



Оценка трехфазных относительных проницаемостей по результатам двухфазного численного моделирования на масштабе пор

Д. И. Прохоров

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-8547-930X, e-mail: prokhorovdi@ipgg.sbras.ru

В. Д. Чепеленкова

Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0009-0007-3442-9891, e-mail: chepelenkovavd@ipgg.sbras.ru

В. В. Лисица

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: v.v.lisitsa@math.nsc.ru

Аннотация: В статье представлен параллельный алгоритм для численного моделирования двухфазных потоков в цифровых изображениях горных пород. Основу алгоритма составляют метод фазового поля и конечно-разностный подход, включающий решение уравнения Пуассона методом сопряженных градиентов со спектральным предобуславливателем. Для параллелизации алгоритма применяются метод декомпозиции расчетной области и технологии CUDA и MPI. Представленный алгоритм используется для расчета относительных фазовых проницаемостей методом установившегося режима фильтрации для нефти и воды, нефти и CO₂ в сверхкритической форме. На основе рассчитанных двухфазных проницаемостей проводится построение тернарных диаграмм относительной проницаемости для трехфазной системы с использованием моделей Стоуна I, Стоуна II и Бейкера. Проводится обоснование выбора параметров жидкостей для двухфазного моделирования.

Ключевые слова: вычислительная физика горных пород, декомпозиция расчетной области, моделирование на масштабе пор, двухфазные потоки, трехфазная относительная проницаемость.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-00028.

Для цитирования: Прохоров Д.И., Чепеленкова В.Д., Лисица В.В. Оценка трехфазных относительных проницаемостей по результатам двухфазного численного моделирования на масштабе пор // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 1. 101–117. doi 10.26089/NumMet.v27r108.



Estimation of three-phase relative permeabilities from the results of two-phase pore-scale numerical simulation

Dmitry I. Prokhorov

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0002-8547-930X, e-mail: prokhorovdi@ipgg.sbras.ru

Veronica D. Chepelenkova

Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0009-0007-3442-9891, e-mail: chepelenkovavd@ipgg.sbras.ru

Vadim V. Lisitsa

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: v.v.lisitsa@math.nsc.ru

Abstract: The article presents a parallel algorithm for numerical simulation of two-phase flows in digital rock images. The algorithm is based on the phase-field method and the finite-difference approach, which includes solving the Poisson equation using conjugate gradients with a spectral preconditioner. The domain decomposition method and CUDA and MPI technologies are used to parallelize the algorithm. The algorithm is applied to calculate the relative phase permeabilities using the steady-state method for oil and water, oil and CO₂ in a supercritical form. Based on the calculated two-phase permeabilities, ternary relative permeability diagrams are constructed for a three-phase system using the Stone I, Stone II, and Baker models. The justification of the choice of liquid parameters for two-phase modeling is carried out.

Keywords: digital rock physics, domain decomposition, pore-scale simulation, two-phase flows, three-phase relative permeability.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation under grant No. 24-71-00028.

For citation: D. I. Prokhorov, V. D. Chepelenkova, V. V. Lisitsa, “Estimation of three-phase relative permeabilities from the results of two-phase pore-scale numerical simulation,” *Numerical Methods and Programming*. 27 (1), 101–117 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r108.

1. Введение. Относительная проницаемость является величиной, характеризующей то, насколько легко одна жидкость может протекать сквозь пористую среду в присутствии других жидкостей. Необходимость расчета этой величины связана с тем, что углеводородный коллектор может содержать нефть, воду и газ в своем поровом пространстве. Использование вторичных методов нефтедобычи после заводнения приводит к тому, что в поровом пространстве появляются и другие жидкости. Одним из возможных способов интенсификации добычи нефти в сильнозаводненных резервуарах является закачка CO₂ в сверхкритическом состоянии. Закачка CO₂ также способствует решению задачи улавливания и хранения углерода, в связи с чем увеличивается и значимость оценки относительных фазовых проницаемостей: помимо обеспечения оптимального режима нефтедобычи, необходимо достичь максимальной иммобилизации CO₂ в коллекторе, а также обеспечить целостность хранилища.

Одним из лабораторных способов определения двухфазных относительных проницаемостей является метод установившегося режима фильтрации. В этом эксперименте обе жидкости закачиваются одновременно. Для определения относительной проницаемости измеряются расход и перепад давления. На основе этих данных рассчитывается относительная и эффективная проницаемость. Затем скорость закачки изменяется для получения нового набора значений. Время, необходимое для того, чтобы для каждой скорости закачки достичь установившегося режима, составляет от нескольких часов до нескольких дней в зависимости от абсолютной проницаемости [1]. Аналогичный подход может быть использован для оценки трехфазных проницаемостей [2]. Однако наличие третьей фазы значительно увеличивает время и сложность экспериментов, поэтому трехфазные проницаемости рассчитываются на основе двухфазных [3–5].



Целью данной работы является разработка численной методики оценки трехфазных относительных проницаемостей по микротомографическим изображениям горной породы. Для моделирования двухфазных потоков на масштабе пор используется метод конечных разностей [6, 7] совместно с методом фазового поля [8–10]. Выбор такой комбинации методов обусловлен следующими причинами:

- 1) граница раздела сегментированных цифровых изображений горных пород естественным образом переносится на прямоугольную конечно-разностную сетку [11, 12];
- 2) использование прямоугольных конечно-разностных сеток значительно упрощает эффективную параллельную реализацию алгоритма, основанную на технологии CUDA;
- 3) метод фазового поля позволяет корректно учесть углы смачивания жидкостей [13], что является важнейшим условием для физического заполнения пор.

В рассматриваемой постановке горная порода считается мономинеральной без включений с неразрешенной пористостью. Такое упрощение позволяет единым образом задать углы смачивания, а также проводить расчет потока в поровом пространстве путем решения уравнения Стокса, без совместного решения уравнения Дарси или использования уравнения Навье–Стокса–Бринкмана [14]. Такой подход не всегда отражает действительную структуру образца керна, но поскольку моделирование проводится на масштабе нескольких сотен микрометров, возможно выбрать область, в которой это предположение близко к истине. В противном случае необходимо использование многомасштабных моделей.

Предложенный подход основывается на совместном решении уравнений Стокса и Кана–Хиллиарда [8, 15–17]. Система уравнений разбивается по физическим процессам. Решение уравнения Стокса проводится на основе явной аппроксимации по времени в сочетании с проекционным методом [18, 19]. Для решения уравнения Пуассона используется метод сопряженных градиентов со спектральным предобуславливателем [20]. Для уравнения Кана–Хиллиарда также используется явная конечно-разностная схема: диффузионный член аппроксимируется центральными разностями второго порядка, а для аппроксимации адвекционного используется противопоточная схема [21]. Программная реализация распараллелена для одного GPU с использованием технологии CUDA и для случая нескольких GPU с использованием CUDA и MPI.

Работа организована следующим образом: в разделе 2 представлена дифференциальная постановка задачи, в разделе 3 описан численный метод, а его программная реализация описана в разделе 4. В разделе 5 обоснован выбор параметров трехфазной системы, а в разделе 6 представлены результаты двухфазного моделирования и построенные по ним оценки трехфазных проницаемостей.

2. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерную область $\Omega = [0, X_1] \times [0, X_2] \times [0, X_3]$, где X_1, X_2, X_3 — размер цифрового изображения горной породы по направлениям x_1, x_2, x_3 (рис. 1). Воксели сегментированного цифрового изображения принимают два значения: 0 (поры) или 1 (порода). Такое разделение делит область Ω на две подобласти Ω_p (поровое пространство) и Ω_r (матрица породы), где $\Omega = \Omega_p \cup \Omega_r$, а $\Omega_p \cap \Omega_r = \Gamma$ — граница между поровым пространством и матрицей породы. Предполагается, что экспери-

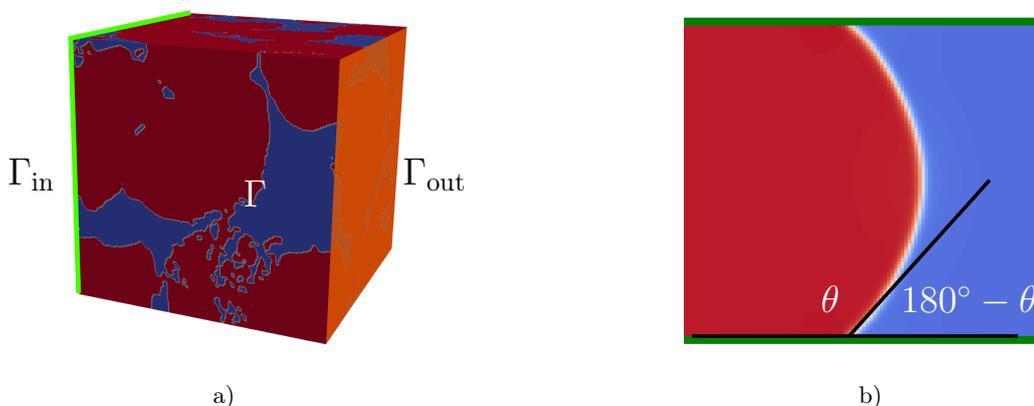


Рис. 1. Иллюстрация граничных условий: а) зеленым и оранжевым обозначены входная и выходная границы; б) на границе раздела породы и порового пространства задано условие на угол смачивания

Fig. 1. Illustration of boundary conditions: a) the inlet and outlet boundaries are highlighted in green and orange; b) the wetting angle condition is set at the interface between the rock and the pore space

мент проводится в непроницаемой трубке, поэтому все воксели на границах области Ω в направлении x_2 и x_3 имеют значение 1. Следовательно, граничные условия на этих границах Ω совпадают с условиями на Γ . Границы $x_1 = 0$ и $x_1 = X_1$ остаются открытыми и обозначаются Γ_{in} и Γ_{out} . В поровом пространстве определен параметр фазового поля $\varphi \in [0, 1]$. Этот параметр задает долю одного из флюидов. Соответственно, $1 - \varphi$ — доля другого флюида.

