоненты скорости вдоль оси x в пределах металлической фазы демонстрирует практически полное совпадение с аналитическим решением. Средняя абсолютная ошибка не превышает $3.7 \cdot 10^{-5}$ м/с, а корреляция между численным и теоретическим профилями близка к единице, что подтверждает корректность реализации вращательного источника.

Динамика изменения характеристик решения $\bar{u}_{z,\text{м}}$ и $\Delta z_{\text{цм}}$ согласуется с результатами вычислительных экспериментов 5 и 6 (см. табл. 2).

Максимальные числа Куранта не превышают 0.05, а средние значения составляют ≈ 0.048 , обеспечивая устойчивость течения на всем временном интервале. Количество итераций до сходимости изменяется незначительно (830–865).

5.4. Серия “Локальное плавление подвижного тела”. Результаты проверки корректности воспроизведения процесса локального плавления в условиях вынужденного движения представлены в табл. 6. Средняя объемно-взвешенная скорость по оси z и абсолютное смещение центра масс рассчитаны на ранней стадии процесса, в момент времени $t = 0.1$ с, когда плавление еще не началось и геометрия тела сохраняет исходный вид, что позволило количественно оценить воспроизведение заданных условий вынужденного движения. Остальные параметры усреднены по всему времени расчета.

При заданной поступательной z -скорости 10^{-3} м/с смещение центра масс за 0.1 с составляет 10^{-3} м. Расчетные значения $\bar{u}_{z,\text{м}}$ и $\Delta z_{\text{цм}}$ воспроизводят эти величины с отклонением менее 1 % по скорости и менее 0.6 % по смещению, что подтверждает корректную реализацию механизма вынужденного движения и высокую кинематическую точность модели.

На последующих этапах, после достижения температуры ликвидуса (≈ 1673 K), наблюдается начало каплеобразования (рис. 8). В момент $t = 0.18$ с (рис. 8 а, б) фиксируется формирование первичной зоны расплава при максимальной температуре около 1765 K. Векторы скорости показывают, что нерасплавленная часть тела продолжает движение согласно заданным поступательной и вращательной скоростям,

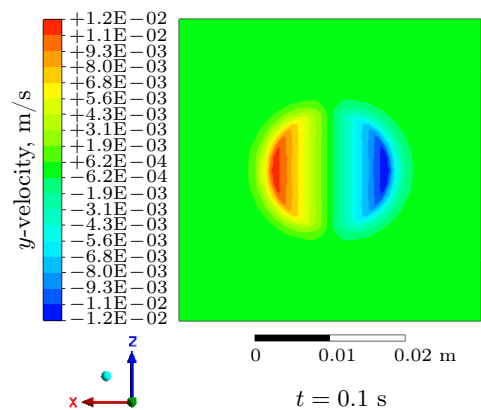


Рис. 7. Распределение y -скорости в zx -сечении расчетной области в момент времени 0.1 с

Fig. 7. Distribution of y -velocity in the zx -plane of the computational domain at time 0.1 s

Таблица 6. Результаты верификации локального плавления подвижного тела

Table 6. Results of the local melting verification for a moving body

№ No.	$\bar{u}_{z,\text{м}}, \text{м/с} (t = 0.1 \text{ с})$ $\bar{u}_{z,\text{м}}, \text{m/s} (t = 0.1 \text{ s})$	$\Delta z_{\text{цм}}, \text{м} (t = 0.1 \text{ с})$ $\Delta z_{\text{цм}}, \text{m} (t = 0.1 \text{ s})$	CFL_{max}	CFL_{mean}	Количество итераций Number of iterations
20	$9.95 \cdot 10^{-3}$	$9.90 \cdot 10^{-4}$	$4.51 \cdot 10^{-1}$	$1.18 \cdot 10^{-1}$	6285 из 10000
21	$9.95 \cdot 10^{-3}$	$9.94 \cdot 10^{-4}$	$3.30 \cdot 10^{-1}$	$1.27 \cdot 10^{-1}$	8145 из 10000

