УДК 519.6

# ТЕСТЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРАКТИКУМА ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ: СИММЕТРИЧНЫЕ ЯКОБИЕВЫ МАТРИЦЫ С ОДИНАКОВЫМИ ДИАГОНАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

**О. Б. Арушанян**[1]

Приводятся расчетные формулы для вычисления определителей, собственных значений и векторов, а также для обращения симметричных якобиевых матриц с одинаковыми диагональными элементами. Для иллюстрации рассматривается один класс таких матриц, часто встречаемый в практических расчетах.

**Ключевые слова:** численный анализ, численные методы, симметричные якобиевы матрицы, линейная алгебра, собственные значения матриц, собственные векторы матриц, определитель матрицы.

При проведении занятий по вычислительному практикуму весьма важным является всестороннее тестирование студенческих программ. Таким образом достигается закрепление не только знаний теоретического курса по методам вычислений, но и приемов грамотного программирования. В этом отношении особенный интерес представляет практикум по линейной алгебре [1].

В настоящей работе предлагается набор тестов, составленных для симметричных якобиевых матриц [2] порядка $n$ с одинаковыми диагональными элементами, имеющих вид ($c \neq 0$)

$$A_n = \begin{pmatrix} d & c & & & & \\ c & d & c & & & \\ & c & d & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & d & c \\ & & & & c & d \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Вычисление рассматриваемых здесь характеристик матрицы (1) выполняется с использованием стандартных приемов решения разностных уравнений. Это важно в методическом отношении, поскольку подчеркивается глубокая взаимосвязь численных методов линейной алгебры и разностных методов решения задач математической физики [3]. Результаты, полученные в общем виде, иллюстрируются примером одного типа матриц, который часто встречается в практических расчетах.

Излагаемый здесь материал может служить также приложением к задачникам [4, 5] и может использоваться как студентами для самостоятельного изучения численных методов, так и преподавателями в процессе подбора задач для семинарских занятий.

Предлагаемые в работе тесты были в разные годы применены для сертификации алгебраических программ Библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ [6]. Приведенные здесь расчетные формулы реализованы в виде программ на языках Фортран и Си. Эти программы помещены в тематическом сервере НИВЦ МГУ по численному анализу (http://www.srcc.msu.su/num_anal) и доступны для общего использования стандартными средствами компьютерной сети Интернет.

**1. Вычисление определителя**. Получим рекуррентное соотношение для определителя матрицы (1). Для этого разложим определитель по первой строке:

$$\det(A_n) = d\det(A_{n-1}) + (-1)^3 c \begin{vmatrix} c & c & & & & \\ & d & c & & & \\ & c & d & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & d & c \\ & & & & c & d \end{vmatrix}.$$

Разложив последний определитель по первому столбцу, получим искомое рекуррентное соотношение:

$$\det(A_n) = d\det(A_{n-1}) - c^2 \det(A_{n-2}).$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет, 119899, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Положим $n = n + 2$. Тогда для вычисления $\det(A_n)$ имеем разностное уравнение

$$\det(A_{n+2}) - d\det(A_{n+1}) + c^2\det(A_n) = 0$$

с начальными условиями

$$\det(A_1) = d, \quad \det(A_2) = d^2 - c^2.$$

Характеристическое уравнение

$$q^2 - dq + c^2 = 0$$

имеет корни

$$q_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4c^2}}{2}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $q_1 = q_2$, т.е. $|d| = 2|c|$. Тогда общее решение выписанного разностного уравнения имеет вид

$$\det(A_n) = a\, q_1^n + b\, n\, q_1^n = q_1^n(a + bn).$$

Из начальных условий найдем, что $a = b = 1$. Таким образом, для рассматриваемого случая $q_1 = \dfrac{d}{2}$ и определитель матрицы (1) вычисляется по формуле

$$\det(A_n) = \left(\frac{d}{2}\right)^n (1 + n). \tag{2}$$

Отсюда видно, что в соответствии с критерием Сильвестра матрица (1) при $|d| = 2|c|$ положительно определена, если $d > 0$, и отрицательно определена, если $d < 0$.

