2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

doi 10.26089/NumMet.v27r106

УДК 519.63;
533.6

Адаптация сеток методом октодерева для моделирования сверхзвукового обтекания летательных аппаратов и расчета концевого вихря

А. Е. Луцкий
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-4442-0571, e-mail: allutsky@yandex.ru

А. В. Северин
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша (ИПМ РАН),
Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-6279-1002, e-mail: alsewerin@yandex.ru

Аннотация: Представлены решения задач сверхзвукового обтекания экспериментального летательного аппарата X-43 и моделирования концевого вихря на крыле с применением оригинального типа адаптивных сеток, использующих принцип октодерева и нерегулярную базовую сетку. В отличие от традиционных адаптивных декартовых сеток, ячейки базовой сетки здесь могут иметь форму не только куба и параллелепипеда, а произвольного косоугольного шестигранника и могут быть соединены любым способом. Это позволяет учесть геометрию и известные особенности решения еще в базовой сетке и использовать адаптацию только для заранее неизвестных особенностей решения. При той же точности размер сетки получается значительно меньше, чем при традиционном подходе. Средства работы с сеткой реализованы в виде независимой от аэродинамической части программы библиотеки функций, использующих MPI.

Ключевые слова: адаптивные сетки, октодерево, декартовы сетки, вихревые течения.

Для цитирования: Луцкий А.Е., Северин А.В. Адаптация сеток методом октодерева для моделирования сверхзвукового обтекания летательных аппаратов и расчета концевого вихря // Вычислительные методы и программирование. 2026. **27**, № 1. 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106.

Adaptation of octree meshes for modeling supersonic airfoils and calculating tip vortex

Aleksandr E. Lutsky
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-4442-0571, e-mail: allutsky@yandex.ru

Aleksandr V. Severin
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0001-6279-1002, e-mail: alsewerin@yandex.ru

Abstract: Solutions to problems of supersonic flow around the X-43 experimental aircraft and wingtip vortex modeling are presented using a unique adaptive mesh design based on the octree principle and an irregular base mesh. Unlike traditional adaptive Cartesian meshes, the base mesh cells can be shaped not only as cubes and parallelopipeds, but also as arbitrary oblique hexagons and can be connected in any way. This allows the geometry and known features of the solution to be taken

© А. Е. Луцкий, А. В. Северин

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

into account in the base mesh, while adaptation is used only for unknown features. While maintaining the same accuracy, the mesh size is significantly smaller than with the traditional approach. The mesh manipulation tools are implemented as a library of functions using MPI, independent of the aerodynamics portion of the program.

Keywords: adaptive grids, octree, Cartesian grids, eddy flows.

For citation: A. E. Lutsky, A. V. Severin, "Adaptation of octree meshes for modeling supersonic airfoils and calculating tip vortex," Numerical Methods and Programming. **27** (1), 80–89 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r106.

1. Введение. Принцип квадродерева как способ разбиения двумерного пространства и хранения данных был сформулирован Р. Финкелем и Дж. Л. Бентли в 1974 г. [1]. Трехмерным обобщением квадродерева является октодерево. С тех пор адаптация сетки путем разбиения ячейки на 4 или 8 частей широко применяется при решении задач математической физики. Основными направлениями развития метода октодерева являются оптимизация структуры данных с целью ускорения вычислений [2, 3] и разработка новых алгоритмов адаптации геометрии. Уже в 90-е гг. XX в. появились алгоритмы, использующие октодерево для адаптации геометрии счетной области и особенностей решения в аэродинамике [4]. Такая адаптация позволяет автоматически построить сетку для любой геометрии, учесть как заранее известные, так и возникающие в процессе решения особенности. Обычно построение сетки начинают с базовой прямоугольной сетки, состоящей из кубических ячеек. При таком подходе построенные сетки называют декартовыми.

Преимущество декартовых сеток в том, что начальная сетка легко строится автоматически. Недостаток в том, что все ячейки имеют кубическую форму с одинаковыми размерами по всем трем направлениям. Если границы области содержат поверхности, не параллельные граням базовой сетки, и имеют сложную форму, может потребоваться очень много ячеек, чтобы с достаточной точностью аппроксимировать такие поверхности. Эта проблема становится еще более острой в задачах аэродинамики, поскольку здесь часто приходится моделировать течение в пограничном слое.

Корректное разрешение пограничного слоя обычно требует размера ячеек по нормали к поверхности около 0.1 мм. Если площадь поверхности обтекаемого тела порядка 1 м^2, то на поверхности тела должно находиться порядка 10^8 ячеек. Количество примерно одинаковых ячеек в направлении нормали должно быть около 10. Таким образом, общее количество ячеек в сетке должно быть порядка 10^9. Учитывая то, что для хранения данных одной ячейки требуется около 1 КБ, мы получаем требуемую оперативную память 1000 ГБ, что не так просто обеспечить даже современной вычислительной техникой. Для хранения промежуточных и окончательных результатов расчета потребуется много места на диске, счет на такой огромной сетке будет очень медленным.

В работе [5] описан алгоритм, лишенный указанных недостатков, позволяющий строить методом октодерева сетки с гладкими границами и сгущающимися к поверхности ячейками, размер которых по нормали много меньше тангенциального. Но он пока не получил широкого распространения.

Существуют работы, такие как [6, 7], где методом октодерева строится объемная сетка, а граница интерполируется тангенциальными гранями. Они частично свободны от указанных недостатков, но не адаптированы к задачам аэродинамики. И для интерполяции криволинейных границ все-таки требуется большее число ячеек.