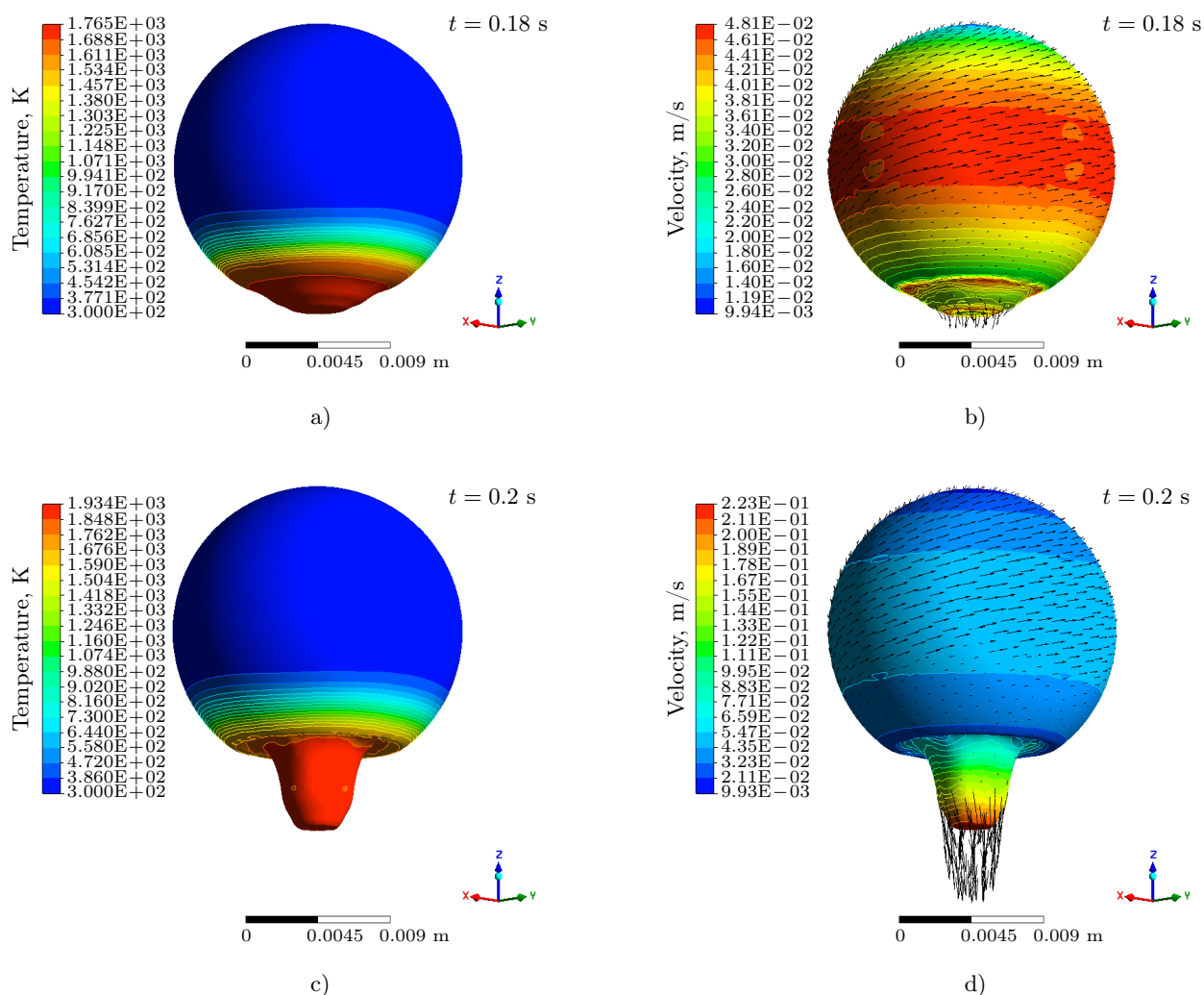


Рис. 8. Распределение полей температуры и скорости на изоконтуре металлической фазы в процессе локального плавления (без учета поверхностного натяжения) в моменты времени: а), б) $t = 0.18$ с; в), г) $t = 0.2$ с

Fig. 8. Distribution of temperature and velocity fields on the isocontour of the metal phase during local melting (without surface tension) at time instants: а), б) $t = 0.18$ s; в), г) $t = 0.2$ s

тогда как жидкая фаза начинает стекать вниз под действием гравитации (рис. 8 б). К моменту $t = 0.20$ с (рис. 8 в, г) зона расплава существенно расширяется, температура достигает 1934 К, а в нижней части тела формируются направленные вниз потоки с максимальной скоростью порядка $2.2 \cdot 10^{-1}$ м/с, что отражает ускоренное стекание материала при отсутствии стабилизирующего влияния поверхностного натяжения, проявляющегося также в характерной угловатой форме жидкой области.