2) Пусть теперь $q_1 \neq q_2$, т.е. $|d| \neq 2|c|$. Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\det(A_n) = \alpha\, q_1^n + \beta\, q_2^n.$$

Для определения $\alpha$ и $\beta$ выпишем из начальных условий линейную систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= d = \alpha\, q_1 + \beta\, q_2, \\ \det(A_2) &= d^2 - c^2 = \alpha\, q_1^2 + \beta\, q_2^2, \end{aligned}$$

решением которой являются

$$\alpha = \frac{d^2 - c^2 - dq_2}{q_1^2 - q_1q_2} = \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_1q_2} = \frac{q_1}{q_1 - q_2},$$
$$\beta = \frac{d^2 - c^2 - dq_1}{q_2^2 - q_1q_2} = \frac{q_2^2}{q_2^2 - q_1q_2} = \frac{q_2}{q_2 - q_1}.$$

Следовательно,

$$\det(A_n) = \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1 - q_2}. \tag{3}$$

Поскольку $q_1 - q_2 = \sqrt{d^2 - 4c^2}$, то

$$\det(A_n) = \frac{\left(d + \sqrt{d^2 - 4c^2}\right)^{n+1} - \left(d - \sqrt{d^2 - 4c^2}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{d^2 - 4c^2}}.$$

Если $d^2 > 4c^2$, то из последней записи следует, что по критерию Сильвестра матрица (1) положительно определена, если $d > 0$, и отрицательно определена, если $d < 0$.

Если $d = 0$, то

$$\det(A_n) = \frac{\left(\sqrt{-4c^2}\right)^{n+1} - \left(-\sqrt{d^2 - 4c^2}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{-4c^2}} = \boldsymbol{i}^n |c|^n \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}\right).$$

Следовательно, при $d = 0$ матрица (1) вырождена для нечетных $n$ и не вырождена для четных $n$.

Если $d^2 < 4c^2$, то выражение (3) можно записать по-другому. Преобразуем корни характеристического уравнения следующим образом:

$$q_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2-4c^2}}{2} = \frac{d \pm 2|c|\sqrt{(d/2c)^2-1}}{2} = \frac{d}{2} \pm |c|\sqrt{\left(\frac{d}{2c}\right)^2 - 1} =$$
$$= c\,\frac{d}{2c} \pm \boldsymbol{i}|c|\sqrt{1-\left(\frac{d}{2c}\right)^2}.$$

Поскольку $|d/2c| < 1$, то обозначим $\cos\varphi = \dfrac{d}{2c}$; тем самым, эти корни могут быть записаны в нормальной тригонометрической форме в виде

$$q_{1,2} = c\,(\cos\varphi \pm \boldsymbol{i}\sin\varphi), \quad \text{если} \quad c > 0,$$
$$q_{1,2} = c\,(\cos\varphi \mp \boldsymbol{i}\sin\varphi), \quad \text{если} \quad c < 0.$$

С точностью до обозначения корней эти две записи совпадают. Выберем для определенности запись, соответствующую случаю $c > 0$. Тогда выражение (3) примет вид:

$$\det(A_n) = \frac{c^{n+1}(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)^{n+1} - c^{n+1}(\cos\varphi - \boldsymbol{i}\sin\varphi)^{n+1}}{2c\boldsymbol{i}\sin\varphi} =$$
$$= \frac{2c^{n+1}\boldsymbol{i}\sin(n+1)\varphi}{2c\boldsymbol{i}\sin\varphi} = \frac{c^n\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} =$$
$$= c^n\,\frac{\sin((n+1)\arccos(d/(2c))}{\sin(\arccos(d/(2c))} = c^n\,U_n(d/(2c)),$$

где $U_n(d/(2c))$ — многочлен Чебышева второго рода.

**2. Вычисление обратной матрицы**. Вычисление обратной матрицы эквивалентно решению матричного уравнения

$$A_n\,X = E,$$

где $E$ — единичная матрица порядка $n$. Подлежащие определению столбцы $\boldsymbol{x}^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)^T$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ обратной матрицы $X$ удовлетворяют разностным уравнениям $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$c\,x_{k-1}^{(j)} + d\,x_k^{(j)} + c\,x_{k+1}^{(j)} = \delta_k^j = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k < j, \\ 1, & \text{при} \quad k = j, \\ 0, & \text{при} \quad k > j \end{cases}$$

