



doi 10.26089/NumMet.v27r105

УДК 517.968;  
519.642.3

## Программное обеспечение для решения задач газовой динамики при использовании полностью консервативных разностных схем с адаптивной искусственной вязкостью

**Хаочэнь Чжан**

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Физтех-школа прикладной математики и информатики,  
кафедра математического моделирования и прикладной математики,  
Долгопрудный, Российская Федерация  
ORCID: 0000-0003-1378-1777, e-mail: [chzhan.h@phystech.edu](mailto:chzhan.h@phystech.edu)

**Аннотация:** Рассмотрен подход к численному решению уравнений газовой динамики с использованием полностью консервативных разностных схем с адаптивной искусственной вязкостью. Разработаны вычислительные алгоритмы и создано программное обеспечение, реализующие предложенный метод в рамках клиент-серверной архитектуры. Клиентская часть реализована на языке JavaScript (React), серверная часть — на Go, а вычислительное ядро — на C++. Такая организация обеспечивает удобный веб-доступ, масштабируемость и высокую производительность при решении задач гиперболического типа. Для проверки точности и устойчивости реализованного метода проведены численные эксперименты на классических тестовых задачах газовой динамики — задачах Сода и Эйнфельдта. Полученные результаты подтвердили корректное воспроизведение ударных волн и контактных разрывов, отсутствие неустойчивостей. Разработанное программное обеспечение может служить базовой платформой для дальнейшего расширения на пространственно-многомерные постановки и включения дополнительных физических эффектов.

**Ключевые слова:** газовая динамика, полностью консервативная разностная схема, адаптивная искусственная вязкость, программное обеспечение, клиент-серверная архитектура.

**Для цитирования:** Чжан Х. Программное обеспечение для решения задач газовой динамики при использовании полностью консервативных разностных схем с адаптивной искусственной вязкостью // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 1. 67–79. doi 10.26089/NumMet.v27r105.



# Software for solving gas dynamics problems using completely conservative difference schemes with adaptive artificial viscosity

Haochen Zhang

Moscow Institute of Physics and Technology,  
Phystech School of Applied Mathematics and Computer Science,  
Department of Mathematical Modeling and Applied Mathematics,  
Dolgoprudny, Russia

ORCID: 0000-0003-1378-1777, e-mail: [chzhan.h@phystech.edu](mailto:chzhan.h@phystech.edu)

**Abstract:** An approach to the numerical solution of the equations of gas dynamics with usage of completely conservative difference schemes with adaptive artificial viscosity is considered. Computational algorithms were developed and software implementing the proposed method within a client-server architecture was created. The client part is written in JavaScript (React), the server part is realized in Go, and the computing core is implemented in C++. Such an organization provides convenient web access, scalability, and high performance in solving hyperbolic tasks. To verify the accuracy and stability of the implemented method, numerical experiments were carried out on classical test problems of gas dynamics — on the Sod and Einfeldt problems. The obtained results confirmed the correct reproduction of shock waves, contact discontinuities and the absence of instabilities. The developed software can serve as a basic platform for further extension to spatially multidimensional formulations and the inclusion of additional physical effects.

**Keywords:** gas dynamics, completely conservative difference scheme, adaptive artificial viscosity, software, client-server architecture.

**For citation:** H. Zhang, “Software for solving gas dynamics problems using completely conservative difference schemes with adaptive artificial viscosity,” *Numerical Methods and Programming*. 27 (1), 67–79 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r105.

---

**1. Введение.** Математическое моделирование процессов газовой динамики играет ключевую роль при исследовании течений в каналах сложной формы, соплах, ударных трубах и аэродинамических камерах. Уравнения газовой динамики представляют собой выражения основных законов сохранения (массы, импульса и энергии) в сплошной среде. Поэтому естественно строить дискретную модель изучаемой среды так, чтобы в ней также выполнялись аналоги этих законов. Развитие принципов интегральных согласований массы, импульса и различных видов энергий привело к понятию полностью консервативных разностных схем (ПКРС) [1], в дискретном виде сохраняющих также внутреннюю и кинетическую энергии системы и применяемых при лагранжевых и эйлеровых способах описания сплошной среды [2–4]. Однако при аппроксимации гиперболических уравнений в переменных Эйлера в вычислительных экспериментах неизбежно возникает проблема устранения численных осцилляций в окрестности волн разрежения, разрывов и ударных волн. Одним из эффективных подходов к подавлению неустойчивости является введение адаптивной искусственной вязкости (АИВ) [5], влияющей на пространственную аппроксимацию дискретной модели, не изменяя ее консервативно согласованных свойств по компонентам различных видов энергий, массопереносу и импульсу. При этом обеспечивается получение физически корректного и качественного решения задачи. Решение нелинейной алгебраической системы уравнений, возникающей в вычислениях по неявной ПКРС, осуществляется с помощью некоторого итерационного процесса. Выбор конкретного итерационного алгоритма при этом влияет на форму вводимой АИВ в разностной схеме и, следовательно, определяет динамически формируемую локальную аппроксимацию данной схемы. Детальное исследование этих взаимосвязанных механизмов представлено в работе [6]. Там же были предложены эффективные методы использования АИВ.



В настоящей работе представлено программное обеспечение, реализующее решение уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных на основе полностью консервативной разностной схемы с адаптивной искусственной вязкостью. Детали программной реализации подробно описаны в [6]. В данной работе приводится описание разработанного программного обеспечения, которое представляет собой клиент-серверную архитектуру, обеспечивающую удобство взаимодействия пользователя с вычислительным ядром и визуализацию результатов расчетов в веб-интерфейсе. Пользователь осуществляет доступ к системе через стандартный браузер, переходя на веб-страницу, где вводит параметры расчета и отслеживает ход решения. Веб-запросы обрабатываются обратным прокси-сервером Nginx [7], который направляет обращения по корневому пути к статическим страницам интерфейса, реализованным на React [8], а запросы к интерфейсу программирования приложения (application programming interface, API) перенаправляет на серверную часть, написанную на Go [9]. Вычислительное ядро реализуется на C++ [10]. Ядро выполняет решение уравнений газовой динамики и сохраняет результаты. Полученные данные возвращаются на сервер, откуда они автоматически передаются пользователю для последующего анализа и визуализации. Такое разделение функций между веб-интерфейсом, сервером управления и численным модулем обеспечивает масштабируемость, надежность и удобство эксплуатации программного комплекса при решении задач газовой динамики. Проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие устойчивость и точность предложенного метода при решении типовых одномерных задач газовой динамики с разрывами и ударными волнами и задач динамики газодисперсных сред.

**2. Постановка задачи газовой динамики.** Для описания пространственно-одномерного течения сжимаемого газа в переменных Эйлера в декартовой системе координат будем рассматривать систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\mu u) + f, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) = -P \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\mu \varepsilon) + Q, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \rho \right) = -u \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{u^2}{2} \right) + u f. \quad (4)$$

Здесь  $\frac{\partial}{\partial t}$  — частная производная по времени  $t$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}$  — частная производная по  $x$ ,  $u$  — скорость течения,  $\rho$  — плотность среды,  $\mu = \rho u$  — плотность потока массы,  $P$  — давление,  $f$  — внешняя сила в единичном объеме,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $Q$  — внешняя теплота в единичном объеме. Считается, что масса  $dM = \rho dV$  заключена в объем  $dV$ , через границы которого протекает поток массы  $\mu$ , несущий импульс  $\mu u$  и внутреннюю энергию  $\mu \varepsilon$ . Система уравнений (1)–(4) замыкается уравнениями состояния  $\rho = \rho(P, T)$  и  $\varepsilon = \varepsilon(P, T)$ . Для численного решения рассматриваемой задачи необходимо определить начальные и граничные условия, которые будут конкретизированы в дальнейшем.