Анализ результатов моделирования с учетом сил поверхностного натяжения (рис. 9) свидетельствует о качественном изменении динамики процесса локального плавления. В отличие от предыдущего случая, к моменту времени $t = 0.20$ с процесса отделения капли не наблюдается: жидкая зона сохраняет сглаженные очертания и демонстрирует устойчивость формы под действием капиллярных сил. Максимальная температура достигает 1909 К (рис. 9 а), что несколько ниже, чем в расчете без учета поверхностного натяжения — 1934 К (рис. 8 в). Снижение максимальной температуры обусловлено перераспределением теплового потока под действием термокапиллярных течений (эффекта Марангони), возникающих вследствие температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения [14]. В нижней части сферы проявляется выраженная неоднородность поля скоростей (рис. 9 б), связанная с формированием жидкой зоны расплава.

Учет силы поверхностного натяжения приводит к увеличению числа итераций (≈ 30 %) за счет усложнения структуры течений и усиления нелинейных эффектов, связанных с капиллярными и термо-

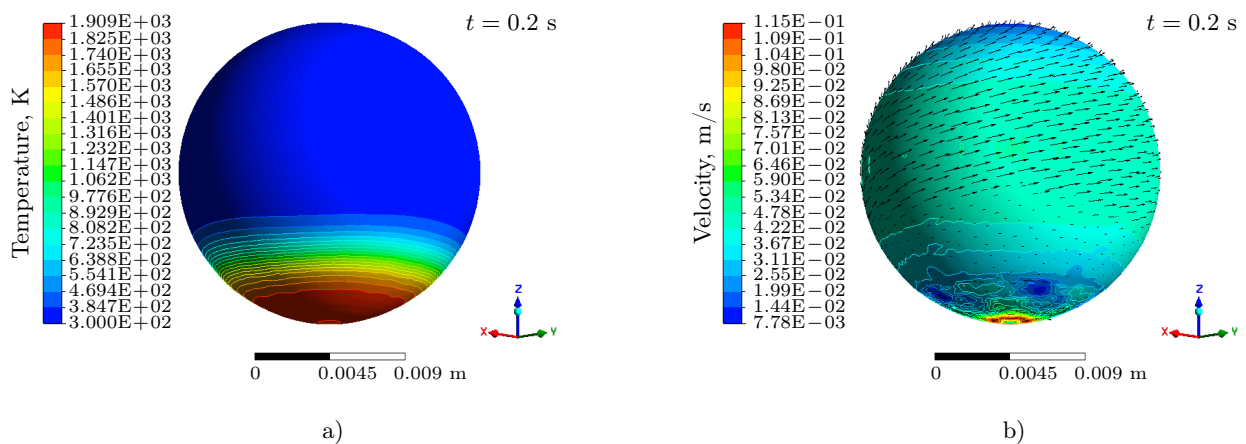


Рис. 9. Распределение по изоконтур металлической фазы в процессе плавления (с учетом поверхностного натяжения) в момент времени $t = 0.2$ с: а) температуры; б) скорости

Fig. 9. Distribution of the metallic phase along the isocontour during the melting process (with surface tension) at time $t = 0.2$ s: a) temperature; b) velocity

капиллярными силами, тогда как значения чисел Куранта остаются сопоставимыми, подтверждая устойчивость пространственно-временной аппроксимации.