с краевыми условиями $x_0^{(j)} = 0$ и $x_{n+1}^{(j)} = 0$. Характеристическое уравнение

$$c\,q^2 + dq + c = 0$$

выписанной разностной задачи имеет корни

$$q_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2-4c^2}}{2c}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $q_1 = q_2$, т.е. $|d| = 2\,|c|$. Тогда $j$-й столбец обратной матрицы запишется в виде

$$x_k^{(j)} = C_1'\,q_1^k + C_2'\,k\,q_1^k = (C_1' + C_2'\,k)\,q_1^k, \quad k \leqslant j,$$
$$x_k^{(j)} = C_1''\,q_1^k + C_2''\,k\,q_1^k = (C_1'' + C_2''\,k)\,q_1^k, \quad k \geqslant j,$$

где $C_1'$, $C_2'$, $C_1''$, $C_2''$ — константы, подлежащие определению. Из краевых условий следует, что $C_1' = 0$ и $C_1'' = -(n+1)\,C_2''$; поэтому выражения для элементов $j$-го столбца примут вид

$$x_k^{(j)} = k\,q_1^k\,C_2', \qquad\qquad k \leqslant j,$$
$$x_k^{(j)} = (k-n-1)\,q_1^k\,C_2'', \quad k \geqslant j.$$

При $k = j$ оба выражения должны совпасть, т.е. должно выполняться равенство $j\, q_1^j\, C_2' = (j-n-1)\, q_1^j\, C_2''$. Отсюда получим первое соотношение, связывающее константы $C_2'$ и $C_2''$:

$$C_2' = \frac{j-n-1}{j}\, C_2''.$$

Теперь подставим эти выражения в среднее уравнение

$$c\, x_{j-1}^{(j)} + d\, x_j^{(j)} + c\, x_{j+1}^{(j)} = 1$$

и получим второе соотношение, связывающее константы $C_2'$ и $C_2''$:

$$c\,(j-1)\, q_1^{j-1}\, C_2' + d\, j\, q_1^j\, C_2' + c\,(j-n)\, q_1^{j+1}\, C_2'' = 1.$$

Из этих двух соотношений следует, что

$$C_2' = \frac{j-n-1}{c\, q_1^{j-1}\,(j\, q_1^2 - j + n + 1)}, \quad C_2'' = \frac{j}{c\, q_1^{j-1}\,(j\, q_1^2 - j + n + 1)}.$$

Таким образом, в рассмотренном случае столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями ($j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= \frac{(j-n-1)\, k\, q_1^{k-j+1}}{c\,(j\, q_1^2 - j + n + 1)}, \quad k \leqslant j, \\ x_k^{(j)} &= \frac{(k-n-1)\, j\, q_1^{k-j+1}}{c\,(j\, q_1^2 - j + n + 1)}, \quad k \geqslant j. \end{aligned} \tag{4}$$

2) Пусть $q_1 \neq q_2$, т.е. $|d| \neq 2\,|c|$. Тогда $j$-й столбец обратной матрицы запишется в виде

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C_1'\, q_1^k + C_2'\, q_2^k, \quad k \leqslant j, \\ x_k^{(j)} &= C_1''\, q_1^k + C_2''\, q_2^k, \quad k \geqslant j, \end{aligned}$$

где $C_1'$, $C_2'$, $C_1''$, $C_2''$ — константы, подлежащие определению. Потребуем, чтобы эти выражения совпали при $k = j$:

$$C_1'\, q_1^j + C_2'\, q_2^j = C_1''\, q_1^j + C_2''\, q_2^j.$$

Отсюда получим первое соотношение, связывающее искомые константы:

$$(C_1' - C_1'')\, q_1^j = (C_2'' - C_2')\, q_2^j.$$

Подставив эти выражения в среднее уравнение

$$c\, x_{j-1}^{(j)} + d\, x_j^{(j)} + c\, x_{j+1}^{(j)} = 1,$$

получим второе соотношение, связывающее искомые константы:

$$c\,(C_1'' - C_1')\, q_1^{j+1} + c\,(C_2'' - C_2')\, q_2^{j+1} = 1.$$

Из этих соотношений получим

$$C_1'' = C_1' + \frac{1}{c\, q_1^j\,(q_1 - q_2)}, \quad C_2'' = C_2' - \frac{1}{c\, q_2^j\,(q_1 - q_2)},$$

откуда

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C_1'\, q_1^k + C_2'\, q_2^k, && k \leqslant j, \\ x_k^{(j)} &= \left(C_1' + \frac{1}{c\, q_1^j\,(q_1 - q_2)}\right) q_1^k + \left(C_2' - \frac{1}{c\, q_2^j\,(q_1 - q_2)}\right) q_2^k, && k \geqslant j. \end{aligned}$$