Наиболее простой способ преодолеть указанные трудности — использовать в качестве базовой сетки не прямоугольную с кубическими ячейками, а готовую сетку, уже аппроксимирующую поверхность тела и учитывающую заранее известные особенности решения. Если ячейки сетки будут иметь форму шестигранников, мы сможем так же разбивать их, как и кубики в декартовых сетках, и адаптировать сетку к неизвестным особенностям решения.

В направлении, касательном к поверхности тела, обычно достаточно размера ячеек порядка 1 мм, таким образом, размер начальной сетки получается меньше на два порядка. Минус такого подхода в том, что нам требуется готовая базовая сетка, которую приходится строить вручную или каким-то другим автоматическим генератором сеток. Зато мы получаем приемлемый размер сетки.

Кроме того, если мы хотим, чтобы наш метод был достаточно универсальным, следует предусмотреть различные способы соединения базовых ячеек, т.е. сетка должна быть логически нерегулярной (хотя

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

и может содержать блоки упорядоченных ячеек). Это означает, что если в декартовых сетках верхняя грань данной ячейки всегда совпадает с нижней гранью соседней, а правая — с левой, то теперь это уже не всегда так. Поэтому существенно усложняется структура данных и еще больше усложняется логика операций создания-уничтожения ячеек. Еще сильнее эти операции усложняются на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью, где соседние ячейки могут обрабатываться разными процессорами.

По-видимому, из-за этих трудностей в настоящее время такой метод используется редко. В работе [8] используются многоблочные сетки с разным разрешением блоков, что позволяет получить сетки похожего вида, с базовой криволинейной сеткой и разными уровнями адаптации. Но здесь мы не будем объединять адаптируемые ячейки в блоки, каждая ячейка разбивается независимо, структура данных полностью аналогична декартовым сеткам.

2. Проблема разбиения ячеек в нерегулярных сетках. За основу адаптивной сетки берется нерегулярная сетка, полученная из внешнего редактора в формате CGNS. В данном случае она конвертирована из многоблочной квазирегулярной и состоит только из шестигранников, но в принципе может содержать ячейки в форме тетраэдров и других многогранников. Адаптироваться могут только шестигранники, кроме того, шестигранник, граничащий с ячейкой другого типа, может быть разбит при адаптации только один раз, поэтому желательно, чтобы сетка состояла преимущественно из шестигранников или чтобы они заполняли те области пространства, где нужна адаптация.

В процессе решения выполняется локальная адаптация, которая заключается в том, что ячейки, соответствующие критерию разбиения, который может быть разным в зависимости от задачи, разбиваются на 8 дочерних ячеек. При необходимости дочерние ячейки снова разбиваются по принципу восьмеричного дерева и т.д. Если ячейки соответствуют критерию объединения, дочерние ячейки, имеющие общего родителя, могут быть объединены.

Такой подход позволяет сочетать преимущества декартовых адаптивных сеток и многоблочных. Как в многоблочных, можно точно, без ступенек, аппроксимировать поверхность тела и строить вытянутые ячейки для расчета пограничного слоя. И, как в декартовых, можно выполнять локальную адаптацию к особенностям течения.

В процессе разбиения ячейки приходится решать три нетривиальные задачи: присвоить каждой из вновь созданных дочерних ячеек соседей, заменить в соседних ячейках ссылки на родительскую ячейку ссылками на новые ячейки и создать, если это требуется, новые узлы.

Поскольку исходная сетка у нас нерегулярная, это порождает определенные трудности. В регулярной сетке мы всегда знаем, какой гранью соседняя ячейка граничит с текущей, и знаем последовательность узлов для этой ячейки. В нерегулярной сетке это не так (рис. 1).

Поэтому процедура установления соседства должна включать в себя установление ориентации ячеек относительно друг друга. Для каждой грани вновь созданных ячеек возможны три варианта: 1) эта грань граничит с одной из сестринских ячеек, созданных одновременно с данной; 2) эта грань граничит с 1/4 грани еще не разбитой ячейки, уровень адаптации которой совпадает с уровнем адаптации родительской; 3) эта грань граничит с уже разбитой ячейкой, чей уровень адаптации совпадает с уровнем адаптации данной ячейки. Первый случай самый простой, потому что ориентация граней и порядок узлов в только что созданных ячейках известны.

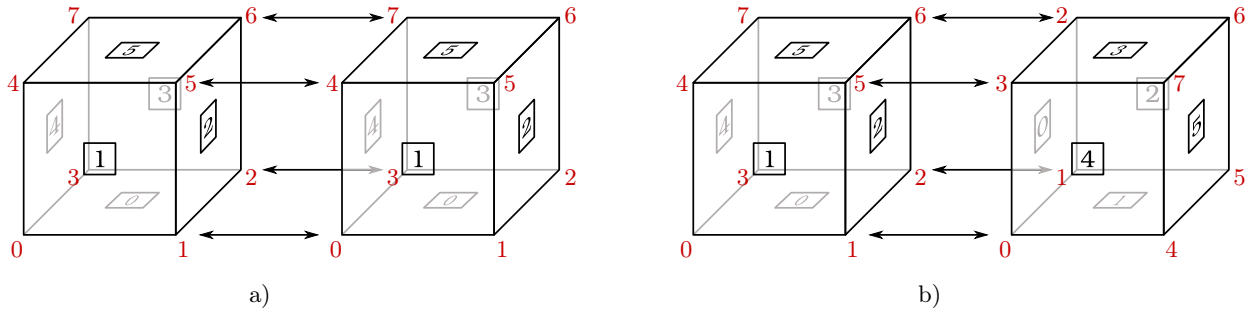


Рис. 1. Соответствие узлов и граней между соседними ячейками: a) в регулярной сетке; b) в нерегулярной сетке

Fig. 1. Correspondence of nodes and edges between adjacent cells: a) in a regular grid; b) in an irregular grid

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

Во втором случае легко присвоить соседа новой ячейке, просто взяв ссылку у родительской ячейки, но возникает вопрос, на какую грань и в какую из четырех локаций грани поместить ссылку на вновь созданную ячейку.