6. Заключение. Разработана и реализована мультифизическая математическая модель, предназначенная для описания процессов локального плавления в условиях вынужденного движения с учетом сил тяжести и поверхностного натяжения. В основу модели положено сопряженное решение уравнений теплопереноса с использованием температурозависимых и эффективных свойств для корректного описания фазового перехода “твёрдое–жидкое”.

Введен модифицированный источник релаксационного ускорения, позволяющий задавать целевые поступательные и вращательные скорости тела с плавным затуханием действия в зоне фазового перехода. Температурно- и фазозависимые множители обеспечивают пространственную локализацию источника вблизи межфазной границы, что способствует корректному воспроизведению кинематики расплава при сохранении численной устойчивости решения.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили физическую достоверность и эффективность предложенного подхода. Реализация модели в среде ANSYS Fluent с использованием самописной пользовательской функции продемонстрировала ее универсальность и применимость к задачам с подвижными и деформируемыми границами.

Достигнутые результаты подтверждают возможность использования предложенной модели для анализа и оптимизации процессов локального нагрева и плавления, характерных для индукционных, лазерных и гибридных технологий обработки материалов. Разработанная методология создает основу для дальнейших исследований, направленных на анализ сетконеzáвисимости результатов моделирования и их экспериментальную валидацию.

Приложение 1

Пользовательская функция для источника торможения и вынужденного движения

Пользовательская функция `brake_force_source` для ANSYS Fluent реализует модель источника торможения и вынужденного движения (представленная версия — вдоль/вокруг оси z) для задач локального плавления статичных и подвижных сплошных тел. Функция подключается как объемный источник импульса отдельно для каждого направления (X-momentum, Y-momentum, Z-momentum) в настройках (Fluent Setup / Cell Zone Conditions / Fluid / Source Terms).

Разработка и тестирование кода на языке C проводились в среде ANSYS Fluent 2023 R1 с использованием компилятора Microsoft Visual Studio 2022. Программа зарегистрирована в Российской Федерации в качестве программы для ЭВМ (свидетельство №2025689983, дата регистрации 01.11.2025).

Листинг 1. Реализация пользовательской функции `brake_force_source`Listing 1. Implementation of a user-defined function `brake_force_source`

```

1  #include "udf.h"
2  #include "stdbool.h"
3  #include "sg.h"
4  #include "sg_mphase.h"
5  #include "metric.h"
6  #include "mem.h"
7  #include "math.h"
8
9  // Forced motion parameters
10 #define vz0 0.01 // [m/s] - prescribed translational velocity along z-axis
11 #define rot 1.0 // [turnover/s] - prescribed rotation frequency around z-axis
12 // Phase change parameters
13 #define Tso1 1649 // [K] solidus temperature
14 #define Tliq 1673 // [K] liquidus temperature
15 // Motion source parameters
16 #define tau_rel 5.0e-06 // [s] - momentum relaxation time
17 #define dampingPower 0.25 // [-] - phase sensitivity exponent
18
19 #define eps 1.0e-12 // [m] - small value to avoid division by zero
20
21 /** Common source term for braking and forced motion */
22 DEFINE_SOURCE(brake_force_source, c, t, dS, eqn) {
23     Thread* sft; // pointer to secondary phase (metal)
24     sft = THREAD_SUB_THREAD(t, 1); // secondary phase thread
25     // Thermophysical fields
26     const real T = C_T(c, t); // [K] - temperature
27     const real rho = C_R(c, t); // [kg/m^3] - density
28     const real VF2 = C_VOF(c, sft); // [-] - metal phase volume fraction
29     // Velocity components
30     const real U = C_U(c, t); // [m/s] - x-velocity component
31     const real V = C_V(c, t); // [m/s] - y-velocity component
32     const real W = C_W(c, t); // [m/s] - z-velocity component
33     // Cell center coordinates
34     real XYZ[ND_ND];
35     C_CENTROID(XYZ, c, t);
36     real X = XYZ[0], Y = XYZ[1], Z = XYZ[2]; // [m]
37     // Target and current velocity initialization
38     real v0 = 0.0; // [m/s] - target velocity
39     real v_current = 0.0; // [m/s] - current velocity
40     // Velocity multiplier initialization
41     real velocity_multiplier = 0.0; // [kg/(m^3*s)] - velocity multiplier

