УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

К. Н. Волков[1]

Рассматривается подход к решению задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках в рамках метода контрольного объема. Приводятся особенности дискретизации невязких и вязких потоков в уравнениях Навье–Стокса, а также производных по времени. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения ряда задач газовой динамики (обтекание профиля).

Ключевые слова: неструктурированная сетка, уравнения Навье–Стокса, метод контрольного объема, течение около профиля, газовая динамика.

1. Введение. Развитие вычислительной газодинамики и компьютерной техники делает возможным разработку и реализацию методов расчета нестационарных течений жидкости и газа в пространственных областях сложной конфигурации.

Традиционно при решении задач газовой динамики применялись и применяются регулярные сетки (структурированные сетки с четырехугольными ячейками на поверхности и шестигранными в пространстве). Регулярность заключается в том, что сетка представляет собой упорядоченную по определенным правилам структуру данных с выраженными сеточными направлениями (в общем случае имеется криволинейная система координат). В преобразованном (вычислительном) пространстве ячейки сетки являются топологическими прямоугольниками (двумерные задачи) или параллелепипедами (трехмерные задачи). Для дискретизации уравнений Навье–Стокса используется, как правило, метод конечных разностей или метод контрольного объема.

Для структурированных сеток сравнительно легко реализуются вычислительные алгоритмы на основе современных монотонных методов высокого порядка точности. Однако диапазон геометрических объектов, описываемых структурированными сетками, ограничен. Как правило, невозможно построить единую сетку для всей расчетной области, в связи с чем производится разделение поля течения на подобласти, в каждой из которых генерируется своя сетка регулярной структуры. Блочный подход предоставляет широкие возможности для использования эффективных численных методов внутри отдельных блоков. Основной недостаток блочного подхода состоит в достаточно сложной процедуре сшивки решений, полученных в различных подобластях.

Характерной особенностью неструктурированных сеток является произвольное расположение узлов сетки в физической области. Произвольность расположения узлов понимается в том смысле, что отсутствуют выраженные сеточные направления и нет структуры сетки, подобной регулярным сеткам. Число ячеек, содержащих каждый конкретный узел, может изменяться от узла к узлу. Узлы сетки объединяются в многоугольники (двумерный случай) или в многогранники (трехмерный случай). Как правило, на плоскости используются треугольные и четырехугольные ячейки, а в пространстве — тетраэдры и призмы. Основное преимущество неструктурированных сеток перед регулярными состоит в большей гибкости при дискретизации физической области сложной формы, а также в возможности полной автоматизации их построения. Для неструктурированных сеток легче реализуются локальные сгущения и адаптация сетки в зависимости от поведения решения. Современные программы генерации сеток позволяют за приемлемое время строить сетки для сколь угодно сложных геометрических объектов. Для дискретизации уравнений Навье–Стокса применяются метод конечных элементов и метод контрольного объема. Метод конечных разностей на таких сетках неприменим.

Неструктурированные сетки широко используются при расчете внутренних течений жидкости и газа. Однако, в отличие от хорошо разработанных технологий метода конечных элементов, конечно-объемные технологии на неструктурированных сетках характеризуются отсутствием единых принципов, позволяющих провести дискретизацию конвективных и диффузионных потоков, источниковых членов, а также

[1] Балтийский государственный технический университет "Военмех" им. Д. Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; e-mail: kvolkov@kv7340.spb.edu

учет граничных условий. Достаточно часто способы дискретизации, имеющие различные характеристики, объединяются.

Гибридные сетки предполагают комбинирование регулярных и неструктурированных областей, позволяя сочетать достоинства и снизить влияние недостатков, присущих каждому типу сеток.

В данной работе рассматривается подход к дискретизации законов сохранения на структурированных и неструктурированных (гибридных) сетках в рамках метода контрольного объема применительно к двух- и трехмерным задачам механики жидкости и газа. Расчетная сетка (структурированная или неструктурированная) считается заданной, в частности, построенной при помощи одного из коммерческих пакетов, таких как Gambit или ICEM CFD. Разработанные программные средства используют трансляцию сетки из формата сеточного генератора в формат общедоступной библиотеки ADF Software Library (Advanced Data Format), которая является частью библиотеки CGNS (CFD General Notation System), разработанной сначала для внутреннего использования в корпорации Boeing, а затем получившей широкое распространение в NASA и компании McDonnel Douglas Aerospace. Вопрос построения сетки отделяется от проблемы дискретизации уравнений Навье–Стокса, а представление и хранение координат узлов сетки в виде структуры данных (массива) лежит в плоскости программной реализации и не рассматривается.