В третьем случае сосед вновь созданной ячейки берется из списка соседей родительской, который уже упорядочен, но необходимо правильно установить соответствие между последовательностью дочерних ячеек, последовательностью их соседей и последовательностью соседей в списке соседей родительской ячейки. Соседу же в этом случае просто передается ссылка на текущую ячейку.

Наиболее сложен случай 2. Здесь мы сначала просматриваем перечень смежных элементов соседней ячейки и находим в нем родительскую ячейку. Так мы узнаем, какой из своих граней сосед граничит с данной ячейкой. Затем сравниваем узлы соседа с узлами данной грани родительской ячейки и находим узел, соответствующий данной дочерней ячейке. Дочерняя ячейка всегда получает от родительской один старый узел, остальные 7 создаются заново или берутся у соседей. Теперь мы можем записать ссылку на вновь созданную ячейку в список соседей соседа, на место, соответствующее найденному узлу.

При разбиении ячейки всегда создается один узел в центре. Узлы на гранях и ребрах создаются в тех случаях, если соседние ячейки не разбивались. Если соседние ячейки уже были разбиты, используются узлы их дочерних ячеек. Для того чтобы правильно вписать ссылки на эти узлы в списки узлов новых ячеек, тоже нужно знать относительную ориентацию ячеек, но здесь уже грани и общего узла недостаточно, может отличаться также направление обхода узлов по грани.

Возможна также ситуация, когда узел на ребре был создан при разбиении ячейки, имеющей с данной общее ребро, но не имеющей общей грани. Эта проблема решается введением понятия родительских и дочерних узлов. Координаты всех узлов, кроме начальных, получаются как среднее арифметическое координат двух уже существующих узлов. Эти узлы считаются родительскими, и указатели на них хранятся в каждом дочернем узле. Если вновь создаваемый узел имеет ту же пару родителей, что и существующий, он считается идентичным. В таком случае новый узел не создается, а во все структуры, где он требуется, передается указатель существующего.

Задача объединения ячеек проще, чем разбиения, но тоже не совсем тривиальна. Недостаточно просто уничтожить дочерние ячейки. Списки соседей родительской ячейки сохранились, но за истекшее время соседние ячейки могли разбиться или объединиться, поэтому новые ссылки на соседей передаются родительской ячейке от уничтожаемых дочерних.

3. Организация параллельного счета. Средства для работы с сеткой и межпроцессорного обмена данных реализованы в виде библиотеки из нескольких стандартных подпрограмм. Детали операций скрыты от аэродинамической части программы, ее работа не зависит от числа процессоров и вида сетки. Используется библиотека MPI.

Первичное распределение ячеек по процессорам осуществляется перед началом счета методом рекурсивной координатной бисекции.

Обмен данными выполняется через фиктивные ячейки на границах области каждого процессора. После окончания шага счета каждый процессор пересылает другим данные, которые должны находиться в фиктивных ячейках. После окончания шага адаптации процессоры обмениваются сообщениями о создании и объединении ячеек, затем фиктивные ячейки разбиваются или объединяются для соответствия оригинальным.

Таблица 1. Эффективность распараллеливания на разном числе процессоров

Table 1. Efficiency of parallelization on different numbers of processors

Число процессоров Number of processors	Время счета Computation time	Эффективность, % Efficiency, %
1	970	100.0
6	172	84.3
12	101	80.0
24	53	76.0
36	36	74.8
48	28	72.1

Из-за нерегулярного типа сетки здесь существуют узлы как отдельный тип данных, что приводит к новым трудностям, ведь узлы могут принадлежать нескольким ячейкам, лежащим на разных процессорах. Поэтому узлы тоже формально присваиваются какому-то процессору. Перед записью на диск происходит перенумерация узлов и обмен номерами узлов между процессорами, чтобы одни и те же узлы имели одинаковые номера на разных процессорах.

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

Несмотря на сравнительно сложную процедуру адаптации, она занимает лишь небольшую часть машинного времени. В задаче о моделировании концевого вихря адаптация занимала около 0.2% времени, хотя этот показатель может меняться в зависимости от типа задачи и критерия адаптации. Главными замедляющими факторами являются пересылка пакетов данных между процессорами и неравномерность их загрузки. Динамическая балансировка нагрузки процессоров не предусмотрена, но есть статическая, т.е. нагрузку можно перераспределить, остановив счет.

В табл. 1 представлены время счета 1000 шагов и эффективность распараллеливания на примере задачи о моделировании концевого вихря. Видно, что при переходе от одного к шести процессорам эффективность значительно ухудшается, но в дальнейшем меняется медленно, оставаясь выше 70%. Хотя это может сильно зависеть от задачи.