```



```

1 // Rotational motion parameters
2 const real omega = 2 * M_PI * rot; // [rad/s] - angular velocity
3 const real R = sqrt(X*X + Y*Y); // [m] - radial distance
4 const real R_safe = R + eps * exp(-R / eps); // [m] - smoothed radius
5 // Automatic velocity component selection
6 switch (eqn) {
7 case 2: // X-component
8     v_current = U; // current x-velocity
9     v0 = -omega * R * (Y / R_safe); // target tangential x-velocity
10    break;
11 case 3: // Y-component
12     v_current = V; // current y-velocity
13     v0 = omega * R * (X / R_safe); // target tangential y-velocity
14    break;
15 case 4: // Z-component
16     v_current = W; // current z-velocity
17     v0 = vz0; // target vertical velocity
18    break;
19 }
20 // Melting factor - exact erf-based phase indicator
21 const real Tm = (Tsol + Tliq) / 2.0; // [K] - mean melting temperature
22 const real sigma = (Tliq - Tsol) / 6.0; // [K] transition width
23 const real liquid_fraction = 0.5 * (1.0 + erf((T - Tm) / sigma));
24 const real melt_factor = 1.0 - liquid_fraction; // [-]
25 // Phase factor - localization in metal phase
26 const real VF2_clamped = fmin(fmax(VF2, 0.0), 1.0); // vf clamping
27 const real phase_factor = pow(VF2_clamped, dampingPower); // [-]
28 // Damping coefficient calculation
29 if (tau_rel > 0) {
30     velocity_multiplier = -rho / tau_rel * melt_factor * phase_factor;
31 }
32 else {
33     velocity_multiplier = 0.0; // zero multiplier when no relaxation
34 }
35 // Source derivative with respect to variable (for linearization)
36 dS[eqn] = velocity_multiplier; // [kg/(m^3*s)]
37 // Return source value
38 return velocity_multiplier * (v_current - v0); // [kg/(m^2*s^2)] = [N/m^3]
39 }

```

Список литературы

1. Трусов П.В. Введение в математическое моделирование. М.: Логос, 2007.
2. Chen D., Li G., Wang P., Zeng Zh., Tang Yu. Numerical simulation of melt pool size and flow evolution for laser powder bed fusion of powder grade Ti6Al4V // Finite Elements in Analysis and Design. 2023. **223**. Article Number 103971. doi 10.1016/j.finel.2023.103971.
3. Liu M., Liu Zh., Li B., Qi F., Peng W. Numerical simulation on melt pool and solidification in the direct energy deposition process of GH3536 powder superalloy // Journal of Materials Research and Technology. 2023. **26**. 5626–5637. doi 10.1016/j.jmrt.2023.08.252.
4. Chu J., Wang Xi., Ma Y., Liu H. Numerical simulation of melt pool formation in laser transmission joining PET with microtextured surface pretreated SUS304 stainless steel // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2023. **216**. Article Number 124560. doi 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124560.
5. Xiang H., Chen J. Integrated simulation framework for metal additive manufacturing: Powder deposition, melt pool dynamics and microstructure evolution with example of Ti-6Al-4V // Materials Today Communications. 2025. **47**. Article Number 113206. doi 10.1016/j.mtcomm.2025.113206.