Эволюция пространственного распределения жидкостей определяется уравнением Кана–Хиллиарда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi &= \nabla \cdot (M(\varphi) \nabla \mu), \\ \mu &= F'(\varphi) - \epsilon^2 \Delta \varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

где $M(\varphi)$ — коэффициент мобильности, ϵ — параметр, определяющий ширину границы раздела фаз, $F(\varphi) = \varphi^2(1 - \varphi)^2$ — потенциал свободной энергии однородной системы. Вектор \mathbf{u} — вектор скорости потока, который определяется из уравнения Стокса:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla p + 2\nabla \cdot (\nu(\varphi) \varepsilon(\mathbf{u})) + \mathbf{F}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\rho(\varphi)$ — плотность жидкости, $\nu(\varphi)$ — вязкость жидкости, $\varepsilon(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформаций, p — давление. Вектор \mathbf{F} обозначает внешние силы, включая силу поверхностного натяжения:

$$\mathbf{F}_s = -\frac{6\sqrt{2}}{\epsilon} \mu \nabla \varphi.$$

На границе Γ накладывается условие прилипания на скорость $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \mathbf{0}$ и условие Неймана на давление $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. Для нормальной компоненты вектора скорости u_1 задается условие Дирихле на границе Γ_{in} и условие Неймана на границе Γ_{out} , а для касательных компонент u_2, u_3 условие Дирихле задается как на входной, так и на выходной границе:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{\text{in}}, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{out}}, \\ u_2 &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}, \\ u_3 &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}. \end{aligned}$$

На границе Γ_{in} для давления p задается условие Неймана, а на границе Γ_{out} — условие Дирихле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}}, \\ p &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{out}}. \end{aligned}$$

Такая постановка граничного условия для давления позволяет получить единственное решение, а также приводит к невырожденной задаче при решении уравнения Пуассона.

Граничными условиями для уравнения Кана–Хиллиарда являются:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\sqrt{2}}{\epsilon} (\varphi^2 - \varphi) \cos \theta, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \varphi &= \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}}, \\ \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{out}}, \\ \nabla \mu \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma \cup \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Первое условие в (3) определяет угол смачивания θ . Второе условие определяет соотношение закачиваемых жидкостей.



3. Численные методы.

3.1. Конечно-разностная схема. Для решения системы уравнений (1), (2) используется проекционная схема на сдвинутых сетках, где переменные p, μ, φ относятся к целочисленным узлам, а переменные u_1, u_2, u_3 относятся к узлам с одной полуцелой координатой.

Явная по времени аппроксимация шага предиктора для уравнения Стокса:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{A}_1^2[\varphi]_{i+1/2jk}) \frac{(u_1)_{i+1/2jk}^{n+1/2} - (u_1)_{i+1/2jk}^n}{\tau_{\text{ns}}} &= 2 \sum_{m=1}^3 \mathbf{D}_m^1 [\nu(\varphi)\varepsilon_{1m}]_{i+1/2jk}^n + F_1, \\ \rho(\mathbf{A}_2^2[\varphi]_{ij+1/2k}) \frac{(u_2)_{ij+1/2k}^{n+1/2} - (u_2)_{ij+1/2k}^n}{\tau_{\text{ns}}} &= 2 \sum_{m=1}^3 \mathbf{D}_m^1 [\nu(\varphi)\varepsilon_{2m}]_{ij+1/2k}^n + F_2, \\ \rho(\mathbf{A}_3^2[\varphi]_{ijk+1/2}) \frac{(u_3)_{ijk+1/2}^{n+1/2} - (u_3)_{ijk+1/2}^n}{\tau_{\text{ns}}} &= 2 \sum_{m=1}^3 \mathbf{D}_m^1 [\nu(\varphi)\varepsilon_{3m}]_{ijk+1/2}^n + F_3, \end{aligned}$$

где диффузионный член аппроксимируется как

$$\begin{aligned} (\nu(\varphi)\varepsilon_{11}^n)_{ijk}^n &= \nu(\varphi_{ijk}) \mathbf{D}_1^1 [u_1]^n, \\ (\nu(\varphi)\varepsilon_{22}^n)_{ijk}^n &= \nu(\varphi_{ijk}) \mathbf{D}_2^1 [u_2]^n, \\ (\nu(\varphi)\varepsilon_{33}^n)_{ijk}^n &= \nu(\varphi_{ijk}) \mathbf{D}_3^1 [u_3]^n, \\ (\nu(\varphi)\varepsilon_{12}^n)_{ijk}^n &= \nu(\mathbf{A}_{12}^4[\varphi]_{i+1/2j+1/2k}) (\mathbf{D}_1^1 [u_2]^n + \mathbf{D}_2^1 [u_1]^n), \\ (\nu(\varphi)\varepsilon_{13}^n)_{ijk}^n &= \nu(\mathbf{A}_{13}^4[\varphi]_{i+1/2jk+1/2}) (\mathbf{D}_1^1 [u_3]^n + \mathbf{D}_3^1 [u_1]^n), \\ (\nu(\varphi)\varepsilon_{23}^n)_{ijk}^n &= \nu(\mathbf{A}_{23}^4[\varphi]_{ij+1/2k+1/2}) (\mathbf{D}_3^1 [u_2]^n + \mathbf{D}_2^1 [u_3]^n). \end{aligned}$$

Конечно-разностная аппроксимация уравнения Пуассона:

$$\mathbf{LP}[\rho(\varphi), p]_{ijk}^{n+1} = \frac{1}{\tau_{\text{ns}}} \sum_{m=1}^3 \mathbf{D}_m^1 [(u_m)^{n+1/2}]_{ijk}.$$

Шаг корректора:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{A}_1^2[\varphi]_{i+1/2jk}) \frac{(u_1)_{i+1/2jk}^{n+1} - (u_1)_{i+1/2jk}^{n+1/2}}{\tau_{\text{ns}}} &= \mathbf{D}_1^1 [p]_{i+1/2jk}^{n+1} \\ \rho(\mathbf{A}_2^2[\varphi]_{ij+1/2k}) \frac{(u_2)_{ij+1/2k}^{n+1} - (u_2)_{ij+1/2k}^{n+1/2}}{\tau_{\text{ns}}} &= \mathbf{D}_2^1 [p]_{ij+1/2k}^{n+1} \\ \rho(\mathbf{A}_3^2[\varphi]_{ijk+1/2}) \frac{(u_3)_{ijk+1/2}^{n+1} - (u_3)_{ijk+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{\text{ns}}} &= \mathbf{D}_3^1 [p]_{ijk+1/2}^{n+1}. \end{aligned}$$

Для уравнения Кана–Хиллиарда также используется явная конечно-разностная аппроксимация по времени

$$\frac{\varphi_{ijk}^{n+1} - \varphi_{ijk}^n}{\tau_{\text{ch}}} + \sum_{m=1}^3 \mathbf{D}_m^U [(u_m)^{n+1}, \varphi^n]_{ijk} = M(\varphi_{ijk}^n) \mathbf{L}[\mu]_{ijk}^n,$$

где химический потенциал μ имеет вид

$$\mu_{ijk}^n = 2\varphi_{ijk}^n (2\varphi_{ijk}^n - 1) (\varphi_{ijk}^n - 1) - \epsilon^2 \mathbf{L}[\varphi]_{ijk}^n.$$

Обозначения D , LP , L соответствуют конечно-разностным операторам, аппроксимирующим производные по пространственным направлениям, A — оператор усреднения по пространству. Для краткости представлены операторы только для одного направления.