К преимуществам предлагаемого подхода можно отнести возможность работы как на структурированных, так и на неструктурированных сетках; использование разностных схем высокого порядка по времени и пространственным координатам; выбор для дискретизации законов сохранения среднемедианного контрольного объема; применение соотношений для расчета градиента и псевдолапласиана, позволяющих получить более точные результаты на сильно растянутых сетках в пограничном слое; запись соотношений для расчета потоков через грани внутренних и граничных контрольных объемов в одинаковой форме, что обеспечивает более простую программную реализацию. Кроме этого, данный подход позволяет реализовать стратегию адаптации сетки в соответствии с особенностями конкретного течения, а также дает обширные возможности для параллелизации процессов вычислений. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения ряда модельных задач.

2. Основные уравнения. В консервативных переменных уравнение, описывающее нестационарное трехмерное течение вязкого сжимаемого газа, записывается в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot F(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q) = H(Q, \nabla Q). \tag{1}$$

Здесь $Q(\boldsymbol{x}, t)$, $F(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q)$, $H(Q, \nabla Q)$ представляют собой вектор консервативных переменных в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени t, вектор потока через поверхность, ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\boldsymbol{n}$, и источниковый член соответственно. Уравнение, записанное в виде (1), пригодно для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений уравнение (1) дополняется уравнениями модели турбулентности, а вместо молекулярных коэффициентов переноса используются их эффективные значения.

Учитывая расщепление вектора потока на невязкую и вязкую составляющие:

$$\underbrace{F(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q)}_{\text{полный поток}} = \underbrace{F^I(\boldsymbol{n}, Q)}_{\text{невязкий поток}} + \underbrace{F^V(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q)}_{\text{вязкий поток}},$$

уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \left[F^I(\boldsymbol{n}, Q) + F^V(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q)\right] = H(Q, \nabla Q). \tag{2}$$

Введем вектор невязки $R(Q) = \nabla \cdot F(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q) - H(Q, \nabla Q)$. Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + R(Q) = 0. \tag{3}$$

Для дискретизации уравнений, записанных в виде (1), (2) или (3), используется метод контрольного объема на гибридной сетке.

3. Метод контрольного объема. Интегрируя уравнение (1) по контрольному объему V_i с границей ∂V_i, ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$, и применяя теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V_i} Q \, d\Omega + \oint\limits_{\partial V_i} \left[F(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q) - (\boldsymbol{v}_b \cdot \boldsymbol{n})Q\right] dS = \int\limits_{V_i} H(Q, \nabla Q) \, d\Omega. \tag{4}$$

Преобразуем уравнение (4) к виду

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + R_i(Q) = 0. \tag{5}$$

Вектор невязки в уравнении (5) находится из соотношения

$$R_i(Q) = \frac{1}{V_i}\left\{ \oint\limits_{\partial V_i} \big[F(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q) - (\boldsymbol{v}_b \cdot \boldsymbol{n})Q\big]\, dS - \int\limits_{V_i} H(Q, \nabla Q)\, d\Omega \right\}. \tag{6}$$

Под $\boldsymbol{v}_b = \{u_b, v_b, w_b\}$ понимается скорость перемещения границы ∂V_i контрольного объема V_i.

Среднемедианный контрольный объем V_i, связанный с узлом $i = 1, \ldots, N$ гибридной сетки, где N — число узлов, строится таким образом, что геометрические центры ячеек сетки с вершиной в узле i соединяются друг с другом через середины разделяющих их граней [1]. Пример контрольного объема показан на рис. 1. Несмотря на то, что такой выбор контрольного объема требует примерно в шесть раз большего объема памяти по сравнению со случаем, когда контрольный объем совпадает с ячейкой расчетной сетки, он позволяет получить более точные результаты.