**3. Аппроксимация уравнений задачи газовой динамики.** Для решения системы уравнений (1)–(4) запишем двухслойную по времени ПКРС в переменных Эйлера:

$$v \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} = -v \text{DIN}_D(\mu_D)^\sim, \quad (5)$$

$$v \frac{\hat{\rho} \hat{u} - \rho u}{\tau} = -v \text{GRAD}_\sigma \pi^\sim - v \text{DIT}_D((\mu_D)^\sim (u_D)^\sim), \quad (6)$$

$$v \frac{\hat{\rho} \hat{\varepsilon} - \rho \varepsilon}{\tau} = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^\sim V \text{DIV}_\sigma (u_\Omega)^\sim) - v \text{DIN}_D(\mu_{ED})^\sim, \quad (7)$$

$$v \frac{\hat{\rho} \hat{u}^2 / 2 - \rho u^2 / 2}{\tau} = -v (u^\sim, \text{GRAD}_\sigma \pi^\sim) - v \text{DIN}_D(\langle flux_{Ek} \rangle_D^\sim), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \rho u, \quad \mu_E = \varepsilon \mu = E u, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^\sim = \rho^{(\psi_\rho)}, \quad \psi_\rho = \text{const}, \\ (M_D)^\sim &= \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad (\mu_D)^\sim = (M_D)^\sim - (\nu_\rho)^\sim \text{GRAN}_D \rho^\sim, \\ (\pi_\Omega)^\sim &= P_\Omega^{(0.5)} - (\nu_u)^\sim \rho_\Omega^\sim \text{DIV}_\sigma(u^{(\psi_u)}), \quad P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_\omega, \quad \psi_u = \text{const}, \\ (M_{ED})^\sim &= \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad (\mu_{ED})^\sim = (M_{ED})^\sim - (\nu_E)^\sim \text{GRAN}_D (\rho^\sim \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}), \quad \psi_\varepsilon = \text{const}, \\ \langle \text{flux}_{Ek} \rangle_D^\sim &= (\mu_D)^\sim \frac{(u_D^2)^\sim}{2}. \end{aligned}$$

Выше  $\psi = \{\psi_\rho, \psi_u, \psi_\varepsilon\}$  — постоянные интерполяционные веса по времени,  $P_\Omega$  — физическое давление,  $\pi_\Omega$  — давление с вязкой добавкой,  $M_D$  — физический поток массы,  $\mu_D$  — поток массы с вязкой добавкой,  $M_{ED}$  — физический поток внутренней энергии,  $\mu_{ED}$  — поток внутренней энергии с вязкой добавкой,  $\langle \text{flux}_{Ek} \rangle_D$  — поток кинетической энергии. Под  $(M_D)^\sim$  и  $(M_{ED})^\sim$  понимаем некоторые аппроксимации потока массы и потока внутренней энергии явного и неявного слоев в ячейке  $\Omega$  соответственно. Также в ячейке, образованной узлами  $\omega$  и  $\omega'$ , введены величины:

$$u_D^\sim = \frac{1}{2} \left( u_\omega^{(\delta_\omega)} + u_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})} \right), \quad u_D^{2\sim} = \left( u_\omega^{(\delta_\omega)}, u_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})} \right).$$

На явном и неявном слоях по времени  $t$  и  $\hat{t} = t + \tau$  ( $\tau > 0$  — шаг по времени) введены разностные производные по времени и пространственно-точечные временные интерполяции:  $a_t = \frac{\hat{a} - a}{\tau}$ ,  $a^{(\delta)} = \delta \hat{a} + (1 - \delta)a$ . Здесь интерполяционный вес  $\delta$  может связываться с узлами пространственной сетки  $\omega$ , например, по закону:  $\delta = \sqrt{\hat{m}} / (\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m})$ . Набор  $\psi = \{\psi_\rho, \psi_u, \psi_\varepsilon\}$  — постоянные интерполяционные веса по времени. Под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций  $a$  и  $\hat{a}$  между слоями  $t$  и  $\hat{t}$  понимаются некоторые интерполяционные величины  $a^\sim$ , например, для скорости полагаем  $u^\sim = u^{(\delta)}$ .

Набор искусственных вязкостей  $\nu = \{(\nu_\rho)^\sim, (\nu_u)^\sim, (\nu_E)^\sim\}$  определяется в ячейках через набор приведенных вязкостей  $\beta = \{\beta_\rho, \beta_u, \beta_E\}$ , зависящих от числа Куранта  $kr$ , по формулам:  $(\nu_\rho)^\sim = \beta_\rho h^2 / \tau$ ,  $(\nu_u)^\sim = \beta_u h^2 / \tau$ ,  $(\nu_E)^\sim = \beta_E h^2 / \tau$  [11]. В силу полученных в [11] достаточных условий выполнения принципа максимума для моделирования процесса массопереноса уравнением неразрывности при наличии АИВ нижняя граница коэффициента  $\beta$  связана с числом Куранта  $kr$ , которое тем самым является масштабным физическим фактором, влияющим на подавление локальных неустойчивостей в задаче. В связи с этим в данной работе для подавления локальных неустойчивостей применяется постепенное увеличение коэффициента приведенной искусственной вязкости на доли числа Куранта в виде  $\text{const}_\rho kr$ , где  $\text{const}_\rho$  — настраиваемая на практике константа. Математические обоснования устойчивости для уравнений импульса и энергии носят аналогичный характер.

В (5)–(8) используются разностные аналоги операций векторного анализа. Такие операторы и их области определения и значений соответствующего аналога операции определяются следующим образом:

$$\text{DIN}_D \mu_D = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega), \quad \text{DIN}_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (9)$$

$$\text{DIT}_D (\mu_D u_D) = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega) u_D(\Omega), \quad \text{DIT}_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (10)$$

$$\text{GRAN}_D P = \frac{1}{v} \Delta_\Omega P, \quad \text{GRAN}_D : (\omega) \rightarrow (\Omega), \quad (11)$$

$$\text{GRAD}_\sigma \pi = \frac{1}{v} \Delta_\sigma \pi, \quad \text{GRAD}_\sigma : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (12)$$

$$\text{DIV}_\sigma u = -\frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) u_\omega, \quad \text{DIV}_\sigma : (\omega) \rightarrow (\Omega), \quad (13)$$

где  $\Delta_\Omega P = - \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) P_\omega$ ,  $\Delta_\sigma \pi = + \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \pi_\Omega + S_{\partial\omega} \pi_{\partial\omega}$ .