Центральная разность первого порядка на сдвинутых сетках:

$$D_1^1[g]_{ijk}^n = \frac{g_{i+1/2jk}^n - g_{i-1/2jk}^n}{h_1}.$$

Противопоточная аппроксимация адвекционного члена в уравнении Кана–Хиллиарда:

$$D_1^U[(u_1)^{n+1}, \varphi^n]_{ijk} = \frac{(U_1)_{i+1/2jk}^n - (U_1)_{i-1/2jk}^n}{h_1},$$

$$(U_1)_{i+1/2jk}^n = \begin{cases} (u_1)_{i+1/2jk}^{n+1} \varphi_{i+1jk}^n, & (u_1)_{i+1/2jk}^{n+1} < 0, \\ (u_1)_{i+1/2jk}^{n+1} \varphi_{ijk}^n, & (u_1)_{i+1/2jk}^{n+1} \geq 0. \end{cases}$$

Конечно-разностный оператор Лапласа на сдвинутых сетках:

$$L[g]_{ijk}^n = D_1^1[D_1^1[g]]_{ijk}^n + D_2^1[D_2^1[g]]_{ijk}^n + D_3^1[D_3^1[g]]_{ijk}^n.$$

Оператор Лапласа в уравнении Пуассона для давления:

$$LP[\rho(\varphi), p]_{ijk}^n = \frac{D_1^1[p]_{i+1/2jk}^n}{\rho(A_1^2[\varphi]_{i+1/2jk})h_1} - \frac{D_1^1[p]_{i-1/2jk}^n}{\rho(A_1^2[\varphi]_{i-1/2jk})h_1} +$$

$$+ \frac{D_1^2[p]_{ij+1/2k}^n}{\rho(A_1^2[\varphi]_{ij+1/2k})h_2} - \frac{D_1^2[p]_{ij-1/2k}^n}{\rho(A_1^2[\varphi]_{ij-1/2k})h_2} +$$

$$+ \frac{D_1^3[p]_{ijk+1/2}^n}{\rho(A_1^2[\varphi]_{ijk+1/2})h_3} - \frac{D_1^3[p]_{ijk-1/2}^n}{\rho(A_1^2[\varphi]_{ijk-1/2})h_3}.$$

Операторы усреднения по пространству:

$$A_1^2[g]_{i+1/2jk} = \frac{g_{i+1jk} + g_{ijk}}{2},$$

$$A_{12}^4[g]_{i+1/2j+1/2k} = \frac{g_{i+1jk} + g_{ijk} + g_{ij+1k} + g_{i+1j+1k}}{4},$$

где верхний индекс обозначает число узлов сетки, участвующих в усреднении, а нижний индекс обозначает пространственные направления, по которым проводится усреднение.

Функции $\rho(\varphi)$, $\nu(\varphi)$ обозначают среднюю плотность и вязкость для жидкостей при заданном значении параметра фазового поля:

$$\rho(\varphi) = \rho_1\varphi + \rho_0(1 - \varphi),$$

$$\nu(\varphi) = \nu_1\varphi + \nu_0(1 - \varphi).$$

В общем случае шаги по времени для уравнения Стокса и уравнения Кана–Хиллиарда не равны ($\tau_{ns} \neq \tau_{ch}$), поэтому для расчетов выбирается $\tau_{ch} = k\tau_{ns}$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, за одну итерацию для уравнения Стокса может выполняться несколько итераций уравнения Кана–Хиллиарда. Ширина границы раздела фазового поля соответствует трем шагам пространственной сетки: $\epsilon = 3h$.

Использование проекционной схемы требует решения уравнения Пуассона для давления. Для решения уравнения Пуассона применен метод сопряженных градиентов [22] со спектральным предобуславливателем [23].

3.2. Спектральный предобуславливатель. В качестве предобуславливателя используется оператор Лапласа L для однородной среды ($\rho = 1$). Обозначим матрицу оператора L через L и представим ее в виде суммы трех ленточных матриц:

$$L = \frac{1}{h_1^2}L_1 + \frac{1}{h_2^2}L_2 + \frac{1}{h_3^2}L_3.$$



Данные матрицы представляют собой аппроксимации вторых пространственных производных по соответствующим направлениям. Матрица L_1 — трехдиагональная, L_2 и L_3 также имеют три ненулевые диагонали, однако дополнительные диагонали расположены на удалении от главной. Тем не менее собственные значения матриц L_2 и L_3 совпадают с собственными значениями матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

где размер матрицы B равен числу узлов сетки по соответствующему пространственному направлению, поэтому матрицы собственных значений (Λ_2, Λ_3) и собственных векторов (U_2, U_3) для матриц L_2 и L_3 могут быть построены на основе относительно небольших компонент спектрального разложения матрицы B . С использованием полученных разложений $L_2 = U_2 \Lambda_2 U_2^T$ и $L_3 = U_3 \Lambda_3 U_3^T$ проводится замена переменных:

$$y = U_2^T U_3^T x,$$

$$U_2^T U_3^T (L_1 + L_2 + L_3) U_3 U_2 y = U_2^T U_3^T b.$$

Поскольку $U_3^T L_1 U_3 = U_2^T L_1 U_2 = L_1$, $U_3^T L_2 U_3 = L_2$ и $U_2^T L_3 U_2 = L_3$, действие предобуславливателя на вектор сводится к решению блочно-трехдиагональной системы:

$$(L_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) y = U_2^T U_3^T b, \tag{4}$$

где размер блоков равен числу узлов сетки по направлению x_1 .

4. Параллельная реализация алгоритма.

4.1. Реализация для одного GPU. Параллельная реализация алгоритма написана на языке C++ с использованием технологии CUDA. Использование явной по времени конечно-разностной схемы для шагов предиктора и корректора в уравнении Стокса, а также в итерациях уравнения Кана–Хиллиарда позволяет достичь эффективного распараллеливания: каждый поток графического процессора вычисляет обновленное значение в соответствующем узле сетки независимо от других. Перед очередным этапом вычислений все необходимые данные, такие как предыдущее значение скорости потока для предиктора или новое значение давления для корректора, известны. Итерации уравнения Кана–Хиллиарда также выполняются в два этапа: сначала на основе значения фазового поля с предыдущего временного слоя вычисляется химический потенциал μ , а затем обновляется значение фазового поля. Стоит отметить, что поскольку моделируемый процесс не предполагает больших изменений давления и скоростей, то решение уравнения Пуассона с использованием распределения давления, полученного на предыдущем шаге по времени, и спектрального предобуславливателя занимает всего несколько итераций метода сопряженных градиентов. Таким образом, использование неявной схемы не приведет к значительному уменьшению вычислительных затрат, поскольку потребует решения еще одной системы уравнений.

Распараллеливание решения уравнения Пуассона устроено иначе. Рассмотрим метод сопряженных градиентов [22] с предобуславливателем M для СЛАУ $Ax = b$. Метод включает в себя четыре типа операций: скалярное произведение, линейная комбинация векторов, действие оператора A на вектор и действие обратного к предобуславливателю оператора M^{-1} на вектор. Для первых двух операций используется их параллельная реализация из библиотеки cuBLAS (cublasDaxpy, cublasDdot). В рамках решаемой задачи оператор A — это конечно-разностный оператор Лапласа LP . Действие оператора LP на вектор вычисляется так же, как и явные конечно-разностные итерации: каждый поток графического процессора вычисляет значение оператора в соответствующем узле сетки (сборка матрицы оператора не проводится).

Согласно формуле (4), действие M^{-1} на вектор включает в себя умножение на матрицы собственных векторов и решение трехдиагональной системы. В первую очередь происходит умножение $U_2^T U_3^T$ на правую часть. Так как правая часть здесь — это сеточная функция на декартовой сетке размера $N_1 \times N_2 \times N_3$, а матрицы U_2, U_3 имеют размер $N_2 \times N_2$ и $N_3 \times N_3$ соответственно, то эффективное вычисление $U_2^T U_3^T b$ осуществляется за счет использования функции cublasDgemm. В реализованной схеме хранения данных

направление, соответствующее размеру N_3 , является быстрым, т.е. соседние элементы по данному направлению хранятся последовательно. Поэтому $U_3^T b$ вычисляется как произведение матриц размера $N_3 \times N_3$ и $N_3 \times (N_1 \cdot N_2)$. Поскольку по направлению, соответствующему размеру N_2 , данные расположены не последовательно, вычисление произведения U_2^T на $U_3^T b$ выполняется за счет N_1 последовательных вызовов `cubladDgemm`. После вычисления правой части необходимо решить трехдиагональную систему. Для ее решения реализован метод прогонки. Так как матрица имеет блочный вид, решение в каждом блоке вычисляется параллельно: каждому блоку соответствует один поток GPU. Далее полученный результат умножается на $U_3 U_2$ таким же образом, что и правая часть.

4.2. Декомпозиция расчетной области. Размер задачи, которую возможно решить с использованием алгоритма, описанного в предыдущем разделе, ограничен объемом памяти GPU. Например, с использованием графического ускорителя NVIDIA A100 80 Гб возможно провести расчет для цифровых изображений размером 700^3 вокселей. Чтобы преодолеть это ограничение, используется метод декомпозиции расчетной области. Этот подход заключается в том, что расчетная область делится на несколько прямоугольных подобластей. В каждой из таких подобластей вычисления выполняются одним графическим ускорителем. Поскольку для конечно-разностной схемы требуются значения переменных в узлах сетки, соответствующих соседним подобластям, каждая подобласть окружается дополнительным слоем узлов.