Из первого краевого условия следует, что $C_1' + C_2' = 0$, т.е. $C_2' = -C_1'$. Из второго краевого условия получим второе соотношение, связывающее константы $C_1'$ и $C_2'$:

$$\left(C_1' + \frac{1}{c\, q_1^j\,(q_1 - q_2)}\right) q_1^{n+1} + \left(C_2' - \frac{1}{c\, q_2^j\,(q_1 - q_2)}\right) q_2^{n+1} = 0.$$

Из этих соотношений следует, что

$$C_1' = -\frac{q_1^{n+1-j} - q_2^{n+1-j}}{c\,(q_1 - q_2)\left(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}\right)}.$$

Таким образом, в случае разных корней характеристического уравнения столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями ($j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C_1'\left(q_1^k - q_2^k\right), & k \leqslant j,\\ x_k^{(j)} &= C_1'\left(q_1^k - q_2^k\right) + \frac{q_1^{k-j} - q_2^{k-j}}{c\,(q_1 - q_2)}, & k \geqslant j. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим отдельно случай, когда $d^2 < 4c^2$, т.е. корни характеристического уравнения комплексные и имеют вид

$$q_{1,2} = \cos\varphi \,\pm\, \sin\varphi, \quad \cos\varphi = -\frac{d}{2c}.$$

После несложных преобразований с использованием формулы Муавра получим из (5), что в этом случае столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями ($j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= -\frac{\sin\,(n+1-j)\,\varphi \sin k\varphi}{c \sin\varphi \sin\,(n+1)\,\varphi}, & k \leqslant j,\\ x_k^{(j)} &= -\frac{\sin\,(n+1-j)\,\varphi \sin k\varphi}{c \sin\varphi \sin\,(n+1)\,\varphi} + \frac{\sin\,(k-j)\,\varphi}{\sin\varphi}, & k \geqslant j. \end{aligned}$$

Если $d = 0$, то $q_{1,2} = \pm\boldsymbol{i}$. Тогда из последних выражений следует, что матрица (1) вырождена при нечетных $n$.

**3. Вычисление собственных значений**. Вычислим собственные значения $\lambda$ матрицы (1). Аналогично п. 1 заключаем, что угловые миноры $A_k(\lambda)$ матрицы $A_n - \lambda E$ связаны рекуррентным соотношением ($E$ — единичная матрица порядка $n$)

$$\begin{aligned} &A_k(\lambda) = (d-\lambda)\,A_{k-1}(\lambda) - c^2 A_{k-2}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots, n,\\ &A_{-1}(\lambda) = 0, \quad A_0(\lambda) = 1, \end{aligned}$$

из которого получим разностное уравнение

$$A_k(\lambda) - (d-\lambda)\,A_{k-1}(\lambda) + c^2 A_{k-2}(\lambda) = 0$$

с начальными условиями

$$A_1(\lambda) = d - \lambda, \quad A_2(\lambda) = (d-\lambda)^2 - c^2.$$

Корни характеристического уравнения

$$q^2 - (d-\lambda)\,q + c^2 = 0$$

запишем в виде

$$q_{1,2} = c\left(\frac{d-\lambda}{2c}\right) \,\pm\, \boldsymbol{i}|c|\sqrt{1 - \left(\frac{d-\lambda}{2c}\right)^2}.$$

Из теоремы о кругах Гершгорина следует, что $|d-\lambda| \leqslant 2\,|c|$, т.е. $\left|\dfrac{d-\lambda}{2c}\right| \leqslant 1$. Поэтому мы можем обозначить $\dfrac{d-\lambda}{2c} = \cos\varphi$ и, как это было сделано в п. 1, представить корни $q_{1,2}$ в тригонометрической форме

$$q_{1,2} = c\,(\cos\varphi \,\pm\, \boldsymbol{i}\sin\varphi)\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_k(\lambda) &= \alpha c^k (\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)^k + \beta c^k (\cos\varphi - \boldsymbol{i}\sin\varphi)^k =\\ &= (\alpha+\beta)\,c^k \cos k\varphi + \boldsymbol{i}\,(\alpha-\beta)\,c^k \sin k\varphi =\\ &= \alpha' c^k \cos k\varphi + \beta' c^k \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Начальные условия представим в виде

$$A_1(\lambda) = d - \lambda = \frac{d-\lambda}{2c}\,2c = 2c\cos\varphi,$$
$$A_2(\lambda) = (d-\lambda)^2 - c^2 = c^2\left(4\left(\frac{d-\lambda}{2c}\right)^2 - 1\right) = c^2\left(4\cos^2\varphi - 1\right).$$