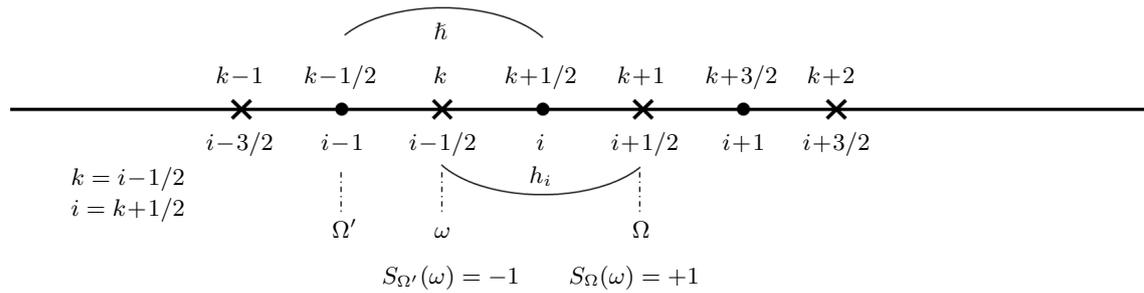


Рис. 1. Разностная сетка. Схема расположения узлов сетки ( $\omega$ ) и ячеек сетки ( $\Omega$ ) в пространстве

Fig. 1. Difference grid. Arrangement of grid nodes ( $\omega$ ) and grid cells ( $\Omega$ ) in space

Рис. 1 соответствует разностной схеме (5)–(8). Здесь  $k$  – индекс, нумерующий узлы  $\omega$ ,  $i$  – индекс, нумерующий ячейки  $\Omega$ . Термодинамические величины  $\rho, \varepsilon, P$  и внутренняя энергия  $E = \rho\varepsilon$  относятся к узлам  $\omega$ . Будем также относить скорость  $u$ , объем  $v$  и приузловую массу  $m = \rho v$  к узлам  $\omega$ , а объем  $V$  – к ячейкам сетки. Знаковая функция  $S_\Omega(\omega)$  на границе приузлового домена узла  $\omega$  равна  $+1$  справа и  $-1$  слева.  $\sum_{\omega(\Omega)}$  подразумевает суммирование по узлам  $\omega$ , образующим ячейку  $\Omega$ . Также  $\sum_{\Omega(\omega)}$  – суммирование по ячейкам  $\Omega$ , смежным к узлу  $\omega$ . Очевидно

$$v_\omega = \tilde{h}_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad V_\Omega = h_i, \quad \rho_\omega = \rho_k = \frac{m_\omega}{v_\omega},$$

где под  $h$  и  $\tilde{h}$  понимаются размеры ячеек  $\Omega$  и узловых доменов  $\omega$  соответственно.

Подставляя выражения (9)–(13) в систему уравнений (5)–(8), получаем стандартную дискретную форму в пространственно-одномерном случае:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\rho}_k - \rho_k}{\tau} &= -\frac{(\mu_D)_{k+1/2}^\sim - (\mu_D)_{k-1/2}^\sim}{\tilde{h}}, \\ \frac{\hat{\rho}_k \hat{u}_k - \rho_k u_k}{\tau} &= -\frac{\pi_{k+1/2}^\sim - \pi_{k-1/2}^\sim}{\tilde{h}} - \frac{(\mu_D)_{k+1/2}^\sim u_{k+1/2}^\sim - (\mu_D)_{k-1/2}^\sim u_{k-1/2}^\sim}{\tilde{h}}, \\ \frac{\hat{\rho}_k \hat{\varepsilon}_k - \rho_k \varepsilon_k}{\tau} &= -\frac{1}{2} \frac{\pi_{k+1/2}^\sim (u_{k+1}^\sim - u_k^\sim) + \pi_{k-1/2}^\sim (u_k^\sim - u_{k-1}^\sim)}{\tilde{h}} - \frac{(\mu_{ED})_{k+1/2}^\sim - (\mu_{ED})_{k-1/2}^\sim}{\tilde{h}}, \\ \frac{1}{2} \frac{\hat{\rho}_k \hat{u}_k^2 - \rho_k u_k^2}{\tau} &= -u_k^\sim \frac{\pi_{k+1/2}^\sim - \pi_{k-1/2}^\sim}{\tilde{h}} - \frac{\langle flux_{Ek} \rangle_{k+1/2}^\sim - \langle flux_{Ek} \rangle_{k-1/2}^\sim}{\tilde{h}}. \end{aligned}$$

**4. Технология программирования.** В настоящей работе представлено программное обеспечение для моделирования газодинамических процессов на основе ПКРС с АИВ.

**4.1. Архитектура программного обеспечения.** Программный комплекс для решения задач газовой динамики построен по модульному принципу и имеет распределенную клиент-серверную архитектуру.

Архитектура разработанного программного комплекса представлена на рис. 2 и включает четыре функциональных модуля:

- 1) пользовательский интерфейс,
- 2) сервер управления,
- 3) вычислительное ядро,
- 4) файловая система данных.

Все модули взаимодействуют между собой посредством стандартных протоколов обмена данными, что обеспечивает модульность и возможность дальнейшего расширения системы.

Пользовательский интерфейс реализован в виде веб-приложения на основе фреймворков React и Plotly [12]. Он предназначен для ввода параметров расчета, выбора сценариев моделирования, а также для визуализации результатов в графической форме. Коммуникация между интерфейсом и сервером осуществляется по протоколу HTTP с использованием формата JSON, что позволяет гибко интегрировать клиентскую часть с другими сервисами и автоматизировать передачу данных.

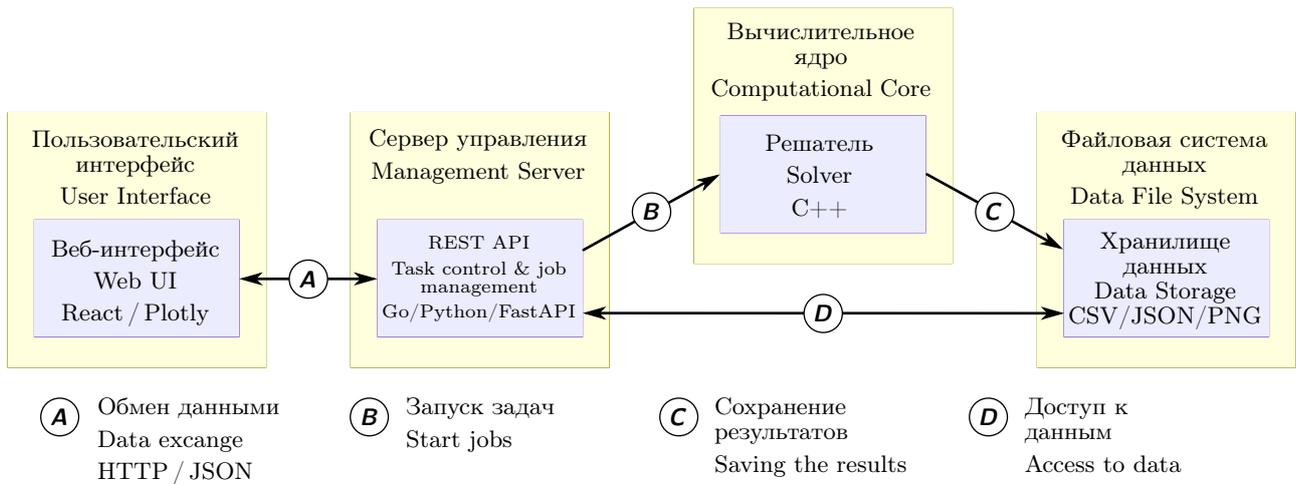


Рис. 2. Схема работы программного обеспечения

Fig. 2. Software operation scheme

Сервер управления является промежуточным звеном между пользовательским интерфейсом и вычислительным ядром. Он реализует REST API на базе Go или Python (FastAPI), обеспечивая создание, запуск и контроль вычислительных задач. Сервер принимает входные данные от клиента, формирует конфигурационные файлы и инициирует выполнение расчета в вычислительном модуле. Кроме того, он отвечает за двусторонний обмен информацией с файловой системой данных — как при записи новых результатов, так и при выдаче сохраненных данных пользователю.

Вычислительное ядро представляет собой основной вычислительный модуль, реализованный на языке C++. Вычислительное ядро выполняет численное решение задач газовой динамики методом ПКРС, описанном выше. Решатель запускается сервером управления в отдельном процессе и формирует выходные файлы, содержащие распределения физических величин в пространстве и времени.