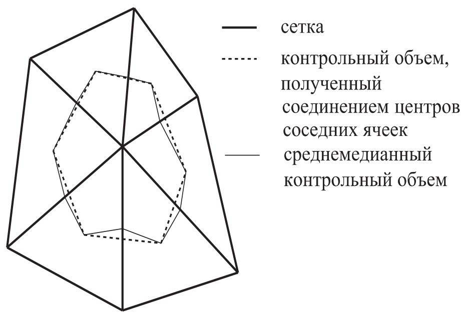

Рис. 1. Среднемедианный контрольный объем

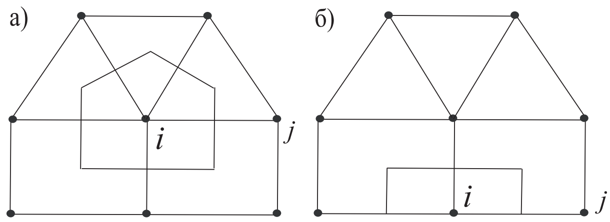

Рис. 2. Внутренний (а) и граничный (б) контрольные объемы

Весовые множители (площади) внутренних граней контрольного объема являются антисимметричными $\Delta s_{ij} = -\Delta s_{ji}$ $\forall\, j \in E_i$, а весовые множители его граничных граней — симметричными $\Delta s_{ik} = \Delta s_{ki}$ $\forall\, k \in B_i$ [1]. При этом имеет место следующее соотношение [2, 3]:

$$\sum_{j \in E_i} \boldsymbol{n}_{ij} \Delta s_{ij} + \sum_{k \in B_i} \boldsymbol{n}_{ik} \Delta s_{ik} = 0. \tag{7}$$

Здесь E_i — множество внутренних граней, связанных с узлом i; B_i — множество граничных граней, связанных с узлом i; $\boldsymbol{n}_{ij}$ — внешняя единичная нормаль, задающая ориентацию грани (i, j); Δs_{ij} — площадь грани, соединяющей узлы i и j; $\boldsymbol{n}_{ik}$ — внешняя единичная нормаль к граничной грани (i, k); Δs_{ik} — площадь граничной грани, соединяющей узлы i и k.

4. Расчет потоков через грани контрольного объема. Интеграл от потока в соотношении (6) разделяется на два слагаемых, связанных с внутренними и граничными гранями контрольного объема:

$$\int\limits_{\partial V_i} F(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q)\, ds = \sum_{j \in E_i} F(\boldsymbol{n}_{ij}, Q, \nabla Q)\Big|_{\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_j)/2} \boldsymbol{n}_{ij} \Delta s_{ij} + \sum_{k \in B_i} F(\boldsymbol{n}_{ik}, Q, \nabla Q)\Big|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{ik}} \boldsymbol{n}_{ik} \Delta s_{ik}. \tag{8}$$

С учетом (8) соотношение (6) примет следующий дискретный вид:

$$R_i = \frac{1}{V_i}\Bigg(\underbrace{\sum_{j \in E_i} F_{ij} \boldsymbol{n}_{ij} \Delta s_{ij}}_{\text{внутренние грани}} + \underbrace{\sum_{k \in B_i} F_{ik} \boldsymbol{n}_{ik} \Delta s_{ik}}_{\text{граничные грани}} - \underbrace{H_i V_i}_{\text{источник}} \Bigg). \tag{9}$$

Здесь F_{ij} — поток через внутреннюю грань (i, j), ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\boldsymbol{n}_{ij}$; F_{ik} — поток через граничную грань (i, k), ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\boldsymbol{n}_{ik}$; Δs_{ij} и Δs_{ik} — площади внутренней (i, j) и граничной (i, k) граней контрольного объема (рис. 2).

4.1. Внутренние грани. Поток через внутреннюю грань (i, j) контрольного объема вычисляется в серединной точке грани $\boldsymbol{x}_{ij} = (\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_j)/2$ как полусумма соответствующих узловых значений, умноженных на площадь грани $F_{ij} = \dfrac{F_i + F_j}{2}\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}$. Суммируя по всем внутренним граням $(\forall\, j \in E_i)$, получим $F = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j\in E_i}(F_i + F_j)\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}$. С учетом свойства антисимметричности весовых множителей внутренних граней для замкнутого контрольного объема можно записать

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j\in E_i}(F_i + F_j)\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} - F_i\sum_{j\in E_i}\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}.$$