Для определения $\alpha'$ и $\beta'$ имеем систему из двух линейных уравнений

$$A_1(\lambda) = \alpha' c\cos\varphi + \beta' c\sin\varphi = 2c\cos\varphi,$$
$$A_2(\lambda) = \alpha' c^2\cos 2\varphi + \beta' c^2\sin 2\varphi = c^2\left(4\cos^2\varphi - 1\right),$$

решая которую получим

$$\alpha' = 1, \quad \beta' = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Заметим, что $\cos\varphi \neq \pm 1$ и, следовательно, $\sin\varphi \neq 0$. Действительно, пусть $\cos\varphi = 1$. Тогда $\dfrac{d-\lambda}{2c} = 1$ и $\lambda = d - 2c$. Однако при этом $\lambda$ выполнено $A_n(\lambda) \neq 0$, поскольку

$$A_n(\lambda) = \begin{vmatrix} d-\lambda & c & & & & \\ c & d-\lambda & c & & & \\ & c & d-\lambda & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & d-\lambda & c \\ & & & & c & d-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 2c & c & & & & \\ c & 2c & c & & & \\ & c & 2c & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 2c & c \\ & & & & c & 2c \end{vmatrix} = c^n \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу (2). Аналогично рассматривается случай $\cos\varphi = 1$.

Итак, для вычисления $A_k(\lambda)$ имеем соотношение

$$A_k(\lambda) = c^k\cos k\varphi + c^k\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\sin k\varphi = c^k\,\frac{\cos k\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\sin k\varphi}{\sin k\varphi} =$$
$$= c^k\,\frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Из уравнения $A_n(\lambda) = 0$ следует, что $\sin(n+1)\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{n+1}\,k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, причем $k \neq 0$ и $k \neq n+1$, поскольку в противном случае окажется, что $\sin\varphi = 0$. Из $\dfrac{d-\lambda_k}{2c} = \cos\dfrac{\pi}{n+1}\,k$ получим выражение для собственных значений матрицы (1):

$$\lambda_k = d - 2c\cos\frac{\pi}{n+1}\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Представим теперь выражение (6) для спектра матрицы (1) в форме

$$\lambda_k = d - 2c\cos\frac{\pi}{n+1}\,k = 2c\left(\frac{d}{2c} - \cos\frac{\pi}{n+1}\,k\right) =$$
$$= 2c\left(\frac{d}{2c} - 1 + 1 - \cos\frac{\pi}{n+1}\,k\right) = \tag{7}$$
$$= 2c\left(\frac{d}{2c} - 1 + 2\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\,k\right) = d - 2c + 4c\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\,k$$

и покажем, что ее собственные значения могут быть выражены также следующей формулой:

$$\lambda_k = d + 2c\cos\frac{\pi}{n+1}\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Действительно, аналогичными выкладками формула (8) преобразуется к виду

$$\lambda_k = d - 2c + 4c\cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\, k = d - 2c + 4c\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n+1)}\, k\right) = \\ = d - 2c + 4c\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,(n+1-k).$$

Легко заметить, что в последнем равенстве и в (7) аргументы у синуса пробегают одни и те же точки единичной окружности, но в противоположных направлениях. Следовательно, спектр матрицы (1) может быть выражен как формулой (6), так и формулой (8). К такому же заключению можно придти, если преобразовать представление (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= d - 2c + 4c\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\, k = \\ &= d - 2c + 4c\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n+1)}\, k\right) = \\ &= d + 2c - 4c\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,(n+1-k). \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, из полученных здесь формул следует, что

— все собственные значения матрицы (1) принадлежат интервалу $(d-2c, d+2c)$ и сгущаются к его границам;

— матрица (1) положительно определена, если $d > 0$ и $d \geqslant 2\,|c|$;

— спектры симметричных якобиевых матриц с побочными диагоналями, равными $c$ и $-c$, совпадают при одинаковых значениях $d$.