4. Моделирование аэродинамических процессов. Для описания течений совершенного вязкого сжимаемого газа используется система нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (URANS) с моделью подсеточной вязкости Смагоринского–Лилли [9] для моделирования турбулентности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k + p\delta_{ik})}{\partial x_k} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} - g_i,$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial(\tau_{ik} u_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial \theta_k}{\partial x_k}.$$

Здесь используются общепринятые обозначения: ρ — плотность, u_k — компоненты вектора скорости, p — давление, $\tau_{ik} = 2\mu_{\text{ef}}\, e_{ik} - 2/3\mu_{\text{ef}}\, e_{jj}\delta_{ik}$ — тензор вязких напряжений, $e_{ik} = 0.5(\nabla_i u_k + \nabla_k u_i)$ — тензор скоростей деформаций, $\mu_{\text{ef}} = \mu_{\text{mol}} + \mu_{\text{turb}}$ — эффективная вязкость, $H = E + p/\rho$ — полная энтальпия, $E = E_t + W$ — полная энергия, $E_t = p/\rho(\gamma - 1)$ — внутренняя энергия единицы массы (определяется уравнением состояния идеального калорически совершенного газа), $W = 0.5u_k^2$ — кинетическая энергия единицы массы, $\theta_k = -\lambda\nabla_k T$ — молекулярный тепловой поток, λ — коэффициент теплопроводности, T — температура, δ_{ij} — тензор Кронекера, μ_{turb} — турбулентная вязкость. Согласно модели Смагоринского–Лилли $\mu_{\text{turb}} = \rho l_m^2 |\bar{e}|$, где $l_m = \min(C_{\text{LES}}\Delta, \kappa y)$, C_{LES} — константа Смагоринского, Δ — характерный размер ячейки, $\kappa = 0.4$ — константа Кармана, y — расстояние до ближайшей поверхности тела.

Для дискретизации уравнений используется метод конечных объемов, а для интегрирования уравнений по времени применяется оригинальная гибридная явно-неявная схема, обладающая свойством абсолютной устойчивости при условии минимального вклада диссипативной неявной компоненты и вторым порядком аппроксимации при переходе на явную компоненту. Эта схема позволяет эффективно решать задачи на сетках с сильной пространственной неоднородностью (с большим относительным удлинением в одном из направлений), которые неизбежно возникают при решении задач в рамках уравнений Навье–Стокса [10].

5. Расчет обтекания гиперзвукового летательного аппарата X-43. X-43 — беспилотный экспериментальный летательный аппарат (рис. 2), построенный по программе NASA “Hyper-X”. Цель программы — разработка гиперзвукового прямоточного реактивного двигателя, который может быть использован как прототип компонента космической транспортной системы или двигателя крылатой ракеты. Было изготовлено три экземпляра X-43, два из которых совершили успешные полеты в 2004 г.

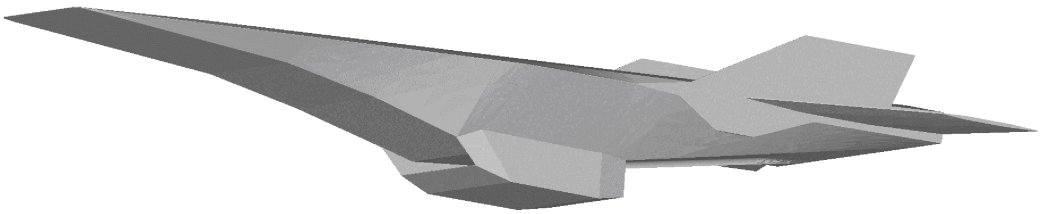


Рис. 2. Гиперзвуковой летательный аппарат X-43. Геометрическая модель

Fig. 2. X-43 hypersonic aircraft. Geometric model

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

X-43 запускается из-под крыла самолета и затем разгоняется при помощи разгонной ракеты до скорости, необходимой для начала работы прямоточного двигателя. Одновременно происходит набор высоты с 13 до 30000 м. В качестве топлива прямоточного двигателя используется жидкий водород.

В работе [11] опубликованы результаты продувки модели X-43 в аэродинамической трубе, с которыми мы будем сравнивать результаты наших расчетов.

Выполнены расчеты обтекания аппарата сверхзвуковым потоком. Расчеты выполнялись на трех сетках: “большой” — около 4.5 млн ячеек, “малой” — около 2.5 млн ячеек, и адаптированной, полученной из малой, с итоговым числом ячеек 2.9 млн.

Результаты расчетов на неадаптированных сетках для разных углов атаки и скоростей были опубликованы в [12].

Был использован простейший критерий адаптации — максимальная и минимальная разность величин в соседних ячейках. Для каждой из 5 газодинамических величин — плотности, давления и трех скоростей установлены пороговые значения разбиения и объединения. Если максимальная разность между данной ячейкой и одной из соседних превышает заданное значение, ячейка разбивается на 8 частей. Если во всех 8 ячейках, получившихся в результате разбиения одной родительской, все 5 величин отличаются не больше, чем на заданные значения, ячейки объединяются.

Здесь основными критериями адаптации были давление и скорость, но по критерию скорости пришлось разбивать не много ячеек, потому что пограничный слой был уже выделен в начальной сетке.