В работе [24] описана реализация декомпозиции расчетной области для решения уравнения Кана–Хиллиарда. В связи с тем, что для аппроксимации четвертой производной необходимо пять узлов по каждому из направлений, добавляются два дополнительных слоя узлов сетки. За счет этого на каждой итерации между подобластями проводится только один обмен значений параметра фазового поля. Этот подход показывает хорошую производительность, особенно при слабом масштабировании. Однако для совместного решения системы уравнений Стокса и Кана–Хиллиарда такой подход необходимо модифицировать.

Как и в работе [24], обмен данными из дополнительных слоев выполняется асинхронно, во время расчета конечно-разностных операторов во внутренней части подобластей. В отличие от аппроксимации уравнения Кана–Хиллиарда, все конечно-разностные операторы в уравнении Стокса имеют трехточечную схему для каждого пространственного направления, поэтому необходим только один дополнительный слой узлов сетки. Чтобы проводить все обмены единообразно, итерация уравнения Кана–Хиллиарда выполняется в два этапа: сначала вычисляется химический потенциал, а затем, когда завершится обмен его значениями, вычисляется новое значение параметра фазового поля и происходит еще один обмен. По всей видимости, этот подход чуть менее эффективен, чем использование двух дополнительных слоев, поскольку суммарный объем передаваемых данных остается тем же, но в два раза увеличивается количество вызовов `cudaMemcpy` и `MPI_Isend`. С другой стороны, такой единообразный подход существенно упрощает программную реализацию и позволяет избежать обменов между подобластями, граничащими по ребру.

Между расчетами предиктора и корректора описанным выше подходом вычисляется решение уравнения Пуассона. Рассмотрим по отдельности вычисление четырех операций из метода сопряженных градиентов с учетом декомпозиции расчетной области. Первая операция — действие оператора LP на вектор выполняется аналогично другим конечно-разностным вычислениям с использованием одного дополнительного слоя узлов. Вторая операция — вычисление линейной комбинации векторов. Она является локальной для каждого MPI-процесса, т.е. в каждом процессе вызывается `cublasDaxpy` без коммуникации. Третья операция — скалярное произведение, которое сначала вычисляется локально (`cublasDot`), а затем с использованием `MPI_Allreduce` рассчитывается итоговое значение. Четвертая операция — действие M^{-1} на вектор. В отличие от LP , M^{-1} реализован как матричное умножение, следовательно, чтобы вычислить результат действия предобуславливателя на вектор x в каждой подобласти, необходимы все компоненты вектора x , которые распределены между подобластями. Таким образом, необходим вызов `MPI_Allgather` или использование методов распределенного матричного перемножения. В любом случае это приведет к катастрофическому снижению производительности. Поэтому для каждой подобласти предобуславливатель создается локально. Такая модификация снижает качество предобуславливателя: число итераций метода сопряженных градиентов увеличивается в 1.5–2 раза, с другой стороны, для такого предобуславливателя не требуются обмены между процессами.

5. Выбор параметров модели. При проведении численных экспериментов наиболее важным критерием выбора параметров было соответствие реалистичным свойствам жидкостей. Поэтому было прове-



дено тщательное изучение как статей с описанием численных трехфазных экспериментов, так и лабораторных исследований свойств системы вода–нефть–сверхкритический CO₂.

Параметры жидкостей можно разделить на две группы. К первой относятся плотности ρ_w, ρ_o, ρ_c и динамические вязкости ν_w, ν_o, ν_c (индекс w соответствует воде, o — нефти, c — сверхкритическому CO₂). Выбор параметров этой группы относительно прост: свойства воды и нефти слабо меняются в достаточно большом диапазоне давлений и температур, более того, свойства этих жидкостей хорошо исследованы. Они могут быть найдены как в справочниках, так и во множестве статей [25–27]. Отдельно стоит отметить, что, хотя в этом исследовании используются параметры чистой воды, зачастую при многофазном моделировании подразумевается минерализованная вода, параметры которой для различных степеней минерализации также известны. Поскольку нефть — это сложная смесь углеводородов, то ее параметры зависят от происхождения [27]. В этом исследовании используется одна из возможных комбинаций параметров, находящаяся вблизи середины доступного диапазона, т.е. нефть не является тяжелой [28]. В отличие от нефти и воды, сверхкритический CO₂ меняет свои свойства с ростом температуры и давления. Однако изучение его свойств является актуальной тематикой в последние десятилетия, поэтому необходимые параметры могут быть найдены в ряде источников [25, 26]. Далее, в численных экспериментах считается, что свойства сверхкритического CO₂ соответствуют температуре 35°C и давлению 10 МПа (табл. 1).

Вторая группа включает в себя параметры, определяющие межфазные взаимодействия: силы поверхностного (межфазного) натяжения $\sigma_{wo}, \sigma_{oc}, \sigma_{cw}$ и углы смачивания $\theta_{wo}, \theta_{oc}, \theta_{cw}$. Индекс wo соответствует паре вода–нефть, oc — нефть–сверхкритический CO₂, cw — сверхкритический CO₂–вода. Важно отметить, что под углом смачивания подразумевается угол смачивания жидкости, соответствующей первой букве в индексе, относительно жидкости, соответствующей второй букве в индексе. Таким образом, θ_{wo} — угол смачивания воды относительно нефти, $\theta_{ow} = 180^\circ - \theta_{wo}$ — угол смачивания нефти относительно воды. В случае поверхностных натяжений порядок индексов не важен ($\sigma_{wo} \equiv \sigma_{ow}$). Угол смачивания зависит не только от самих жидкостей, но и от материала (породы), на котором они расположены. Основной сложностью при подборе параметров этой группы является их зависимость:

$$\sigma_{wo} \cos \theta_{wo} + \sigma_{oc} \cos \theta_{oc} + \sigma_{cw} \cos \theta_{cw} = 0.$$

Причем с учетом ограничений ($\sigma_{ij} > 0, -1 \leq \cos \theta_{ij} \leq 1$) неизвестный параметр не всегда может быть установлен по пяти известным. В процессе исследования литературы не было найдено ни одного источника, в котором бы приводились значения всех шести параметров. В работе [26] приведено детальное исследование сил поверхностного натяжения для всех трех пар жидкостей при различных условиях. Данные, представленные в других работах по теме [29, 30], также близки к тем, что опубликованы в работе [26]. На основе этих данных можно сделать вывод, что $\sigma_{wo} \approx 0.025$ Н/м² в достаточно большом диапазоне температур и давлений, σ_{cw} немногим больше σ_{wo} , а σ_{oc} находится в диапазоне [0.002, 0.006] Н/м. Углы смачивания выбраны так, чтобы качественно соответствовать лабораторным данным. Известно, что песчаник Берье гидрофилен, для него $\theta_{wo} < 60^\circ, \theta_{wc} < 60^\circ$ [2]. Конкретный угол смачивания относительно нефти зависит от месторождения, а для θ_{wc} экспериментальные данные приведены в работе [31]. При этом, как правило, $\theta_{wc} < \theta_{wo}$. В работе [32] сравниваются углы смачивания сверхкритического CO₂ относительно воды и чистого додекана. На основе этих данных предполагается, что $\theta_{oc} < \theta_{wc}$ (табл. 2).

6. Численные эксперименты. С использованием разработанного алгоритма проводится серия численных экспериментов по определению абсолютной и относительной фазовых проницаемостей для

Таблица 1. Динамическая вязкость и плотность воды, нефти и сверхкритического CO₂
 Table 1. Dynamic viscosity and density of water, oil and supercritical CO₂

	Динамическая вязкость, Па·с Dynamic viscosity, Pa·s	Плотность, кг/м ³ Density, kg/m ³
Вода Water	0.00100680	1006.8
Нефть Oil	0.00382500	850.0
Сверхкритический CO ₂ Supercritical CO ₂	0.00007105	710.5

Таблица 2. Сила поверхностного натяжения и углы смачивания воды, нефти и сверхкритического CO₂
 Table 2. Surface tension force and wetting angles of water, oil and supercritical CO₂

	Сила поверхностного натяжения, Н/м Surface tension force, N/m	Угол смачивания, ° Wetting angle, °
Вода–нефть Water–oil	0.025	38
Нефть–сверхкритический CO ₂ Oil–supercritical CO ₂	0.004	23
Сверхкритический CO ₂ –вода Supercritical CO ₂ –water	0.027	150

систем нефть–вода и нефть–CO₂. Полученные результаты используются для расчета трехфазной относительной проницаемости нефти согласно моделям Стоуна I [3], Стоуна II [4] и Бейкера [5].