Файловая система данных отвечает за долговременное хранение входных и выходных данных моделирования. Файловая система организует структуру каталогов расчетных задач, обеспечивает хранение файлов форматов CSV, JSON и PNG, а также предоставляет серверу интерфейс для доступа к результатам моделирования. Двусторонний обмен между сервером и файловой системой позволяет централизованно управлять результатами расчетов и выполнять последующую постобработку данных.

Таким образом, предложенная архитектура сочетает в себе гибкость веб-интерфейса, масштабируемость серверной логики, вычислительную эффективность специализированного ядра и надежность системы хранения данных. Такое построение обеспечивает независимое развитие каждого компонента и возможность интеграции комплекса в распределенные вычислительные среды.

**4.2. Схема работы программного обеспечения.** В [6] были разработаны три различных метода для нахождения АИВ в ПКРС: 1) метод явных итераций — вычисление величин на следующем шаге по времени при выполнении явного итерационного процесса, 2) метод совместных итераций — метод раздельных прогонок с однократным изменением коэффициентов искусственной вязкости на одной итерации прогонки и 3) улучшенный метод явных итераций с предикторно-корректирующей процедурой. В данном программном обеспечении эти три метода доступны для использования.

На рис. 3 представлены блок-схемы алгоритмов решения задач газовой динамики при использовании ПКРС с АИВ.

**5. Численные расчеты.** Для тестирования разработанного программного обеспечения выполнены расчеты классической задачи Сода (*Sod problem*) [13] о распаде произвольного разрыва и задачи Эйнфельда (*Einfeldt problem*) [14] о распространении двух симметричных волн разрежения в противоположные стороны.

**5.1. Задача Сода.** В левой и правой частях табл. 1 представлены начальные данные (плотность, скорость, давление) для задачи Сода [13]. На границах заданы постоянные граничные условия, равные

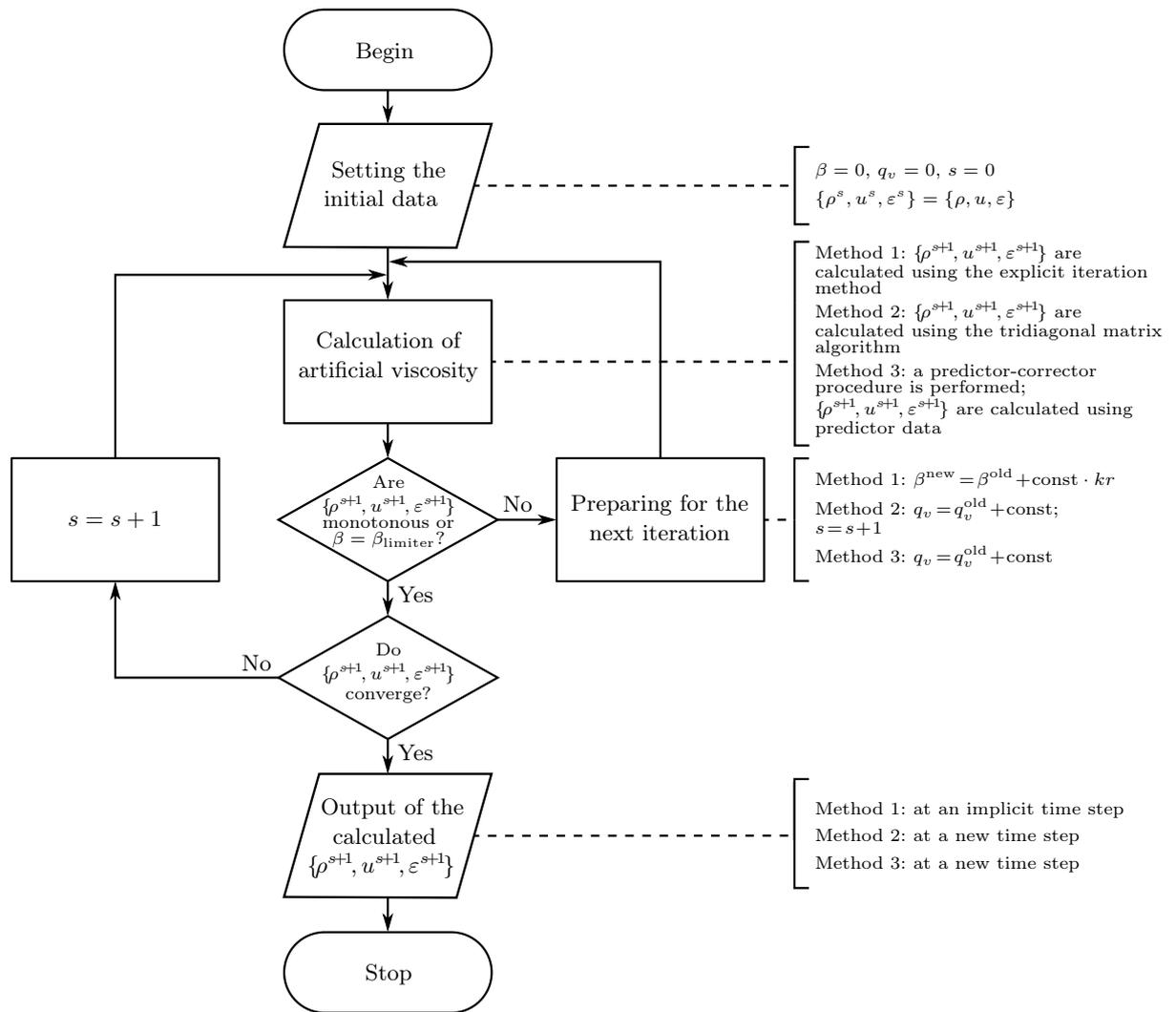


Рис. 3. Блок-схема трех методов решения задач газовой динамики  
 Fig. 3. Flowcharts of three methods for solving gas dynamics problems

начальным. За систему единиц измерения в расчетах принята система СИ. Показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Расчетная область является пространственным отрезком  $[-5, 5]$ . Момент времени окончания расчета  $T = 2.0$  с, шаг по времени  $\tau = 0.001$  с.

На рис. 4 представлены распределения плотности, скорости, давления и внутренней энергии. Из рис. 4 видим, что метод 2 улучшает результаты расчетов в зонах волны разрежения и контактного разрыва. При этом графики расчетов, выполненных методом 2, в большей мере приближаются к аналитическому решению, чем графики расчетов, выполненных методом 1, в зонах волны разрежения во всех профилях. Также благодаря выбору скоростной вязкости в зоне контактного разрыва при решении методом 2 полностью отсутствуют осцилляции, в то время как в численном решении, выполненном методом 1, наблюдаются осцилляции небольшой амплитуды. Отметим, что при решении методом 2 существенно сокращается процессорное время, потраченное на вычисления, и численное решение ближе к аналитическому решению, чем при использовании метода 1. Это происходит

Таблица 1. Начальные условия в задаче Сода  
 Table 1. Initial conditions of Sod problem

Левая область Left area			Правая область Right area		
$\rho$	$u$	$P$	$\rho$	$u$	$P$
1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1