Для того чтобы расположить собственные значения матрицы (1) в интервале $(d-2c, d+2c)$ слева направо (т.е. в порядке возрастания), в формуле (6) значения $k$ следует менять от 1 до $n$ при $c > 0$ и от $n$ до 1 при $c < 0$.

**4. Вычисление собственных векторов**. Для того чтобы вычислить собственные векторы матрицы (1), необходимо для каждого ее собственного значения $\lambda_k$ найти ненулевое решение однородной линейной системы $(A_n - \lambda_k\, E)\,\boldsymbol{x}^{(k)} = 0$. Если для $\lambda_k$ выбрать представление (6), то эта система эквивалентна системе линейных уравнений

$$c\, x^{(k)}_{j-1} + 2c\cos\frac{\pi k}{n+1}\, x^{(k)}_j + c\, x^{(k)}_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $x^{(k)}_0 = 0$ и $x^{(k)}_{n+1} = 0$. После сокращения на $c$, будем ее рассматривать как разностную краевую задачу. Легко проверить, что $q_{1,2} = -\left(\cos\dfrac{\pi k}{n+1} \pm \boldsymbol{i}\sin\dfrac{\pi k}{n+1}\right)$ — корни характеристического уравнения. Тогда общее решение этой разностной задачи представляется в виде $x^{(k)}_j = (-1)^j C_1 \cos\dfrac{j\pi k}{n+1} + (-1)^j C_2 \sin\dfrac{j\pi k}{n+1}$. Из первого краевого условия следует, что $C_1 = 0$. Отсюда заключаем, что

$$x^{(k)}_j = (-1)^j C_2 \sin\frac{j\pi k}{n+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

являются компонентами собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_k$ (заметим, что второе краевое условие удовлетворяется при любом $C_2$). В качестве одного из возможных способов нормировки собственных векторов можно взять в (10) условие $C_2 = 1$.

Пронормируем теперь полученные собственные векторы так, чтобы первая компонента каждого вектора равнялась 1. Тогда из (10) следует, что для $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} x^{(k)}_1 &= 1, \\ x^{(k)}_j &= (-1)^{j+1} \frac{\sin\dfrac{j\pi k}{n+1}}{\sin\dfrac{\pi k}{n+1}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что формула (11) определяет собственные векторы $\boldsymbol{x}^{(k)}$, упорядоченные таким образом, что они соответствуют собственным значениям $\lambda_k$, расположенным в порядке возрастания.

И наконец, получим из (10) систему нормированных собственных векторов (евклидова норма каждого такого вектора равна 1). Это означает, надо подобрать константу $C_2$ из условия

$$C_2^2 \left(\sin^2\frac{\pi k}{n+1} + \sin^2\frac{2\pi k}{n+1} + \cdots + \sin^2\frac{n\pi k}{n+1}\right) = C_2^2 \sum_{j=1}^{n} \sin^2\frac{j\pi k}{n+1} = 1.$$

Для этого выразим каждое слагаемое через косинус двойного аргумента $\sin^2 \dfrac{j\pi k}{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{2j\pi k}{n+1}\right)$ и перепишем данное условие нормировки в виде

$$C_2^2 \left( \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \cos \frac{2j\pi k}{n+1} \right) = 1.$$

Покажем, что последняя сумма равна $-1$.

Действительно, положив для упрощения выкладок $\alpha = \dfrac{2\pi k}{n+1}$, представим ее в форме

$$\sum_{j=1}^{n} \cos \frac{2j\pi k}{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \cos \left( \frac{2\pi k}{n+1} + (j-1)\frac{2\pi k}{n+1} \right) = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\alpha + (j-1)\,\alpha\right).$$

Применяя затем последовательно формулу

$$2 \sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b),$$

получим совокупность равенств

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha\right) - \sin\left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha\right),\\
&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha+\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\alpha\right) - \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha+(n-2)\,\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{2n-3}{2}\alpha\right) - \sin\left(\alpha + \frac{2n-5}{2}\alpha\right),\\
&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha+(n-1)\,\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\alpha\right) - \sin\left(\alpha + \frac{2n-3}{2}\alpha\right).
\end{aligned}$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}\cos(\alpha+(j-1)\,\alpha) &= \sin\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\alpha\right) - \sin\left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha\right) =\\
&= \sin\left((n+1)\,\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) =\\
&= \sin\left(2\pi k - \frac{\pi k}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) = -2\sin\frac{\alpha}{2},
\end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} \cos\frac{2j\pi k}{n+1} = -1.$$