Расчет проводится для цифрового изображения песчаника Берье (размер 200³ вокселей, разрешение — 740 нм на воксель). Чтобы избежать влияния капиллярных концевых эффектов [33] на оценку проницаемости, перепад давления рассчитывается на расстоянии 37 мкм от выходной стороны изображения.

Для расчета абсолютной проницаемости проводится однофазный эксперимент со скоростью потока на входе $v = 0.1$ м/с. Значение абсолютной проницаемости получено по формуле

$$k = \frac{v\nu_o L}{\Delta P},$$

где v — скорость фильтрации, L — длина образца, ΔP — разность давлений на входной и выходной границах. Искомое значение составило $k = 84.4$ мД¹.

Расчет кривых относительных фазовых проницаемостей проводится итеративно, как и лабораторный эксперимент в установившемся режиме (Steady-state relative permeability test) [1]. На первом шаге в образец, заполненный водой или CO₂, закачивается только нефть до получения остаточной водонасыщенности или насыщенности CO₂ соответственно. Далее на каждом из шагов в полученный на предыдущем шаге образец подается смесь нефти и воды или нефти и CO₂ в заданном процентном соотношении. Для каждого случая вычисляются значения эффективных проницаемостей согласно формулам

$$k_o = \frac{c_o v\nu_o L}{\Delta P}, \quad k_w = \frac{(1 - c_o)v\nu_w L}{\Delta P}, \quad k_c = \frac{(1 - c_o)v\nu_c L}{\Delta P},$$

где c_o — доля нефти, подаваемая на вход. Относительные фазовые проницаемости вычисляются как

$$k_{o,rel} = \frac{k_o}{k}, \quad k_{c,rel} = \frac{k_c}{k}, \quad k_{w,rel} = \frac{k_w}{k}.$$

Полученные результаты для набора значений сатурации S_w воды и S_c сверхкритического CO₂ представлены в табл. 3, 4 соответственно.

Представленные значения используются для построения интерполяционных полиномов четвертого порядка для относительной проницаемости нефти, четвертого и шестого порядков для CO₂ и воды соответственно. Полученные кривые представляют зависимости относительных фазовых проницаемостей от насыщенности (рис. 2). Максимальная насыщенность сверхкритического CO₂ не превосходит значения 0.42. Это связано с высокой разницей вязкостей сверхкритического CO₂ и нефти, что приводит к следующему характеру фильтрации: CO₂ формирует узкие трубки в каналах, заполненных нефтью, и движется с высокой скоростью, не касаясь стенок и не вытесняя нефть (рис. 3), т.е. фактически угол смачивания CO₂ относительно нефти составляет нуль градусов. Похожее поведение наблюдается в лабораторном эксперименте в работе [34], где показано, что между N₂ и горной породой находится нефтяная прослойка.

¹мД (миллидарси) — единица измерения проницаемости горных пород, принятая в нефтегазовой геологии, не входящая в СИ: 1 Д = 10⁻¹² м².



Таблица 3. Результаты численных экспериментов по вычислению двухфазных проницаемостей в системе нефть–вода

Table 3. Results of numerical experiments on calculating two-phase permeabilities in the oil–water system

Доля нефти, % Oil fraction, %	S_w	$k_o, \text{мД}$ k_o, mD	$k_{o, \text{rel}}$	$k_w, \text{мД}$ k_w, mD	$k_{w, \text{rel}}$
100	0.1851	84.4	1	0	0
80	0.429	82.1	0.973	5.4	0.064
70	0.5195	80.6	0.956	9.1	0.108
60	0.6258	79.9	0.947	14	0.166
50	0.6753	73.0	0.865	19.2	0.228
40	0.7328	65.9	0.782	26	0.309
30	0.8356	55.8	0.661	34.2	0.406
20	0.8585	41.3	0.489	43.5	0.516
0	0.9757	0	0	83.3	0.987

Таблица 4. Результаты численных экспериментов по вычислению двухфазных проницаемостей в системе нефть–CO₂

Table 4. Results of numerical experiments on calculating two-phase permeabilities in the oil–CO₂ system

Доля нефти, % Oil fraction, %	S_c	$k_o, \text{мД}$ k_o, mD	$k_{o, \text{rel}}$	$k_c, \text{мД}$ k_c, mD	$k_{c, \text{rel}}$
100	0.0082	83.1	0.985	0	0
80	0.0255	79.2	0.939	0.368	0.0044
70	0.0619	75.7	0.897	0.602	0.0071
60	0.1003	71.0	0.841	0.88	0.01
50	0.1275	67.5	0.8	1.25	0.0148
40	0.1517	64.2	0.761	1.79	0.0212
30	0.1721	59.4	0.704	2.57	0.0305
20	0.2133	54.4	0.645	4.04	0.0479
0	0.42	0	0	25.5	0.302

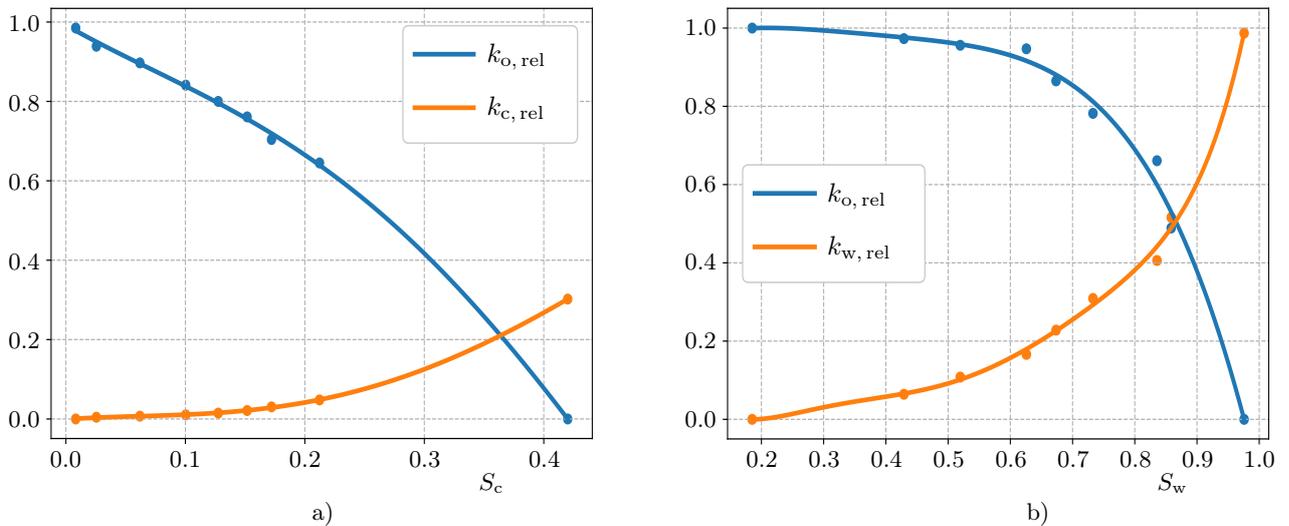


Рис. 2. Кривые относительных фазовых проницаемостей: а) в системе нефть–CO₂; б) в системе нефть–вода

Fig. 2. Relative permeability curves: a) in the oil–CO₂ system; b) in the oil–water system

Для расчета трехфазной относительной проницаемости нефти k_{ro} согласно модели Бейкера используется формула

$$k_{ro} = \frac{(S_w - S_{wr})k_{ro,wo} + (S_c - S_{cr})k_{ro,co}}{(S_w - S_{wr}) + (S_c - S_{cr})},$$

где S_{wr} и S_{cr} — остаточная насыщенность воды и CO_2 соответственно, $k_{ro,wo}$ — относительная фазовая проницаемость нефти в системе нефть–вода, $k_{ro,co}$ — относительная фазовая проницаемость нефти в системе нефть– CO_2 . На рис. 4 представлена тернарная диаграмма для относительной проницаемости нефти в трехфазной системе.

Для получения трехфазной относительной проницаемости нефти согласно модели Стоуна I вводится величина минимальной нефтенасыщенности S_{om} :

$$S_{om} = \alpha S_{orw} + (1 - \alpha) S_{orc}, \quad \alpha = 1 - \frac{S_c}{1 - S_{wr} - S_{orc}},$$

где S_{orw} — остаточная нефтенасыщенность в системе нефть–вода, S_{orc} — остаточная нефтенасыщенность в системе нефть– CO_2 . Далее вычисляются нормализованные насыщенности:

$$S_o^* = \frac{S_o - S_{om}}{1 - S_{wr} - S_{om}}, \quad S_o \geq S_{om},$$

$$S_w^* = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{om}}, \quad S_w \geq S_{wr},$$

$$S_c^* = \frac{S_c}{1 - S_{wr} - S_{om}},$$

после чего трехфазная относительная проницаемость нефти может быть получена из выражения

$$k_{ro} = \frac{S_o^*}{(1 - S_w^*)(1 - S_c^*)} \frac{k_{ro,wo} k_{ro,co}}{(k_{ro,wo})_{S_{wr}}},$$

где $(k_{ro,wo})_{S_{wr}}$ — относительная фазовая проницаемость нефти при остаточной водонасыщенности S_{wr} .