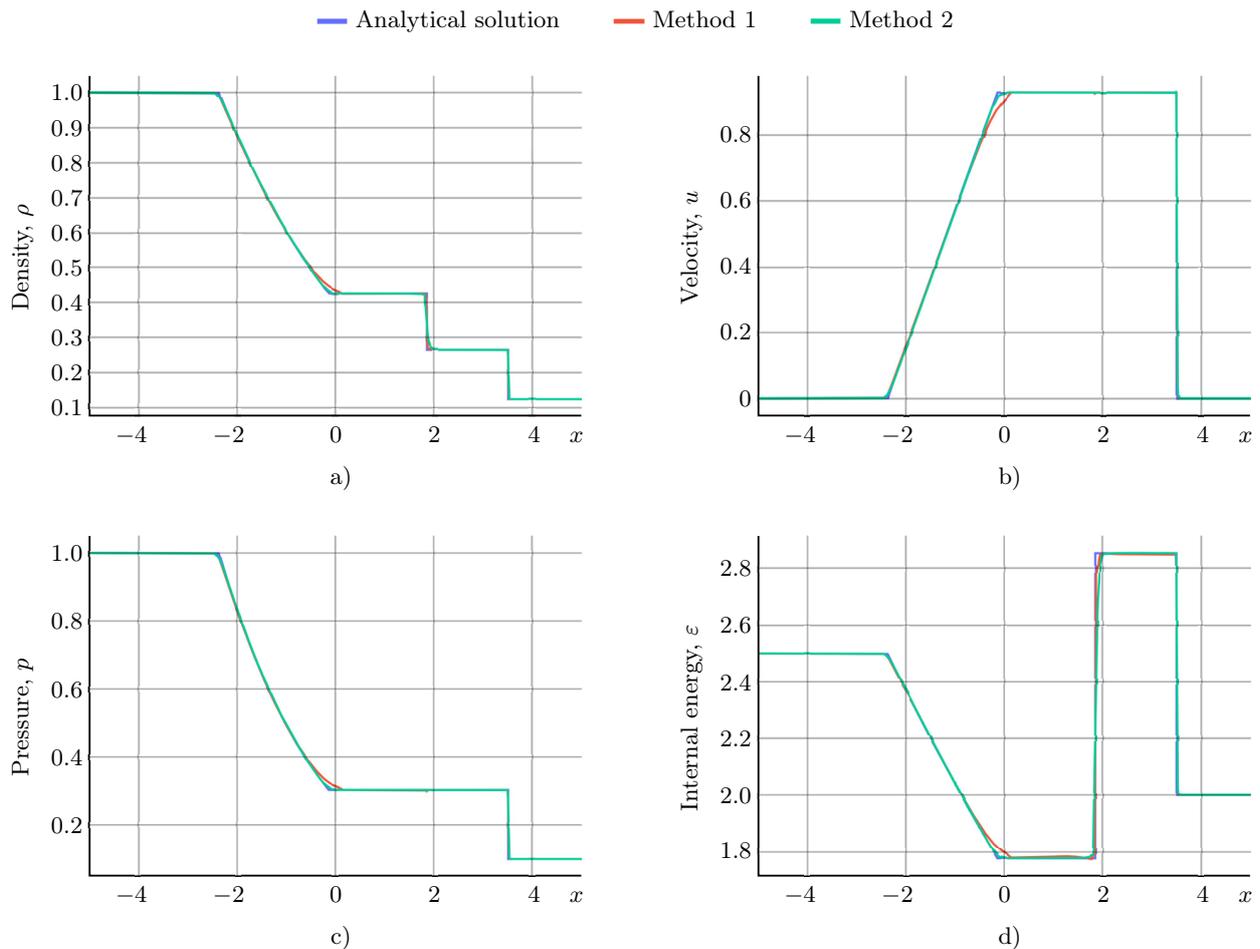


Рис. 4. Распределения а) плотности, б) скорости, в) давления, д) внутренней энергии по пространству, полученные в результате решения задачи Сода методом 1 (красная линия) и методом 2 (зеленая линия) для момента времени  $T = 2.0$  с, а также аналитическое решение (синяя линия)

Fig. 4. Distributions of a) density, b) velocity, c) pressure, d) internal energy in space, obtained as a result of solving the Sod problem by Method 1 (red line) and Method 2 (green line) for the time  $T = 2.0$  s, as well as the analytical solution (blue line)

в силу неявного способа нахождения приращений при использовании метода прогонки в итерационном процессе. По этой же причине во всех расчетах методом 2 параметр  $\beta$  достигал своего максимального значения при выборе АИВ. В расчетах полагалось  $\beta_{\text{limiter}} = 0.8$ ,  $\text{const}_\rho = 0.2$ ,  $\text{const}_u = 1.0$ .

Улучшенный метод явных итераций (метод 3) действительно уменьшил процессорное время и количество итераций для сходимости по сравнению с методом 1. На рис. 5 представлены распределения плотности, скорости, давления и внутренней энергии. Из рис. 5 видим, что точность решения в методе 3 существенно выше (в смысле приближения к аналитическому решению), чем в методе 1. Также в зоне контактного разрыва в методе 3 не наблюдается пика в профилях скорости и давления. Процессорное время в методе 3 на порядок меньше, чем в методе 1, и примерно такое же, как в методе 2. В методе 3 лимитер  $\beta_{\text{limiter}} = 0.2$  и константы приращений АИВ  $\text{const}_\rho = 1.0$ ,  $\text{const}_u = 0.5$ .

Задача Сода является наиболее распространенной при тестировании программных комплексов вычислительной газовой динамики, поскольку содержит в себе зоны разрежения, контактного разрыва и ударной волны. Результаты, полученные разработанным программным обеспечением, имеют очень хорошее совпадение с аналитическим решением.

**5.2. Задача Эйфельдта.** В левой и правой частях табл. 2 представлены начальные данные (плотность, скорость, давление) для задачи Эйфельдта [14]. На границах заданы постоянные граничные усло-