Следовательно, условие нормировки примет вид

$$C_2^2 \left( \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \cos \frac{2j\pi k}{n+1} \right) = C_2^2\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = C_2^2\,\frac{n+1}{2} = 1,$$

поэтому для всех $k = 1, 2, \dots, n$ (т.е. для любого собственного вектора) имеем

$$C_2 = \sqrt{\frac{2}{n+1}}.$$

Таким образом, систему нормированных собственных векторов матрицы (1) образуют векторы

$$x_j^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{j\pi k}{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что эти векторы являются столбцами ортогональной матрицы. Следовательно, матрица (1) хорошо обусловлена по отношению к проблеме собственных значений. Это подтверждает известный факт, что всякая симметричная матрица обладает таким свойством.

**5. Пример**. В качестве примера возьмем матрицы

$$A_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$
$$A_n^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A_n^{(4)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & & \\ -1 & -2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

и вычислим их характеристики, рассмотренные выше для матриц вида (1).

1) Для вычисления определителей используем формулу (2):

$$\det\left(A_n^{(1)}\right) = \det\left(A_n^{(2)}\right) = 1+n,$$
$$\det\left(A_n^{(3)}\right) = \det\left(A_n^{(4)}\right) = (-1)^n\,(1+n)\,.$$

Отсюда видно, что матрицы $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ и $A_n^{(3)}$, $A_n^{(4)}$ являются положительно и отрицательно определенными соответственно.

2) Перед вычислением обратных матриц заметим, что корни характеристических уравнений, соответствующих матрицам $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$, имеют вид

$$q_{1,2}^{(1)} = 1 \quad \text{и} \quad q_{1,2}^{(2)} = -1.$$

Тогда из формулы (4) следует, что столбцы обратных матриц $A_n^{(1)^{-1}}$ и $A_n^{(2)^{-1}}$ определяются соответственно выражениями ($j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$)

$$x_k^{(j)} = \frac{(n+1-j)\,k}{n+1}, x_k^{(j)} = (-1)^{k-j+2}\,\frac{(n+1-j)\,k}{n+1}, k \leqslant j,$$
$$x_k^{(j)} = \frac{(n+1-k)\,j}{n+1}, x_k^{(j)} = (-1)^{k-j+2}\,\frac{(n+1-k)\,j}{n+1}, k \geqslant j.$$

Приведем вид обратных матриц $A_n^{(1)^{-1}}$ и $A_n^{(2)^{-1}}$ для $n = 2, 3, 4, 5$.

Случай $n = 2$:

$$A_n^{(1)^{-1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)^{-1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 3$:

$$A_n^{(1)^{-1}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)^{-1}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 4$:

$$A_n^{(1)^{-1}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)^{-1}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 5$:

$$A_n^{(1)^{-1}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)^{-1}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -6 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Получим теперь числа обусловленности указанных матриц по $\infty$-норме. Для этого достаточно вычислить только $\operatorname{cond}_\infty A_n^{(1)}$, поскольку числа обусловленности этих матриц совпадают.

Преобразуем сумму элементов $j$-го столбца матрицы $A_n^{(1)^{-1}}$ следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{(n+1-j)\,k}{n+1} + \sum_{k=j+1}^{n} \frac{(n+1-k)\,j}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left((n+1-j)\sum_{k=1}^{j} k + j \sum_{k=j+1}^{n}(n+1-k)\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left((n+1-j)\,\frac{j\,(j+1)}{2} + j\,(n+1)\,(n-j) - \right.$$

$$\left. - j\,\frac{(n-j)\,(j+1+n)}{2}\right) = \frac{j\,(n+1-j)}{2}.$$

Из этой записи заключаем, что максимум суммы достигается при $j = \dfrac{n}{2}$ или $j = \dfrac{n}{2} + 1$, если $n$ четно, и при $j = \dfrac{n+1}{2}$, если $n$ нечетно. Следовательно,

$$\left\| A_n^{(1)^{-1}} \right\|_\infty = \begin{cases} \dfrac{n\,(n+2)}{8}, & \text{если } n \text{ четно},\\[2mm] \dfrac{(n+1)^2}{8}, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Поскольку $\left\| A_n^{(1)} \right\|_\infty = 4$, то получаем, что

$$\operatorname{cond}_\infty A_n^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{n\,(n+2)}{2}, & \text{если } n \text{ четно},\\[2mm] \dfrac{(n+1)^2}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