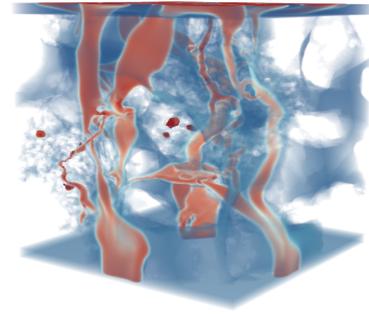


Рис. 3. Распределение нефти (синий полупрозрачный) и сверхкритического CO_2 (красный) в поровом пространстве

Fig. 3. Distribution of oil (blue semi-transparent) and supercritical CO_2 (red) in pore space

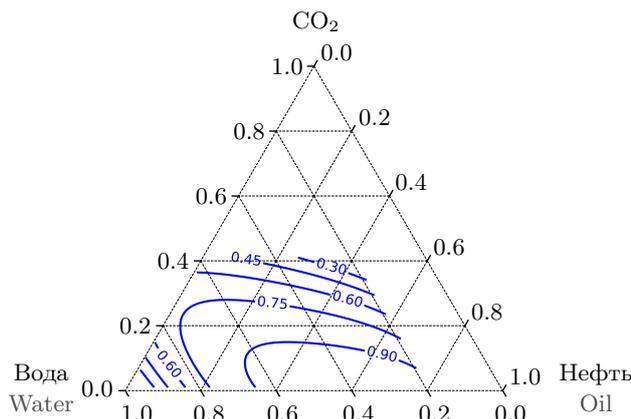


Рис. 4. Тернарная диаграмма для системы нефть–вода– CO_2 , синим цветом изображены изолинии относительной трехфазной проницаемости нефти согласно модели Бейкера

Fig. 4. Ternary diagram for the oil–water– CO_2 system, isolines of three-phase relative permeability of oil according to the Baker's model are shown in blue

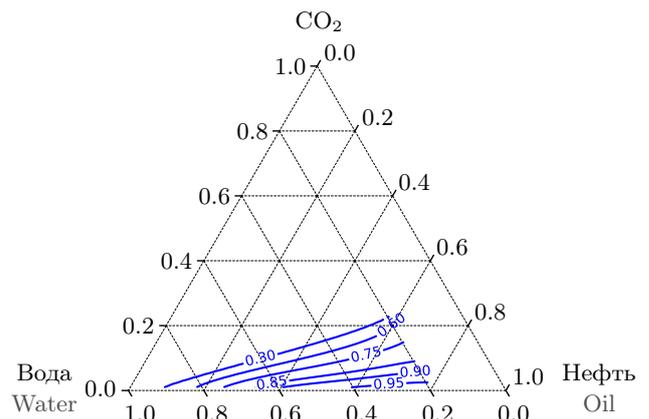


Рис. 5. Тернарная диаграмма для системы нефть–вода– CO_2 , синим цветом изображены изолинии относительной трехфазной проницаемости нефти согласно модели Стоуна I

Fig. 5. Ternary diagram for the oil–water– CO_2 system, isolines of three-phase relative permeability of oil according to the Stone I model are shown in blue



Тернарная диаграмма, соответствующая модели Стоуна I, представлена на рис. 5.

В модели Стоуна II трехфазная относительная проницаемость нефти определяется соотношением

$$k_{ro} = (k_{ro,wo})_{S_{wr}} \left[\left(\frac{k_{ro,wo}}{(k_{ro,wo})_{S_{wr}}} + k_{rw} \right) \left(\frac{k_{ro,co}}{(k_{ro,wo})_{S_{wr}}} + k_{rc} \right) - (k_{rw} + k_{rc}) \right],$$

где k_{rw} — относительная фазовая проницаемость воды в системе нефть–вода, k_{rc} — относительная фазовая проницаемость CO_2 в системе нефть– CO_2 . Тернарная диаграмма для модели Стоуна II представлена на рис. 6.

Изолинии трехфазных относительных проницаемостей, построенных с использованием моделей Стоуна II (рис. 6) и Бейкера (рис. 4), имеют похожее распределение. Однако значения относительной проницаемости нефти для областей тернарной диаграммы с высокой насыщенностью воды или CO_2 имеют существенное различие: для модели Бейкера — это 0.6, для модели Стоуна II — 0.15. В обоих случаях изолинии заполняют весь доступный диапазон сатураций: информация о двухфазных относительных проницаемостях для системы нефть–вода известна в диапазоне $0.18 \leq S_w \leq 1$, а для системы нефть– CO_2 — $0 \leq S_c \leq 0.42$ (рис. 2). Значения относительной трехфазной проницаемости, построенные с помощью модели Стоуна I, в большей части этой области находятся за пределами диапазона $[0, 1]$, поэтому на рис. 5 построены изолинии, соответствующие только корректным значениям относительной проницаемости. Такое распределение изолиний может быть связано с тем, что модель Стоуна I лучше определяет трехфазные относительные проницаемости при высокой нефтенасыщенности [3], где и находится наибольшая часть построенных изолиний.

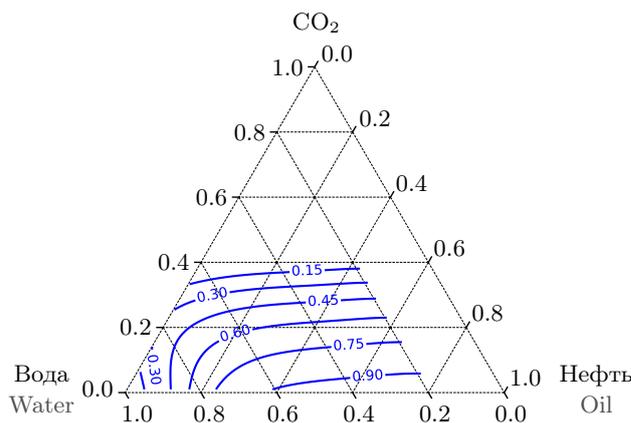


Рис. 6. Тернарная диаграмма для системы нефть–вода– CO_2 , синим цветом изображены изолинии относительной трехфазной проницаемости нефти согласно модели Стоуна II

Fig. 6. Ternary diagram for the oil–water– CO_2 system, isolines of three-phase relative permeability of oil according to the Stone II model are shown in blue

7. Заключение. В работе представлен параллельный подход к решению системы уравнений Стокса и Кана–Хиллиарда. Алгоритм основан на проекционном методе, который включает в себя решение уравнения Пуассона. Для его решения используется метод сопряженных градиентов со спектральным предобуславливателем. Разработанный алгоритм поддерживает трехмерную декомпозицию области без предобуславливания и двумерную декомпозицию области с предобуславливанием. Однако, поскольку представленный способ распараллеливания предобуславливателя снижает его качество, количество итераций увеличивается в 1.5–2 раза.

Алгоритм используется для моделирования двухфазной фильтрации для двух различных пар жидкостей: нефть–вода и нефть–сверхкритический CO_2 . Проведено два численных эксперимента по определению относительных фазовых проницаемостей методом установившегося режима фильтрации. Полученные кривые относительных фазовых проницаемостей используются для построения тернарных диаграмм относительной фазовой проницаемости нефти для системы нефть–вода–сверхкритический CO_2 . Для их построения используются три различных модели: Стоун I, Стоун II и Бейкер. Результаты, полученные с использованием последних двух моделей, похожи между собой. В случае модели Стоуна I удается построить изолинии относительной фазовой проницаемости только в небольшом регионе с высокой нефтенасыщенностью.

Полученные в процессе расчетов распределения фаз в дальнейшем будут использоваться как входные данные для трехфазного численного эксперимента по определению относительных фазовых проницаемостей методом установившегося режима фильтрации. Таким образом будет проведено сравнение полученных оценок с результатами прямого численного эксперимента.