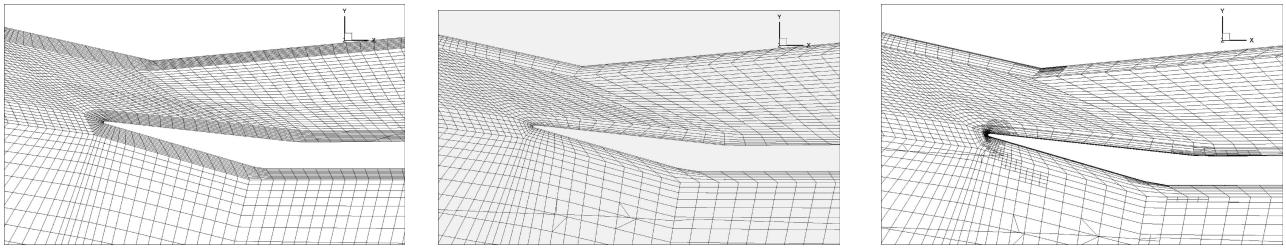
В целом картина обтекания, полученная на адаптированной сетке, типична для такого рода задач и качественно совпадает с результатами, полученными на неадаптированных сетках. Перед носом аппарата, передней кромкой обечайки воздухозаборника и передними кромками хвостового оперения формируются сильные ударные волны, но сравнительно грубые неадаптированные сетки не позволяли их точно разрешить. Это влияло и на моделирование пограничного слоя. Хотя неадаптированная сетка в пограничном слое была достаточно подробной, но начальные значения, получившиеся в результате обтекания кромки, были не совсем корректными, что делало неточными и параметры пограничного слоя ниже по потоку.

Таблица 2. Результаты расчетов обтекания X-43
Table 2. X-43 flow calculation results

Вычисления Computations	C_D
Большая сетка Large grid	0.01572
Малая сетка Small grid	0.01567
Адаптированная сетка Adapted grid	0.01700
Эксперимент Experiment	0.01961

В табл. 2 приведен коэффициент сопротивления C_D для трех расчетов и продувки. Коэффициент сопротивления, полученный на адаптированной сетке, оказался ближе к эксперименту, чем на обеих неадаптированных. Таким образом, адаптация повышает точность расчета. В основном, это достигается за счет выделения ударных волн перед носом летательного аппарата и кромкой воздухозаборника.

На рис. 3 показана сетка вблизи передней кромки обечайки воздухозаборника для трех вариантов расчета. Здесь можно сравнить густоту большой и малой сеток, также показано разбиение ячеек при адаптации. На рис. 4 в том же месте показано распределение давления, которое является одним из критериев адаптации. Видно резкое повышение давления — ударная волна перед кромкой обечайки. Даже при низком качестве базовой сетки адаптация позволяет выделить ударную волну и получить более точное решение.



a) b) c)

Рис. 3. Фрагмент расчетной области на входе в воздухозаборник: a) большая сетка; b) малая сетка; c) адаптированная сетка
Fig. 3. Fragment of the computational domain at the air intake entrance: a) large grid; b) small grid; c) adapted grid

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

6. Расчет концевого вихря на крыле, обтекаемом сверхзвуковым потоком. Концевые вихри возникают на крыльях и элементах оперения любого летательного аппарата. Вихревой след представляет опасность для других воздушных судов, проходящих сквозь него. Также возможно попадание вихря в воздухозаборник двигателя, части фюзеляжа и элементы управления создающего его летательного аппарата, что тоже несет опасность.

Моделирование вихря требует достаточно мелкой сетки, размеры ячеек должны быть в несколько раз меньше радиуса вихря. Но положение и размеры вихря заранее неизвестны, поэтому если не применять адаптивную сетку, приходится делать мелкую сетку во всей области пространства, где он может оказаться.

Выполнено моделирование вихревого следа в сверхзвуковом течении за прямым крылом с острыми кромками, обтекаемым сверхзвуковым потоком. Хорда крыла 30 мм, полуразмах 47.5 мм. На рис. 5 показаны трехмерная геометрическая модель крыла, а также профиль крыла у основания и форма крыла в плане. Стрелкой обозначено направление набегающего потока со скоростью $\boldsymbol{u}$. Форма крыла между основанием и внешним краем такая, что все поверхности плоские — плоский четырехугольник в средней части, треугольники у передней и задней кромки.

Выполнены расчеты для двух значений числа Маха: $M = 2$ и $M = 3$. В обоих случаях угол атаки $\alpha = 20°$, плотность $\rho = 0.575$ кг/м^3, давление $P = 271170$ Па.

Использовалась начальная сетка размером около 1 млн ячеек, размер которой в процессе адаптации увеличился до 3.5 млн.

В результате расчетов получены вихревые структуры, типичные для такого рода течений. Концевой вихрь формируется над крылом, затем пересекается с волной сжатия, отходящей от задней кромки, и сливается с аэродинамическим следом, получающимся при стекании пограничного слоя. В результате образуется сложная несимметричная структура. На рис. 6 a показано число Маха в плоскости $z = 0.046$ м, проходящей приблизительно через середину вихря. Видны волна сжатия под крылом, область разрежения над крылом, волна сжатия над задней кромкой крыла и вихревой след.

На рис. 6 b показано число Маха в плоскости, перпендикулярной оси x, на расстоянии двух хорд за крылом.