Перепишем приведенное соотношение в виде $F = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j\in E_i}(F_j - F_i)\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}$. Учитывая, что $\Delta s_{ij} = -\Delta s_{ji}$ $\forall\, j \in E_i$, вклад каждой грани (i, j) контрольного объема представляется в виде

$$F_{ij} = \frac{1}{2}(F_j - F_i)\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}.$$

4.2. Граничные грани. Поток через граничную грань (i, k) контрольного объема рассчитывается в точке

$$\boldsymbol{x}_{ik} = \frac{1}{2D+2}\sum_{j\in G_k}\big[1 + (D+2)\delta_{jk}\big]\boldsymbol{x}_j,$$

где D — размерность задачи, G_k — множество узлов в граничной ячейке k. Вклад грани, лежащей на границе области, записывается отдельно. Учитывая соотношение (7), имеем

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j\in E_i}(F_i + F_j)\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} + F_{ik}\boldsymbol{n}_{ik}\Delta s_{ik} - F_{ik}\Big(\boldsymbol{n}_{ik}\Delta s_{ik} + \sum_{j\in E_i}\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}\Big).$$

В результате, для расчета потоков через грани граничного контрольного объема получим такое же соотношение, что и для внутренних граней:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j\in E_i}(F_j - F_i)\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}.$$

Использование одинаковых выражений для расчета потоков через грани внутренних и граничных контрольных объемов обеспечивает более простую программную реализацию.

5. Невязкие потоки. Из соотношений (6) и (9) имеем

$$R_i^I(Q) = \frac{1}{V_i}\oint\limits_{\partial V_i} F^I(\boldsymbol{n}, Q)\,dS = \frac{1}{V_i}\Big(\sum_{j\in E_i}F_{ij}^I\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} + \sum_{k\in B_i}F_{ik}^I\boldsymbol{n}_{ik}\Delta s_{ik}\Big).$$

Для дискретизации невязких потоков используется модифицированный вариант схемы MUSCL [4], которая представляет собой комбинацию центрированных конечных разностей второго и четвертого порядков, для переключения между которыми служит сглаживатель потока [5], построенный на основе характеристических переменных.

5.1. Частный случай. Рассмотрим модельное уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A\,\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

где $A = \partial F/\partial Q$. Дискретизируя уравнение (10), получим

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + A\,\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \tag{11}$$

При $A < 0$ разностная схема (11) становится неустойчивой. Для предотвращения неустойчивости представим матрицу A в виде суммы симметричной и антисимметричной частей $A = A^+ + A^-$, где

$$A^+ = \max\{A, 0\} = \frac{1}{2}\big(A + |A|\big), \quad A^- = \min\{A, 0\} = \frac{1}{2}\big(A - |A|\big).$$

После подстановки в уравнение (11) получим

$$\frac{Q_j^{n+1}-Q_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x}\left[\underbrace{A^+(Q_j^n-Q_{j-1}^n)}_{A>0}+\underbrace{A^-(Q_{j+1}^n-Q_j^n)}_{A<0}\right]=0. \tag{12}$$

Из (12) имеем

$$Q_j^{n+1}=Q_j^n-\underbrace{\frac{A\Delta t}{2\Delta x}(Q_{j+1}^n-Q_{j-1}^n)}_{\text{CDS-2}}\quad+\quad\underbrace{\frac{|A|\Delta t}{2\Delta x}(Q_{j+1}^n-2Q_j^n+Q_{j-1}^n)}_{\text{диссипативный член 2-го порядка}}\quad. \tag{13}$$

Соотношение (13) можно переписать в виде

$$Q_j^{n+1}=Q_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^n-F_{j-1/2}^n). \tag{14}$$

Потоки через грани контрольного объема в (14) находятся из соотношений

$$F_{j-1/2}^n=\frac{1}{2}\big[A(Q_j^n+Q_{j-1}^n)-|A|(Q_j^n-Q_{j-1}^n)\big];\quad F_{j+1/2}^n=\frac{1}{2}\big[A(Q_{j+1}^n+Q_j^n)-|A|(Q_{j+1}^n-Q_j^n)\big].$$

5.2. Общий случай. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+A\nabla Q=0. \tag{15}$$

Якобиан находится из соотношения $A=\dfrac{\partial F^I}{\partial Q}=\dfrac{\partial F_x^I}{\partial Q}+\dfrac{\partial F_y^I}{\partial Q}+\dfrac{\partial F_z^I}{\partial Q}$. Как и в частном случае, потоки представляются в виде

$$F(Q_L,Q_R)=F(Q_L)+\Delta F^-,\quad \Delta F^-=A^-\Delta Q;\quad F(Q_L,Q_R)=F(Q_R)-\Delta F^+,\quad \Delta F^+=A^+\Delta Q.$$

Складывая приведенные соотношения, получим

$$F(Q_L,Q_R)=\frac{1}{2}\big[F(Q_L)+F(Q_R)-|A|(Q_R-Q_L)\big]. \tag{16}$$

Индексы L и R соответствуют ячейкам, находящимся слева и справа от грани контрольного объема.