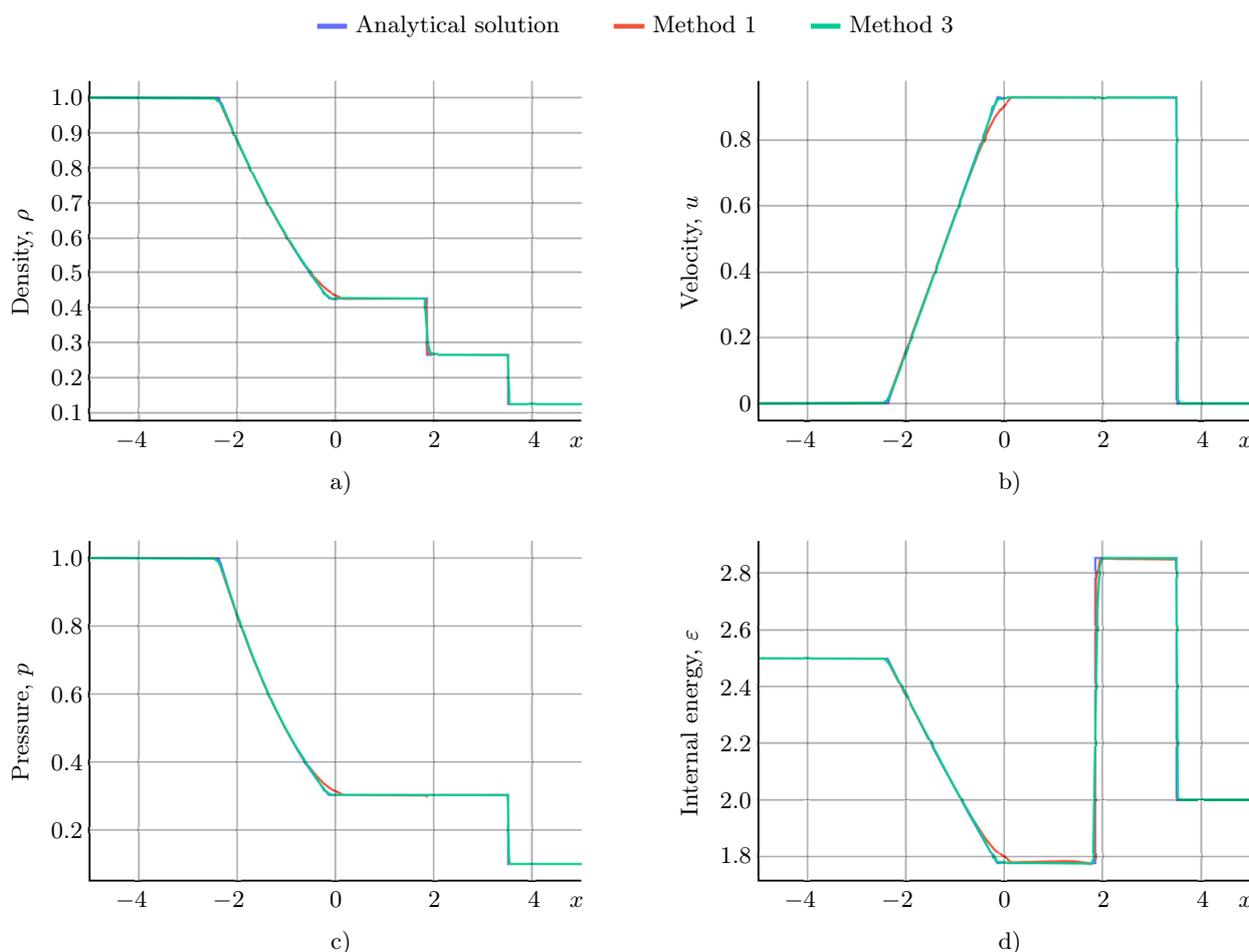


Рис. 5. Распределения а) плотности, б) скорости, в) давления и д) внутренней энергии по пространству, полученные в результате решения задачи Сода методом 1 (красная линия) и методом 3 (зеленая линия) для момента времени  $T = 2.0$  с, а также аналитическое решение (синяя линия)

Fig. 5. Distributions of a) density, b) velocity, c) pressure, d) internal energy in space, obtained as a result of solving the Sod problem by Method 1 (red line) and Method 3 (green line) for the time  $T = 2.0$  s, as well as the analytical solution (blue line)

вия, равные начальным. За систему единиц измерения в расчетах принята система СИ. Показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Расчетная область является пространственным отрезком  $[-1, 1]$ . Представлен пространственно-одномерный симметричный разлет газа с сингулярным разрывом скорости в начале координат и однородным термодинамическим  $(P, \rho)$  пространственным распределением. Причиной сингулярности является отсутствие аналитического решения при начальном моменте времени  $T_0 = 0.0$  с.

Так как в задаче Сода уже продемонстрирована эффективность разработанных в разделе 3 методов, то для задачи Эйнфельдта будут показаны результаты расчетов с использованием методов 2 и 3 на равномерных сетках в силу их большей эффективности по сравнению с методом 1. Все параметры  $\beta_{\text{limiter}}$ ,  $\text{const}_\rho$  и  $\text{const}_u$  для метода 2 и метода 3 выбираются так же, как и в задаче Сода.

При расчете с начального момента времени  $T_0 = 0.0$  с получены удовлетворительные профили плотности и давления. Однако существуют явные несовпадения и осцилляции в центре в профилях скорости и внутренней энергии из-за сингулярности решения в момент времени  $T_0 = 0.0$  с. В дальнейшем расчеты на-

Таблица 2. Начальные условия в задаче Эйнфельдта

Table 2. Initial conditions of Einfeldt problem

Левая область Left area			Правая область Right area		
$\rho$	$u$	$P$	$\rho$	$u$	$P$
1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4

чинаются с некоторого более позднего момента времени, благодаря чему уменьшается влияние начальной сингулярности.

С помощью аналитического решения, полученного сшивкой инвариантов Римана с зонами постоянного течения [14], правое положение границы стабильной “горизонтальной” зоны вычисляется по формуле

$$x_* = \left( c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} u_R \right) T_0, \tag{14}$$

где  $c_0 = \sqrt{\gamma P / \rho}$  — скорость звука в начальный момент времени,  $u_R = 2.0$  — начальная скорость на правой стороне. Аналогично левое положение такой границы находится симметрично относительно центральной точки. При этом для уменьшения влияния сингулярности начальное значение величины  $x_*$  выбрано больше длины одного пространственного шага  $h$ . При  $h = 0.002$ , согласно (14)  $T_0 \gtrsim 0.006$  с. Далее расчеты будут выполняться с моментов  $T_0 = 0.01$  с (один узел расположен правее точки центра в “горизонтальной” зоне) и  $T_0 = 0.05$  с (восемь узлов находятся правее точки центра в “горизонтальной” зоне).

На рис. 6 представлены распределения плотности, скорости, давления и внутренней энергии с начального момента  $T_0 = 0.01$  с и показано, что метод 2 и метод 3 дают почти одинаковые результаты высокой точности. Подход уменьшения сингулярности действительно повышает точность расчета, хотя в центре профилей скорости и внутренней энергии остались мелкие осцилляции. Эти колебания возникают из-за сингулярности начальных данных в задаче Эйнфельдта, задаваемых в момент времени  $T_0$ ,