На рис. 7 показаны тангенциальное число Маха и плотность на линии, проходящей через центр вихря на расстоянии двух хорд за крылом, полученные в данном расчете (красная линия) и в работе [13] (синяя). Можно видеть, что получено хорошее совпаде-

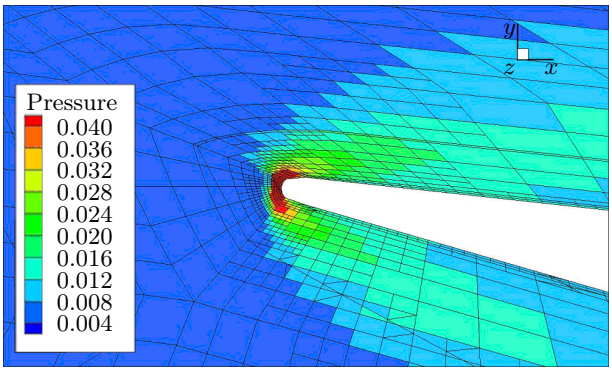


Рис. 4. Сетка и распределение давления (МПа) вблизи передней кромки воздухозаборника

Fig. 4. Mesh and pressure distribution (MPa) near the leading edge of the air intake

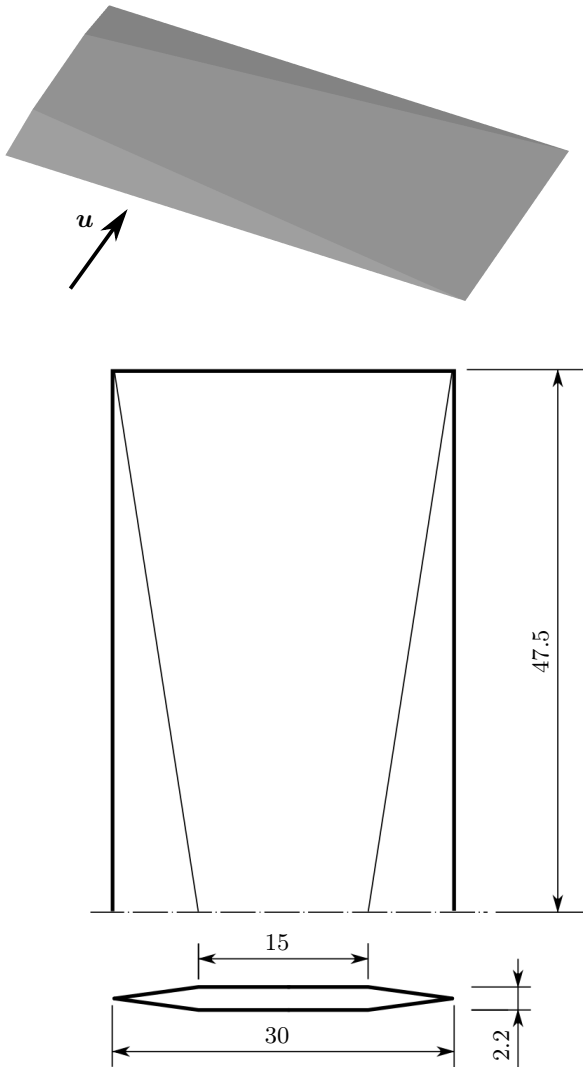
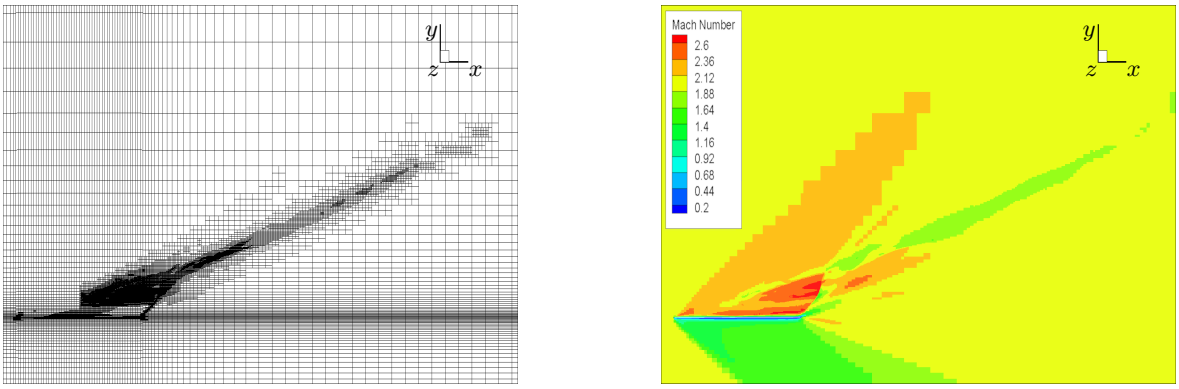


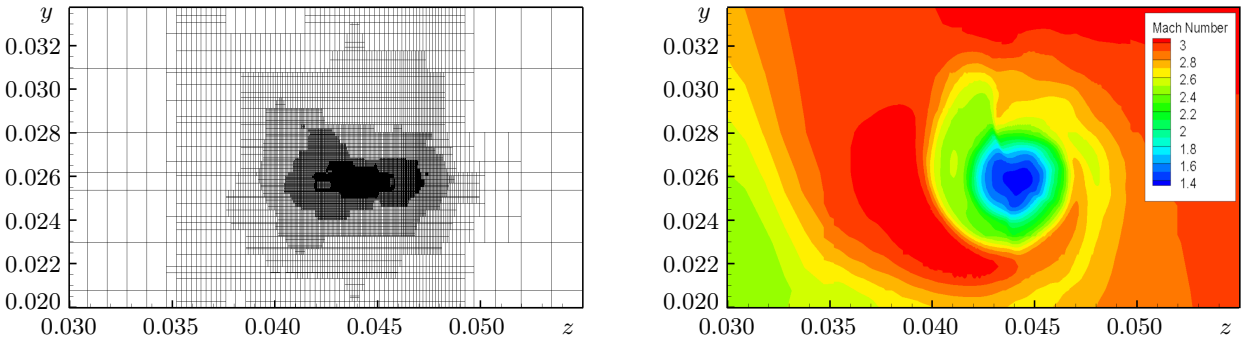
Рис. 5. Схема крыла

Fig. 5. Wing drawing

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106



a)



b)