6. Sharma S., Mandal V., Ramakrishna S.A., Ramkumar J. Numerical simulation of melt pool oscillations and protuberance in pulsed laser micro melting of SS304 for surface texturing applications // Journal of Manufacturing Processes. 2019. **39**. 282–294. doi 10.1016/j.jmapro.2019.02.022.
7. Spitans S., Franz H., Sehring B., Bogner S. EIGA-type electrode melting for highest-purity cast parts // Magnetohydrodynamics. 2023. **59**, № 3/4. 347–355. doi 10.22364/mhd.59.3-4.7.
8. Никифоров С.А., Шварц И.В., Рубля Р.С., Мельников А.С., Горунев А.И., Гильмутдинов А.Х. Многофазная трехмерная модель лазерного точечного нагрева и плавления стали AISI 316L в ультразвуковом поле // Инженерный журнал: наука и инновации. 2024. **7**, № 151. <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogofaznaya-trehmernaya-model-lazernogo-tochechnogo-nagreva-i-plavleniya-stali-aisi-316l-v-ultrazvukovom-pole>. (Дата обращения: 6 декабря 2025 г.).
9. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics. 1981. **39**, № 1. 201–225. doi 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
10. Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. 1992. **100**, № 2. 335–354. doi 10.1016/0021-9991(92)90240-Y.
11. Никифоров С.А., Шварц И.В., Горунев А.И., Гильмутдинов А.Х. Исследование влияния ультразвуковых колебаний на структуру течений в жидком металле и форму ванны расплава нержавеющей стали AISI 316L // Инженерный журнал: наука и инновации. 2024. **7**, № 155. <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogofaznaya-trehmernaya-model-lazernogo-tochechnogo-nagreva-i-plavleniya-stali-aisi-316l-v-ultrazvukovom-pole>. (Дата обращения: 6 декабря 2025 г.).
12. Proell S.D., Wall W.A., Meier Ch. On phase change and latent heat models in metal additive manufacturing process simulation // Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences. 2020. **7**, 24. doi 10.1186/s40323-020-00158-1.
13. Reichl Ch., Both S., Mascherbauer Ph., Emhofer J. Comparison of Two CFD Approaches Using Constant and Temperature Dependent Heat Capacities during the Phase Transition in PCMs with Experimental and Analytical Results // Processes. 2022. **10**, 302. doi 10.3390/pr10020302.
14. Никифоров С.А., Шварц И.В., Гильмутдинов А.Х., Горунев А.И. Исследование формы ванны расплава при лазерном воздействии на сталь AISI 316L с учетом конвекции Марангони // Инженерный журнал: наука и инновации. 2023. **2**, № 134. <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-formy-vanny-rasplava-pri-lazernom-vozdeystvii-na-stal-aisi-316l-s-uchetom-konveksii-marangoni>. (Дата обращения: 6 декабря 2025 г.).

Получена
11 ноября 2025 г.

Принята
2 декабря 2025 г.

Опубликована
12 декабря 2025 г.

Информация об авторах

Рубля Ратмир Сергеевич — старший преподаватель; Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КАИ), кафедра лазерных и аддитивных технологий, ул. Карла Маркса, 10, 420111, Казань, Российская Федерация.

Сергей Александрович Никифоров — старший преподаватель; Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КАИ), кафедра лазерных и аддитивных технологий, ул. Карла Маркса, 10, 420111, Казань, Российская Федерация.

Иван Валерьевич Шварц — старший преподаватель; Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КАИ), кафедра лазерных и аддитивных технологий, ул. Карла Маркса, 10, 420111, Казань, Российская Федерация.

Альберт Харисович Гильмутдинов — д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой; Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КАИ), кафедра лазерных и аддитивных технологий, ул. Карла Маркса, 10, 420111, Казань, Российская Федерация.