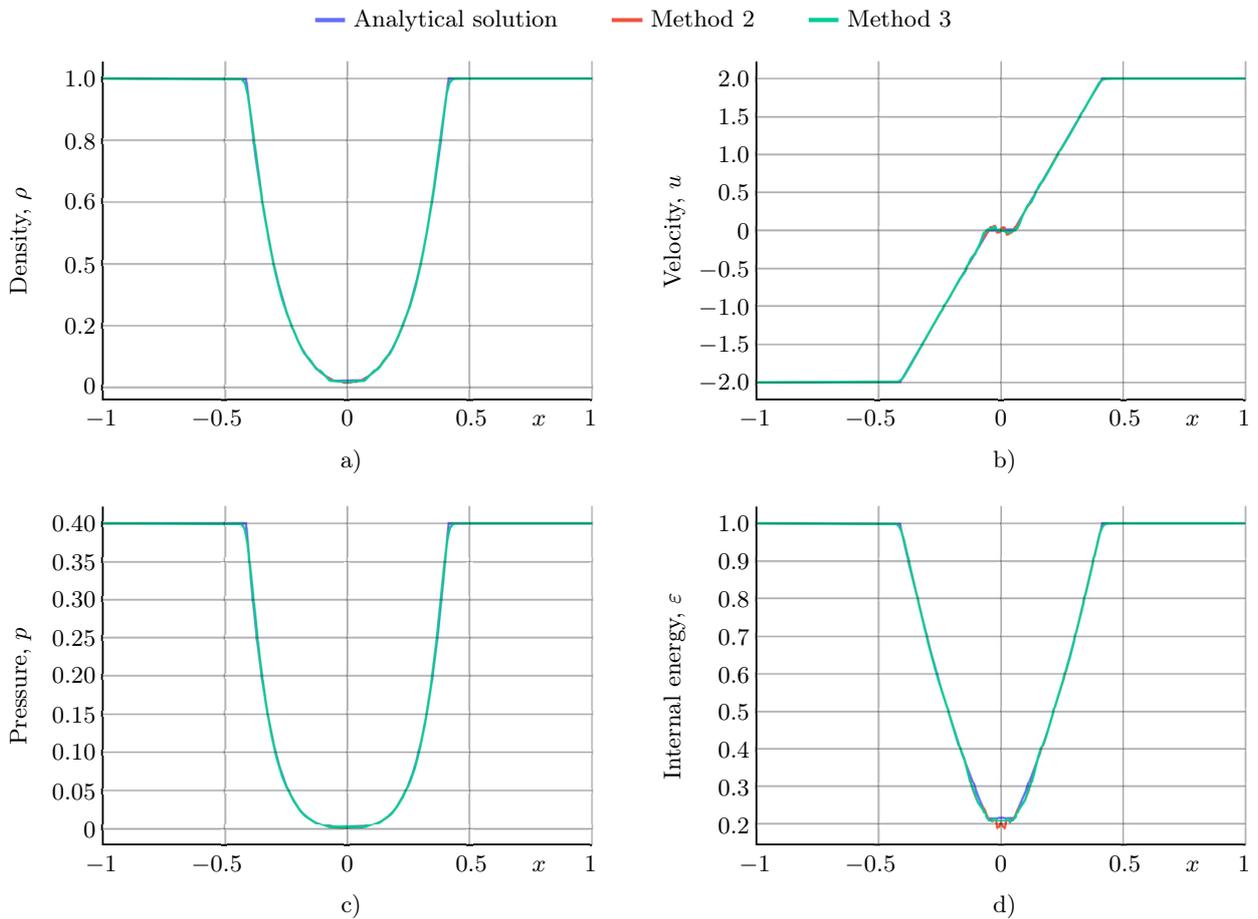


Рис. 6. Распределения а) плотности, б) скорости, в) давления, д) внутренней энергии по пространству, полученные в результате решения задачи Эйнфельдта методом 2 (красная линия) и методом 3 (зеленая линия) для момента времени  $T = 0.15$  с при начальном моменте времени  $T_0 = 0.01$  с, а также аналитическое решение (синяя линия)

Fig. 6. Distributions of a) density, b) velocity, c) pressure, d) internal energy in space, obtained as a result of solving the Einfeldt problem by Method 2 (red line) and Method 3 (green line) for the moment of time  $T = 0.15$  s at the initial moment of time  $T_0 = 0.01$  s, as well as the analytical solution (blue line)

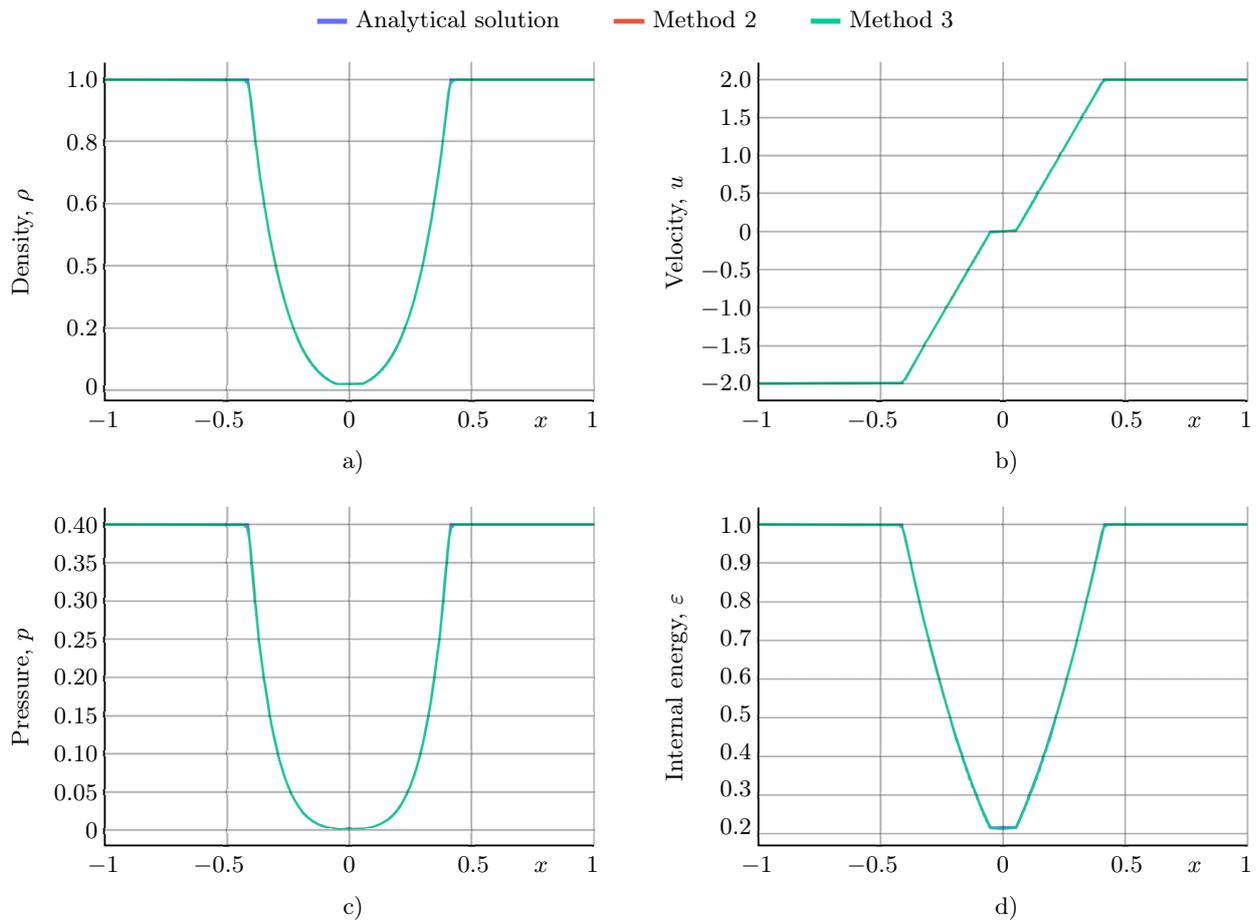


Рис. 7. Распределения а) плотности, б) скорости, в) давления, д) внутренней энергии по пространству, полученные в результате решения задачи Эйнфельдта методом 2 (красная линия) и методом 3 (зеленая линия) для момента времени  $T = 0.15$  с при начальном моменте времени  $T_0 = 0.05$  с, а также аналитическое решение (синяя линия)

Fig. 7. Distributions of a) density, b) velocity, c) pressure, d) internal energy in space, obtained as a result of solving the Einfeldt problem by Method 2 (red line) and Method 3 (green line) for the moment of time  $T = 0.15$  s at the initial moment of time  $T_0 = 0.05$  s, as well as the analytical solution (blue line)

стремящийся к нулю. Они естественным образом исчезают при согласованном изменении момента начала расчета.

На рис. 7 представлены распределения плотности, скорости, давления и внутренней энергии с начального момента  $T_0 = 0.05$  с, которые показывают, что сингулярность влияет на точность результатов расчета. При начальном моменте  $T_0 = 0.05$  с графики расчетов методом 2 и методом 3 практически совпадают с графиками аналитического решения.

В работе [15] решается задача Эйнфельдта также с начального момента  $T_0 = 0.01$  с. Распределения плотности, скорости, давления и температуры, полученные в результате расчетов в работе [15], совпадают с результатами, полученными методом 3, с хорошей точностью.