Список литературы

1. *Alyafei N.* Fundamentals of reservoir rock properties. Doha: Hamad Bin Khalifa University Press, 2021. doi 10.5339/Fundamentals_of_Reservoir_Rock_Properties_2ndEdition.
2. *Oak M.J., Baker L.E., Thomas D.C.* Three-phase relative permeability of Berea sandstone // Journal of Petroleum Technology. 1990. **42**, N 08. 1054–1061. doi 10.2118/17370-pa.
3. *Stone H.L.* Probability model for estimating three-phase relative permeability // Journal of Petroleum Technology. 1970. **22**, N 02. 214–218. doi 10.2118/2116-PA.
4. *Stone H.L.* Estimation of three-phase relative permeability and residual oil data // Journal of Canadian Petroleum Technology. 1973. **12**, N 04. 53–61.
5. *Jiang F., Tsuji T.* Estimation of three-phase relative permeability by simulating fluid dynamics directly on rock-microstructure images // Water Resources Research. 2017. **53**, N 1. 11–32. doi 10.1002/2016WR019098.
6. *Axelsson O., He X., Neytcheva M.* Numerical solution of the time-dependent Navier–Stokes equation for variable density–variable viscosity. Part I // Mathematical Modelling and Analysis. 2015. **20**, N 2. 232–260. doi 10.3846/13926292.2015.1021395.
7. *Balashov V., Zlotnik A.* On a new spatial discretization for a regularized 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard system of equations with boundary conditions // Journal of Scientific Computing. 2021. **86**, N 3. Article Number 33. doi 10.1007/s10915-020-01388-6.
8. *Kim J.* Phase-field models for multi-component fluid flows // Communications in Computational Physics. 2012. **12**, N 3. 613–661. doi 10.4208/cicp.301110.040811a.
9. *Zhang L., Xu C., Guo Y., et al.* The effect of surface roughness on immiscible displacement using pore scale simulation // Transport in Porous Media. 2021. **140**, N 3. 713–725. doi 10.1007/s11242-020-01526-6.
10. *Zhu G., Kou J., Yao J., et al.* A phase-field moving contact line model with soluble surfactants // Journal of Computational Physics. 2020. **405**. Article Number 109170. doi 10.1016/j.jcp.2019.109170. <http://hdl.handle.net/10754/660524>. Cited March 12, 2026.
11. *Andra H., Combaret N., Dvorkin J., et al.* Digital rock physics benchmarks — Part I: imaging and segmentation // Computers and Geosciences. 2013. **50**, N 4. 25–32. doi 10.1016/j.cageo.2012.09.005.
12. *Madonna C., Quintal B., Frehner M., et al.* Synchrotron-based X-ray tomographic microscopy for rock physics investigations // Geophysics. 2013. **78**, N 1. D53–D64. doi 10.1190/GE02012-0113.1.
13. *Yu H., Yang X.* Numerical approximations for a phase-field moving contact line model with variable densities and viscosities // Journal of Computational Physics. 2017. **334**, N 3. 665–686. doi 10.1016/j.jcp.2017.01.026.
14. *Carrillo F.J., Bourg I.C., and Soulaine C.* Multiphase flow modeling in multiscale porous media: an open-source micro-continuum approach // Journal of Computational Physics: X. 2020. **8**. Article Number 100073. doi 10.1016/j.jcpx.2020.100073.
15. *Fu G.* A divergence-free HDG scheme for the Cahn–Hilliard phase-field model for two-phase incompressible flow // Journal of Computational Physics. 2020. **419**, Article Number 109671. doi 10.1016/j.jcp.2020.109671.
16. *Yang J., Kim J.* A novel Cahn–Hilliard–Navier–Stokes model with a nonstandard variable mobility for two-phase incompressible fluid flow // Computers & Fluids. 2020. **213**. Article Number 104755. doi 10.1016/j.compfluid.2020.104755.
17. *Zhao J., Han D.* Second-order decoupled energy-stable schemes for Cahn–Hilliard–Navier–Stokes equations // Journal of Computational Physics. 2021. **443**, N 1. Article Number 110536. doi 10.1016/j.jcp.2021.110536.
18. *Griebel M., Zaspel P.* A multi-GPU accelerated solver for the three-dimensional two-phase incompressible Navier–Stokes equations // Computer Science – Research and Development. 2010. **25**, N (1–2). 65–73. doi 10.1007/s00450-010-0111-7.
19. *Zhang Q., Wang X.-P.* Phase field modeling and simulation of three-phase flow on solid surfaces // Journal of Computational Physics. 2016. **319**. 79–107. doi 10.1016/j.jcp.2016.05.016.
20. *Хачкова Т.С., Лисица В.В., Решетова Г.В., Чеверда В.А.* Численная оценка удельного электрического сопротивления горных пород по их цифровым изображениям с использованием графических со-процессоров // Вычислительные методы и программирование. 2020. **21**, № 3. 306–318. doi 10.26089/NumMet.v21r326. <https://www.mathnet.ru/eng/vmp1012>. Дата обращения: 12 марта 2026.
21. *Luo K., Zhuang Z., Fan J., Haugen N.E.L.* A ghost-cell immersed boundary method for simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. **92**. 708–717. doi 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.024.
22. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. Philadelphia: SIAM, 2003.



23. Манаев А.А., Лисица В.В. Спектральный преобуславливатель для решения уравнения Пуассона // Вычислительные методы и программирование. 2025. 26, № 2. 111–128. doi 10.26089/NumMet.v26r208. <https://www.mathnet.ru/eng/vmp1153>. Дата обращения: 12 марта 2026.
24. Прохоров Д.И. Декомпозиция расчетной области для численного решения уравнения Кана–Хиллиарда // Вычислительные методы и программирование. 2025. 26, № 1. 17–32. doi 10.26089/NumMet.v26r102.
25. Chiquet P., Daridon J.-L., Broseta D., Thibeau S. CO₂/water interfacial tensions under pressure and temperature conditions of CO₂ geological storage // Energy Conversion and Management. 2007. 48, N 3. 736–744. doi 10.1016/j.enconman.2006.09.011.
26. Yang D., Tontiwachwuthikul P., Gu Y. Interfacial tensions of the crude oil + reservoir brine + CO₂ systems at pressures up to 31 MPa and temperatures of 27°C and 58°C // Journal of Chemical & Engineering Data. 2005. 50, N 4. 1242–1249. doi 10.1021/je0500227.
27. Ahmed T. Reservoir engineering handbook. Houston: Gulf Professional Publishing, 2010.
28. Li L., Zheng J., Shi Y., et al. Mechanisms of fluid migration and CO₂ storage in low permeability heavy oil reservoirs using high-pressure microfluidic CO₂ flooding experiment // Energy & Fuels. 2024. 38, N 9. 7997–8008. doi 10.1021/acs.energyfuels.4c00869.
29. Hemmati-Sarapardeh A., Ayatollahi S., Ghazanfari M.-H., Masihi M. Experimental determination of interfacial tension and miscibility of the CO₂–crude oil system; temperature, pressure, and composition effects // Journal of Chemical & Engineering Data. 2014. 59, N 1. 61–69. doi 10.1021/je400811h.
30. Yang Z., Liu X., Hua Z., et al. Interfacial tension of CO₂ and crude oils under high pressure and temperature // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. 2015. 482. 611–616. doi 10.1016/j.colsurfa.2015.05.058.
31. Haeri F., Tapriyal D., Matranga C., et al. Variation of CO₂–brine contact angles on natural rocks of different compositions // Journal of Energy and Power Technology. 2021. 3, N 4. Article Number 046. doi 10.21926/jept.2104046.
32. Li X., Fan X. Effect of CO₂ phase on contact angle in oil-wet and water-wet pores // International Journal of Greenhouse Gas Control. 2015. 36. 106–113. doi 10.1016/j.ijggc.2015.02.017.
33. Gupta R., Maloney D. Intercept method — a novel technique to correct steady-state relative permeability data for capillary end effects // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. 2015. 19, N 02. 316–330. doi 10.2118/171797-pa.
34. Blunt M.J., Alhosani A., Lin Q., et al. Determination of contact angles for three-phase flow in porous media using an energy balance // Journal of Colloid and Interface Science. 2021. 582 (Pt A). 283–290. doi 10.1016/j.jcis.2020.07.152.

Получена
21 января 2026 г.

Принята
4 марта 2026 г.

Опубликована
19 марта 2026 г.

Информация об авторах

Дмитрий Игоревич Прохоров — к.ф.-м.н., науч. сотр.; Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Вероника Дмитриевна Чепеленкова — мл. науч. сотр.; Институт нефтегазовой геологии и геофизики имени А. А. Трофимука СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 3, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Вадим Викторович Лисица — д.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. N. Alyafei, *Fundamentals of Reservoir Rock Properties* (Hamad Bin Khalifa University Press, Doha, 2021). doi 10.5339/Fundamentals_of_Reservoir_Rock_Properties_2ndEdition.
2. M. J. Oak, L. E. Baker, and D. C. Thomas, “Three-Phase Relative Permeability of Berea Sandstone,” *Journal of Petroleum Technology* 42 (08), 1054–1061 (1990). doi 10.2118/17370-pa.