References

1. P. V. Trusov, *Introduction to Mathematical Modeling* (Logos, Moscow, 2007) [in Russian].
2. D. Chen, G. Li, P. Wang, Zh. Zeng, Yu. Tang, “Numerical simulation of melt pool size and flow evolution for laser powder bed fusion of powder grade Ti6Al4V,” *Finite Elements in Analysis and Design* **223**, Article Number 103971 (2023). doi [10.1016/j.finel.2023.103971](https://doi.org/10.1016/j.finel.2023.103971).
3. M. Liu, Zh. Liu, B. Li, F. Qi, W. Peng, “Numerical simulation on melt pool and solidification in the direct energy deposition process of GH3536 powder superalloy,” *Journal of Materials Research and Technology*, **26**, 5626–5637 (2023). doi [10.1016/j.jmrt.2023.08.252](https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.08.252).
4. J. Chu, Xi. Wang, Y. Ma, H. Liu, “Numerical simulation of melt pool formation in laser transmission joining PET with microtextured surface pretreated SUS304 stainless steel,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **216**, Article Number 124560 (2023). doi [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124560](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124560).
5. H. Xiang, J. Chen, “Integrated simulation framework for metal additive manufacturing: Powder deposition, melt pool dynamics and microstructure evolution with example of Ti-6Al-4V,” *Materials Today Communications*, **47**, Article Number 113206 (2025). doi [10.1016/j.mtcomm.2025.113206](https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2025.113206).
6. S. Sharma, V. Mandal, S. A. Ramakrishna, J. Ramkumar, “Numerical simulation of melt pool oscillations and protuberance in pulsed laser micro melting of SS304 for surface texturing applications,” *Journal of Manufacturing Processes*, **39**, 282–294 (2019). doi [10.1016/j.jmapro.2019.02.022](https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2019.02.022).
7. S. Spitans, H. Franz, B. Sehring, S. Bogner, “EIGA-type electrode melting for highest-purity cast parts,” *Magneto-hydrodynamics*, **59** (3/4), 347–355 (2023). doi [10.22364/mhd.59.3-4.7](https://doi.org/10.22364/mhd.59.3-4.7).
8. S. A. Nikiforov, I. V. Shvarts, R. S. Rublia, A. S. Melnikov, A. I. Gorunov, A. Kh. Gilmutdinov, “Multiphase three-dimensional model of the AISI 316L steel laser point heating and melting in the ultrasonic field,” *Engineering Journal: Science and Innovation*, **7** (151) (2024). doi [10.18698/2308-6033-2024-7-2369](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2024-7-2369).
9. C. W. Hirt, B. D. Nichols, “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries,” *Journal of Computational Physics*, **39** (1), 201–225 (1981). doi [10.1016/0021-9991\(81\)90145-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5).
10. J. U. Brackbill, D. B. Kothe, C. Zemach, “A continuum method for modeling surface tension,” *Journal of Computational Physics*, **100** (2), 335–354 (1992). doi [10.1016/0021-9991\(92\)90240-Y](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90240-Y).
11. S. A. Nikiforov, I. V. Shvarts, A. I. Gorunov, A. Kh. Gilmutdinov, “Study of the of ultrasound vibrations influence on the liquid metal flow structure and shape of the AISI 316L stainless steel melt pool,” *Engineering Journal: Science and Innovation*, **11** (155) (2024). doi [10.18698/2308-6033-2024-11-2398](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2024-11-2398).
12. S. D. Proell, W. A. Wall, Ch. Meier, “On phase change and latent heat models in metal additive manufacturing process simulation,” *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, **7**, 24 (2020). doi [10.1186/s40323-020-00158-1](https://doi.org/10.1186/s40323-020-00158-1).
13. Ch. Reichl, S. Both, Ph. Mascherbauer, J. Emhofer, “Comparison of Two CFD Approaches Using Constant and Temperature Dependent Heat Capacities during the Phase Transition in PCMs with Experimental and Analytical Results,” *Processes*, **10**, 302 (2022). doi [10.3390/pr10020302](https://doi.org/10.3390/pr10020302).
14. S. A. Nikiforov, I. V. Shvarts, A. Kh. Gilmutdinov, A. I. Gorunov, “Study of the melt pool shape under laser treatment of AISI 316L steel taking into account Marangoni convection effect,” *Engineering Journal: Science and Innovation*, **2**, 134 (2023). doi [10.18698/2308-6033-2023-2-2248](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-2-2248).

Received
November 11, 2025

Accepted
December 2, 2025

Published
December 12, 2025

Information about the authors

Ratmir S. Rublia — Assistant Professor; Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (KAI), Department of Laser and Additive Technologies, Karl Marx ulitsa, 10, 420111, Kazan, Russia.

Sergei A. Nikiforov — Assistant Professor; Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (KAI), Department of Laser and Additive Technologies, Karl Marx ulitsa, 10, 420111, Kazan, Russia.

Ivan V. Shvarts — Assistant Professor; Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (KAI), Department of Laser and Additive Technologies, Karl Marx ulitsa, 10, 420111, Kazan, Russia.

Albert Kh. Gilmutdinov — Dr. Sci., Professor, Head of the Department; Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (KAI), Department of Laser and Additive Technologies, Karl Marx ulitsa, 10, 420111, Kazan, Russia.