Рис. 6. Сетка и число Маха в плоскостях: a) $z = 0.046$ м; b) $x = 0.075$ м

Fig. 6. Grid and Mach number in the planes: a) $z = 0.046$ m; b) $x = 0.075$ m

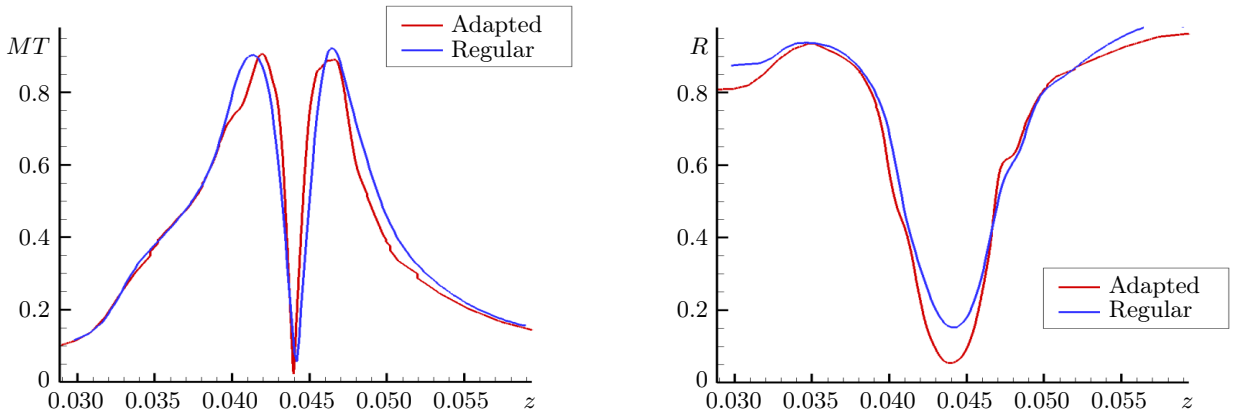


Рис. 7. Тангенциальное число Маха и плотность на линии, проходящей через центр вихря

Fig. 7. Tangential Mach number and density on a line passing through the center of the vortex

ние положения центра вихря, его диаметра и распределения тангенциального числа Маха по радиусу. Совпадение значений плотности в центре вихря несколько хуже. В работе [13] использовалась модель турбулентности Спаларта–Аллмараса и многоблочная сетка размером около 5 млн ячеек.

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

7. Заключение. Предлагаемый тип сеток позволяет моделировать сложные физические процессы экономными вычислительными средствами. Средства работы с сетками реализованы в виде универсального пакета и интегрированы с аэродинамическим солвером. Продемонстрировано решение задач на сложной геометрии, с моделированием турбулентности, выделением ударных волн, пограничного слоя и вихревых структур.

Список литературы

1. *Finkel R.A., Bentley J.L.* Quad trees a data structure for retrieval on composite keys // Acta Informatica. 1974. **4**, N 1. 1–9. doi 10.1007/BF00288933.
2. *Григорьев С.К., Захаров Д.А., Корнилина М.А., Якобовский М.В.* Динамическая балансировка нагрузки при использовании адаптивных локально измельчаемых сеток // Матем. моделирование. 2023. **35**, № 12. 69–88. doi 10.20948/mm-2023-12-05.
3. *Григорьев С.К., Кучугов П.А.* Алгоритм применения структурного критерия адаптации для решения задач с использованием динамически адаптивных сеток // Вычислительные методы и программирование. 2025. **26**, № 4. 410–421. https://num-meth.ru/index.php/journal/article/view/1447. (Дата обращения: 18 февраля 2026).
4. *Aftosmis M.J., Berger M.J., Melton J.E.* Robust and efficient Cartesian мesh generation for component-based geometry // J. AIAA. 1997. https://www.nas.nasa.gov/publications/software/docs/cart3d/pages/publications/AIAA-97-0196.pdf. Cited February 18, 2026.
5. *Maréchal L.* All hexahedral boundary layers generation // Procedia Engineering. 2016. **163**. 5–19. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816333112. Cited February 18, 2026.
6. *Tong H., Halilaj E., Zhang Y.J.* HybridOctree_Hex: Hybrid octree-based adaptive all-hexahedral mesh generation with Jacobian control // Journal of Computational Science. 2024. **78**. Article Number 102278. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877750324000711. Cited February 18, 2026.
7. *Jia S., Wang G., Pan Z., Yu X.* A real-time deformable cutting method combining a uniform grid of linked voxels and an octree of linked voxels // Multimedia Tools and Applications. 2025. **84**. 48413–48445. https://link.springer.com/article/10.1007/s11042-025-21037-0. Cited February 18, 2026.
8. *Gao X, Groth C.P.T.* A parallel solution — adaptive method for three-dimensional turbulent non-premixed combusting flows // Journal of Computational Physics. 2010. **229**, N 9. 3250–3275. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0021999110000161. Cited February 18, 2026.
9. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment // Monthly Weather Review. 1963. **91**, N 3. 99–164.
10. *Men'shov I., Nakamura Y.* Hybrid explicit-implicit, unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // J. AIAA. 2004. **42**, N 3. 551–559.
11. *Engelund W.C., Holland S.D., Cockrell C.E.Jr., Bittner R.D.* Propulsion system airframe integration issues and aerodynamic database development for the Hyper-X flight research vehicle // 14th International Symposium on Airbreathing Engines, Florence, Italy, September 5–10, 1999. ISOABE 99-7215, 1999. https://ntrs.nasa.gov/citations/20040086964. Cited February 18, 2026.
12. *Луцкий А.Е., Северин А.В.* Численное исследование обтекания гиперзвукового летательного аппарата X-43 с применением адаптивных сеток // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2016. № 102. doi 10.20948/prepr-2016-102.
13. *Борисов В.Е., Константиновская Т.В., Луцкий А.Е., Ханхасаева Я.В.* Сравнение моделей турбулентности для расчета сверхзвукового концевого вихря // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2022. № 71. https://keldysh.ru/papers/2022/prep2022_71.pdf. (Дата обращения: 19 февраля 2026).