3) Обратимся теперь к вычислению собственных значений. Из (7) и (9) следует, что спектры матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ образуют совпадающие множества

$$\left\{4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,(n+1-k)\,, \quad k = n, n-1, \ldots, 1\right\},$$

$$\left\{4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, n\right\},$$

а матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$ — также совпадающие множества

$$\left\{-4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,(n+1-k)\,, \quad k = n, n-1, \ldots, 1\right\},$$

$$\left\{-4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Отсюда видно, что спектральные числа обусловленности этих матриц совпадают. Поэтому ограничимся случаем оценивания $\operatorname{cond}_2 A_n^{(2)}$ как наиболее простым для анализа:

$$\operatorname{cond}_2 A_n^{(2)} = \frac{\max\limits_k \lambda_k}{\min\limits_k \lambda_k} = \frac{4\sin^2 \dfrac{\pi n}{2(n+1)}}{4\sin^2 \dfrac{\pi}{2(n+1)}} \sim \frac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)^2} \sim \frac{4}{\pi^2}\,n^2.$$

Выпишем спектры матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ для некоторых значений $n$ (спектры матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$ расположены симметрично им относительно нуля):

$$n = 2: \quad \{1,\, 3\}, \quad n = 3: \quad \left\{2-\sqrt{2},\, 2,\, 2+\sqrt{2}\right\},$$

$$n = 4: \quad \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\},$$

$$n = 5: \quad \left\{2-\sqrt{3},\, 1,\, 2,\, 3,\, 2+\sqrt{3}\right\}.$$

4) Теперь выпишем собственные векторы матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$, полученные по формуле (11) для $n = 2, 3, 4, 5$.

Случай $n = 2$:

$$\lambda_1 = 1: \quad \{1,\, -1\}, \quad \lambda_2 = 3: \quad \{1,\, 1\}.$$

Случай $n = 3$:

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}: \quad \left\{1,\, -\sqrt{2}, 1\right\}, \quad \lambda_2 = 2: \quad \{1,\, 0,\, -1\},$$
$$\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}: \quad \left\{1,\, \sqrt{2},\, 1\right\}.$$

Случай $n = 4$:

$$\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}: \quad \left\{1,\, -\frac{1+\sqrt{5}}{2},\, \frac{1+\sqrt{5}}{2},\, -1\right\},$$
$$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}: \quad \left\{1,\, -\frac{1-\sqrt{5}}{2},\, -\frac{1-\sqrt{5}}{2},\, 1\right\},$$
$$\lambda_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}: \quad \left\{1,\, \frac{1-\sqrt{5}}{2},\, -\frac{1-\sqrt{5}}{2},\, -1\right\},$$
$$\lambda_4 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}: \quad \left\{1,\, \frac{1+\sqrt{5}}{2},\, \frac{1+\sqrt{5}}{2},\, 1\right\}.$$

Случай $n = 5$:

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}: \quad \left\{1, -\sqrt{3},\, 2, -\sqrt{3},\, 1\right\}, \quad \lambda_2 = 1: \quad \{1,\, -1,\, 0,\, 1,\, -1\},$$
$$\lambda_3 = 2: \quad \{1,\, 0,\, -1,\, 0,\, 1\}, \qquad \lambda_4 = 3: \quad \{1,\, 1,\, 0,\, -1,\, -1\},$$
$$\lambda_5 = 2 + \sqrt{3}: \quad \left\{1,\, \sqrt{3},\, 2,\, \sqrt{3},\, 1\right\}.$$

Собственные векторы матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$, нормированнные по формуле (11), совпадают с указанными с точностью до знака.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 98–07–90018.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев К.Ю.* Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Изд-во механико-математического ф-та Моск. ун-та, 1998.
2. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
4. *Арушанян И.О., Чижонков Е.В.* Материалы семинарских занятий по курсу "Методы вычислений" / под ред. Арушаняна О.Б. М.: Изд-во механико-математического ф-та Моск. ун-та, 1999.
5. *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.
6. *Арушанян О.Б.* Автоматизация конструирования библиотек программ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Поступила в редакцию
25.03.2000