**6. Заключение.** Представлено программное обеспечение для численного решения задач газовой динамики на основе полностью консервативной разностной схемы с адаптивной искусственной вязкостью. Разработанный комплекс программ реализует предложенные вычислительные алгоритмы в рамках клиент-серверной архитектуры, включающей веб-интерфейс на React, серверное приложение на Go и вычислительное ядро на C++. Такое разделение позволяет обеспечить масштабируемость и удобство эксплуатации программы, а также простоту взаимодействия пользователя с системой через веб-браузер. Проведены численные эксперименты на классических тестовых задачах газовой динамики — задачах Сода и Эйнфельдта. Полученные результаты демонстрируют корректное воспроизведение ударных волн, разрывов и контактных границ без осцилляций и с сохранением консервативных переменных системы.

Это подтверждает эффективность предложенной схемы адаптивной регуляризации и ее устойчивость при решении гиперболических систем уравнений в консервативной форме. Разработанное программное обеспечение может служить базой для дальнейшего расширения — включения двумерных и трехмерных постановок задач, а также учета теплопроводности других процессов. Полученные результаты показывают, что созданный комплекс является надежным и удобным инструментом для моделирования широкого класса газодинамических задач и может быть использован как в исследовательских, так и в инженерных приложениях.

### Список литературы

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. <https://samarskii.ru/books/book1992.pdf>. (Дата обращения: 9 февраля 2026).
2. Popov Yu.P., Samarskii A.A. Completely conservative difference schemes // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1969. 9, N 4. 296–305. [https://samarskii.ru/articles/1969/1969\\_011.pdf](https://samarskii.ru/articles/1969/1969_011.pdf). Cited February 9, 2026.
3. Kuz'min A.V., Makarov V.L. An algorithm for constructing completely conservative difference schemes // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1982. 22, N 1. 128–138. doi 10.1016/0041-5553(82)90170-7.
4. Kuz'min A.V., Makarov V.L., Meladze G.V. A completely conservative difference scheme for gas-dynamics equations in Eulerian variables // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1980. 20, N 1. 187–198. doi 10.1016/0041-5553(80)90072-5.
5. Popov I.V., Fryazinov I.V. Method of adaptive artificial viscosity for gas dynamics equations on triangular and tetrahedral grids // Mathematical Models and Computer Simulations. 2013. 5. 50–62. doi 10.1134/S2070048213010080.
6. Ladonkina M., Podryga V., Poveshchenko Yu., Zhang H. Methods of selecting adaptive artificial viscosity in completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables // Frontiers in Heat and Mass Transfer. 2025. 23, N 6. 1789–1809. doi 10.32604/fhmt.2025.066953.
7. Nginx: High-performance web server and reverse. <https://nginx.org/en/docs/>. Cited February 9, 2026.
8. React — A JavaScript library for building user interfaces. <https://react.dev/>. Cited February 10, 2026.
9. Go programming language. <https://go.dev>. Cited February 10, 2026.
10. The C++ programming language (ISO/IEC 14882:2020(E)). International Organization for Standardization, Geneva. <https://www.iso.org/standard/83626.html>. Cited February 10, 2026.
11. Ладонкина М.Е., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал СВМО. 2022. 24, № 3. 317–330. doi 10.15507/2079-6900.24.202203.317-330.
12. Plotly.js — The open source JavaScript graphing library. Plotly Technologies Inc. <https://plotly.com/javascript/>. Cited February 10, 2026.
13. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1978. 27, N 1. 1–31. doi 10.1016/0021-9991(78)90023-2.
14. Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjögren B. On Godunov-type methods near low densities // Journal of Computational Physics. 1991. 92, N 2. 273–295. doi 10.1016/0021-9991(91)90211-3.
15. Rahimly O.R., Poveshchenko Yu.A., Popov S.B. Two-layer 1D completely conservative difference schemes of gas dynamics with adaptive regularization // Mathematical Models and Computer Simulations. 2022. 14. 771–782. doi 10.1134/S2070048222050118.

Получена  
13 января 2026 г.

Принята  
6 февраля 2026 г.

Опубликована  
27 февраля 2026 г.

### Информация об авторе

Хаочэнь Чжан — аспирант; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Физтех-школа прикладной математики и информатики, кафедра математического моделирования и прикладной математики, Институтский пер., 9, 141701, Долгопрудный, Российская Федерация.



## References

1. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Difference Methods for Solving Problems of Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1992) [in Russian]. <https://samarskii.ru/books/book1992.pdf>. Cited February 9, 2026.
2. Yu. P. Popov and A. A. Samarskii, “Completely Conservative Difference Schemes,” *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **9** (4), 296–305 (1969). [https://samarskii.ru/articles/1969/1969\\_011.pdf](https://samarskii.ru/articles/1969/1969_011.pdf). Cited February 9, 2026.
3. A. V. Kuz'min and V. L. Makarov, “An Algorithm for Constructing Completely Conservative Difference Schemes,” *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **22** (1), 128–138 (1982). doi 10.1016/0041-5553(82)90170-7.
4. A. V. Kuz'min, V. L. Makarov and G. V. Meladze, “A Completely Conservative Difference Scheme for Gas-Dynamics Equations in Eulerian Variables,” *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **20** (1), 187–198 (1980). doi 10.1016/0041-5553(80)90072-5.
5. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “Method of Adaptive Artificial Viscosity for Gas Dynamics Equations on Triangular and Tetrahedral Grids,” *Mathematical Models and Computer Simulations* **5**, 50–62 (2013). doi 10.1134/S2070048213010080.
6. M. Ladonkina, V. Podryga, Yu. Poveshchenko and H. Zhang, “Methods of Selecting Adaptive Artificial Viscosity in Completely Conservative Difference Schemes for Gas Dynamics Equations in Euler Variables,” *Frontiers in Heat and Mass Transfer* **23** (6), 1789–1809 (2025). doi 10.32604/fhmt.2025.066953.
7. Nginx: High-Performance Web Server and Reverse. <https://nginx.org/en/docs/>. Cited February 9, 2026.
8. React — A JavaScript Library for Building User Interfaces. <https://react.dev/>. Cited February 10, 2026.
9. Go Programming Language. <https://go.dev>. Cited February 10, 2026.
10. The C++ Programming Language (ISO/IEC 14882:2020(E)). International Organization for Standardization, Geneva. <https://www.iso.org/standard/83626.html>. Cited February 10, 2026.
11. M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveshchenko, O. R. Ragimli and H. Zhang, “Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables,” *J. SVMO*. **24** (3), 317–330 (2022). doi 10.15507/2079-6900.24.202203.317-330.
12. Plotly.js — The Open Source JavaScript Graphing Library. Plotly Technologies Inc. <https://plotly.com/javascript/>. Cited February 10, 2026.
13. G. A. Sod, “A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws,” *Journal of Computational Physics* **27** (1), 1–31 (1978). doi 10.1016/0021-9991(78)90023-2.
14. B. Einfeldt, C. D. Munz, P. L. Roe and B. Sjögren, “On Godunov-Type Methods Near Low Densities,” *Journal of Computational Physics* **92** (2), 273–295 (1991). doi 10.1016/0021-9991(91)90211-3.
15. O. R. Rahimly, Yu. A. Poveshchenko and S. B. Popov, “Two-Layer 1D Completely Conservative Difference Schemes of Gas Dynamics with Adaptive Regularization,” *Mathematical Models and Computer Simulations* **14**, 771–782 (2022). doi 10.1134/S2070048222050118.

*Received*  
 January 13, 2026

*Accepted*  
 February 6, 2026

*Published*  
 February 27, 2026

## Information about the author

*Haochen Zhang* — PhD student; Moscow Institute of Physics and Technology, Phystech School of Applied Mathematics and Computer Science, Department of Mathematical Modeling and Applied Mathematics, Institutskiy pereulok, 9, 141701, Dolgoprudny, Russia.