Получена *2 декабря 2025 г.* | *Принята* *16 февраля 2026 г.* | *Опубликована* *27 февраля 2026 г.*

Информация об авторах

Александр Евгеньевич Луцкий — д.ф.-м.н., гл. науч. сотр.; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша (ИПМ РАН), Миусская пл., 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

Александр Владимирович Северин — науч. сотр.; Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша (ИПМ РАН), Миусская пл., 4, 125047, Москва, Российская Федерация.

2026, **27** (1), 80–89. doi 10.26089/NumMet.v27r106

References

1. R. A. Finkel and J. L. Bentley, "Quad Trees a Data Structure for Retrieval on Composite Keys," Acta Informatica **4** (1), 1–9 (1974). doi 10.1007/BF00288933.
2. S. K. Grigoriev, D. A. Zakharov, M. A. Kornilina and M. V. Yakobovskiy, "Dynamic Load Balancing Using Adaptive Locally Refined Meshes," Mat. Model. **35** (12), 69–88 (2023) [Mathematical Models and Computer Simulations **16** (2), 280–292 (2024)]. doi 10.1134/S2070048224020091.
3. S. K. Grigoriev and P. A. Kuchugov, "Algorithm for applying the structural adaptation criterion to solve problems using adaptive mesh refinement," Numerical Methods and Programming **26** (4), 410–421 (2025). doi 10.26089/NumMet.v26r427.
4. M. J. Aftosmis, M. J. Berger and J. E. Melton, "Robust and Efficient Cartesian Mesh Generation for Component-Based Geometry," J. AIAA (1997). https://www.nas.nasa.gov/publications/software/docs/cart3d/pages/publications/AIAA-97-0196.pdf. Cited February 18, 2026.
5. L. Maréchal, "All hexahedral boundary layers generation," Procedia Engineering **163**, 5–19 (2016). https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816333112. Cited February 18, 2026.
6. H. Tong, E. Halilaj and Y. J. Zhang, "HybridOctree_Hex: Hybrid octree-based adaptive all-hexahedral mesh generation with Jacobian control," Journal of Computational Science **78**, Article Number 102278 (2024). https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877750324000711. Cited February 18, 2026.
7. S. Jia, G. Wang, Z. Pan and X. Yu, "A real-time deformable cutting method combining a uniform grid of linked voxels and an octree of linked voxels," Multimedia Tools and Applications **84**, 48413–48445 (2025). https://link.springer.com/article/10.1007/s11042-025-21037-0. Cited February 18, 2026.
8. X. Gao and C. P. T. Groth, "A Parallel Solution — Adaptive Method for Three-Dimensional Turbulent Non-Premixed Combusting Flows," Journal of Computational Physics **229** (9), 3250–3275 (2010). https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0021999110000161. Cited February 18, 2026.
9. J. Smagorinsky, "General Circulation Experiments with the Primitive Equations: I. The Basic Experiment," Monthly Weather Review **91** (3), 99–164 (1963).
10. I. Men'shov and Y. Nakamura, "Hybrid Explicit-Implicit, Unconditionally Stable Scheme for Unsteady Compressible Flows," J. AIAA. **42** (3), 551–559 (2004).
11. W. C. Engelund, S. D. Holland, C. E. Jr. Cockrell and R. D. Bittner, "Propulsion System Airframe Integration Issues and Aerodynamic Database Development for the Hyper-X Flight Research Vehicle," in *14th International Symposium on Airbreathing Engines, Florence, Italy, September 5–10, 1999* (ISABE 99-7215, 1999). https://ntrs.nasa.gov/citations/20040086964. Cited February 19, 2026.
12. A. E. Lutsky and A. V. Severin, "Numerical Study of Flow X-43 Hypersonic Aircraft Using Adaptive Grids," Preprints of KIAM RAS. № 102 (2016). doi 10.20948/prepr-2016-102.
13. V. E. Borisov, T. V. Konstantinovskaya, A. E. Lutsky and Y. V. Khankhasaeva, "Comparison of Turbulence Models for a Supersonic Tip Vortex Simulation," Preprints of KIAM RAS. № 71 (2022). https://keldysh.ru/papers/2022/prep2022_71.pdf. Cited February 19, 2026.

Received	*Accepted*	*Published*
December 2, 2025	*February 16, 2026*	*February 27, 2026*

Information about the authors

Aleksandr E. Lutsky — Ph.D., Chief Researcher; Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia.

Aleksandr V. Severin — Scientist; Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Miusskaya ploshchad', 4, 125047, Moscow, Russia.