3. H. L. Stone, “Probability Model for Estimating Three-Phase Relative Permeability,” *Journal of Petroleum Technology* **22** (02), 214–218 (1970). doi [10.2118/2116-PA](https://doi.org/10.2118/2116-PA).
4. H. L. Stone, “Estimation of Three-Phase Relative Permeability And Residual Oil Data,” *Journal of Canadian Petroleum Technology* **12** (04), 53–61 (1973). doi [10.2118/73-04-06](https://doi.org/10.2118/73-04-06).
5. F. Jiang and T. Tsuji, “Estimation of three-phase relative permeability by simulating fluid dynamics directly on rock-microstructure images,” *Water Resources Research* **53** (1), 11–32 (2017). doi [10.1002/2016WR019098](https://doi.org/10.1002/2016WR019098).
6. O. Axelsson, X. He, and M. Neytcheva, “Numerical Solution of the Time-Dependent Navier–Stokes Equation for Variable Density–Variable Viscosity. Part I,” *Mathematical Modelling and Analysis* **20** (2), 232–260 (2015). doi [10.3846/13926292.2015.1021395](https://doi.org/10.3846/13926292.2015.1021395).
7. V. Balashov and A. Zlotnik, “On a New Spatial Discretization for a Regularized 3D Compressible Isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard System of Equations with Boundary Conditions,” *Journal of Scientific Computing* **86** (3), Article Number 33 (2021). doi [10.1007/s10915-020-01388-6](https://doi.org/10.1007/s10915-020-01388-6).
8. J. Kim, “Phase-Field Models for Multi-Component Fluid Flows,” *Communications in Computational Physics* **12** (3), 613–661 (2012). doi [10.4208/cicp.301110.040811a](https://doi.org/10.4208/cicp.301110.040811a).
9. L. Zhang, C. Xu, Y. Guo, et al., “The Effect of Surface Roughness on Immiscible Displacement Using Pore Scale Simulation,” *Transport in Porous Media* **140** (3), 713–725 (2021). doi [10.1007/s11242-020-01526-6](https://doi.org/10.1007/s11242-020-01526-6).
10. G. Zhu, J. Kou, J. Yao, et al., “A phase-field moving contact line model with soluble surfactants,” *Journal of Computational Physics* **405**, Article Number 109170 (2020). doi [10.1016/j.jcp.2019.109170](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109170). <http://hdl.handle.net/10754/660524>. Cited March 12, 2026.
11. H. Andra, N. Combaret, J. Dvorkin, et al., “Digital rock physics benchmarks - Part I: Imaging and segmentation,” *Computers and Geosciences* **50** (4), 25–32 (2013). doi [10.1016/j.cageo.2012.09.005](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2012.09.005).
12. C. Madonna, B. Quintal, M. Frehner, et al., “Synchrotron-based X-ray tomographic microscopy for rock physics investigations,” *Geophysics* **78** (1), D53–D64 (2013). doi [10.1190/GE02012-0113.1](https://doi.org/10.1190/GE02012-0113.1).
13. H. Yu and X. Yang, “Numerical approximations for a phase-field moving contact line model with variable densities and viscosities,” *Journal of Computational Physics* **334** (3), 665–686 (2017). doi [10.1016/j.jcp.2017.01.026](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.01.026).
14. F. J. Carrillo, I. C. Bourg, and C. Soulaine, “Multiphase flow modeling in multiscale porous media: An open-source micro-continuum approach,” *Journal of Computational Physics: X* **8**, Article Number 100073 (2020). doi [10.1016/j.jcp.x.2020.100073](https://doi.org/10.1016/j.jcp.x.2020.100073).
15. G. Fu, “A divergence-free HDG scheme for the Cahn–Hilliard phase-field model for two-phase incompressible flow,” *Journal of Computational Physics* **419**, Article Number 109671 (2020). doi [10.1016/j.jcp.2020.109671](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109671).
16. J. Yang and J. Kim, “A novel Cahn–Hilliard–Navier–Stokes model with a nonstandard variable mobility for two-phase incompressible fluid flow,” *Computers & Fluids* **213**, Article Number 104755 (2020). doi [10.1016/j.compfluid.2020.104755](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104755).
17. J. Zhao and D. Han, “Second-order decoupled energy-stable schemes for Cahn–Hilliard–Navier–Stokes equations,” *Journal of Computational Physics* **443** (1), Article Number 110536 (2021). doi [10.1016/j.jcp.2021.110536](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110536).
18. M. Griebel and P. Zaspel, “A multi-GPU accelerated solver for the three-dimensional two-phase incompressible Navier–Stokes equations,” *Computer Science – Research and Development* **25** (1–2), 65–73 (2010). doi [10.1007/s00450-010-0111-7](https://doi.org/10.1007/s00450-010-0111-7).
19. Q. Zhang and X.-P. Wang, “Phase field modeling and simulation of three-phase flow on solid surfaces,” *Journal of Computational Physics* **319**, 79–107 (2016). doi [10.1016/j.jcp.2016.05.016](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.05.016).
20. T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, G. V. Reshetova, and V. A. Tcheverda, “Numerical estimation of electrical resistivity in digital rocks using GPUs,” *Numerical Methods and Programming [Vychislitel’nye Metody i Programirovanie]* **21** (3), 306–318 (2020). doi [10.26089/NumMet.v21r326](https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r326). <https://www.mathnet.ru/eng/vmp1012>. Cited March 12, 2026.
21. K. Luo, Z. Zhuang, J. Fan, and N. E. L. Haugen, “A ghost-cell immersed boundary method for simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions,” *International Journal of Heat and Mass Transfer* **92**, 708–717 (2016). doi [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.024](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.024).
22. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 2003).
23. A. A. Manaev and V. V. Lisitsa, “Spectral preconditioner for solving the Poisson equation,” *Numerical Methods and Programming [Vychislitel’nye Metody i Programirovanie]* **26** (2), 111–128 (2025). doi [10.26089/NumMet.v26r208](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r208). <https://www.mathnet.ru/eng/vmp1153>. Cited March 12, 2026.
24. D. I. Prokhorov, “Domain decomposition for the numerical solution of the Cahn–Hilliard equation,” *Numerical Methods and Programming [Vychislitel’nye Metody i Programirovanie]* **26** (1), 17–32 (2025). doi [10.26089/NumMet.v26r102](https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r102).



25. P. Chiquet, J.-L. Daridon, D. Broseta, and S. Thibeau, “CO₂/water interfacial tensions under pressure and temperature conditions of CO₂ geological storage,” *Energy Conversion and Management* **48** (3), 736–744 (2007). doi [10.1016/j.enconman.2006.09.011](https://doi.org/10.1016/j.enconman.2006.09.011).
26. D. Yang, P. Tontiwachwuthikul, Y. Gu, “Interfacial Tensions of the Crude Oil + Reservoir Brine + CO₂ Systems at Pressures up to 31 MPa and Temperatures of 27°C and 58°C,” *Journal of Chemical & Engineering Data* **50** (4), 1242–1249 (2005). doi [10.1021/je0500227](https://doi.org/10.1021/je0500227).
27. T. Ahmed, *Reservoir Engineering Handbook* (Gulf Professional Publishing, Houston, 2010).
28. L. Li, J. Zheng, Y. Shi, et al., “Mechanisms of Fluid Migration and CO₂ Storage in Low Permeability Heavy Oil Reservoirs Using High-Pressure Microfluidic CO₂ Flooding Experiment,” *Energy & Fuels* **38** (9), 7997–8008 (2024). doi [10.1021/acs.energyfuels.4c00869](https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.4c00869).
29. A. Hemmati-Sarapardeh, S. Ayatollahi, M.-H. Ghazanfari, and M. Masihi, “Experimental Determination of Interfacial Tension and Miscibility of the CO₂–Crude Oil System; Temperature, Pressure, and Composition Effects,” *Journal of Chemical & Engineering Data* **59** (1), 61–69 (2014). doi [10.1021/je400811h](https://doi.org/10.1021/je400811h).
30. Z. Yang, X. Liu, Z. Hua, et al., “Interfacial tension of CO₂ and crude oils under high pressure and temperature,” *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* **482**, 611–616 (2015). doi [10.1016/j.colsurfa.2015.05.058](https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2015.05.058).
31. F. Haeri, D. Tapriyal, C. Matranga, et al., “Variation of CO₂-Brine Contact Angles on Natural Rocks of Different Compositions,” *Journal of Energy and Power Technology* **3** (4), Article Number 046 (2021). doi [10.21926/jept.2104046](https://doi.org/10.21926/jept.2104046).
32. X. Li and X. Fan, “Effect of CO₂ phase on contact angle in oil-wet and water-wet pores,” *International Journal of Greenhouse Gas Control* **36**, 106–113 (2015). doi [10.1016/j.ijggc.2015.02.017](https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2015.02.017).
33. R. Gupta and D. Maloney, “Intercept Method — A Novel Technique To Correct Steady-State Relative Permeability Data for Capillary End Effects,” *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* **19** (02), 316–330 (2015). doi [10.2118/171797-pa](https://doi.org/10.2118/171797-pa).
34. M.J. Blunt, A. Alhosani, Q. Lin, et al., “Determination of contact angles for three-phase flow in porous media using an energy balance,” *Journal of Colloid and Interface Science* **582** (Pt A), 283–290 (2021). doi [10.1016/j.jcis.2020.07.152](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2020.07.152).

Received
 January 21, 2026

Accepted
 March 4, 2026

Published
 March 19, 2026

Information about the authors

Dmitry I. Prokhorov — Ph. D., Scientist; Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.

Veronica D. Chepelenkova — Junior Scientist; Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 3, 630090, Novosibirsk, Russia.

Vadim V. Lisitsa — Dr. Sci., Head of the Laboratory; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.