Соотношение, записанное в виде (16), можно использовать для расчета потоков через грани контрольного объема как на структурированной, так и на неструктурированной сетке.

Схема MUSCL для уравнения (15) записывается в виде

$$F_{ij}^I=\frac{1}{2}\big[F_{ij}^I(Q^+)+F_{ij}^I(Q^-)-|A_{ij}|(Q^+-Q^-)\big]. \tag{17}$$

В случае неструктурированной сетки вместо узлов j и $j+1$ рассматриваются узлы i и j каждой грани (i,j) контрольного объема. Поскольку построение векторов Q^+ и Q^- представляется достаточно затратным с вычислительной точки зрения [6], вместо (17) используется выражение

$$F_{ij}^I=\frac{1}{2}\big[F_{ij}^I(Q_j)+F_{ij}^I(Q_i)-|A_{ij}|(Q^+-Q^-)\big]. \tag{18}$$

Соотношение (18) представляет собой комбинацию центральной разностной производной второго порядка (CDS-2) и диссипативного члена. Диссипативное слагаемое представляется в виде

$$|A_{ij}|(Q^+-Q^-)=\frac{1}{2}(1-\varkappa)|A_{ij}|\left[\left(\frac{1}{2}Q_{j+}-Q_j+\frac{1}{2}Q_i\right)-\left(\frac{1}{2}Q_j-Q_i+\frac{1}{2}Q_{i-}\right)\right], \tag{19}$$

где $\varkappa\in[0,1]$. Вектора Q_{j+}, Q_j, Q_i, Q_{i-} соответствуют точкам $\boldsymbol{x}_{j+}$, $\boldsymbol{x}_j$, $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_{i-}$, лежащим на равном расстоянии друг от друга.

Соотношения (18) и (19) дают следующую разностную схему для расчета потока:

$$F_{ij}^I=\frac{1}{2}\Bigg\{\underbrace{\big[F_{ij}^I(Q_j)+F_{ij}^I(Q_i)\big]}_{\text{невязкий поток}}-\underbrace{\frac{1}{2}(1-\varkappa)|A_{ij}|\big[L_j(Q)-L_i(Q)\big]}_{\text{диссипативный член}}\Bigg\}, \tag{20}$$

где $L(Q)$ — псевдолапласиан. Для сохранения монотонности решения в схему (20) вводится ограничитель потока [6]. После линеаризации потоков получим

$$F^I_{ij} = \frac{1}{2}\Big\{ \underbrace{[A_{ij}Q_j + A_{ij}Q_i]}_{\text{невязкий поток}} - \underbrace{|A_{ij}|\Big[\frac{1}{3}(1-\varphi)\underbrace{\big(\widehat{L}^*_j(Q) - \widehat{L}^*_i(Q)\big)}_{\text{4-й порядок}} + \varphi\underbrace{(Q_j - Q_i)}_{\text{2-й порядок}}\Big]}_{\text{диссипативный член}} \Big\}, \tag{21}$$

где $\widehat{L}^*(Q)$ — модифицированный псевдолапласиан. Полагается, что $\varkappa = 1/3$. Соотношение (21) представляет собой комбинацию конечных разностей второго и четвертого порядков точности. Для переключения между ними служит функция (сглаживатель потока) $\varphi = \min\left\{\varepsilon\left|\dfrac{p_j - p_i}{p_j + p_i}\right|^2, 1\right\}$, где $\varepsilon = 8$ [7]. Роль дополнительного диссипативного члена в (20) и (21) заключается в демпфировании высокочастотных гармоник решения.

На твердой стенке, вследствие условия непротекания, имеем $F^I_{ik} = 0 \;\; \forall\, k \in B_i$. На входной границе расчетной области полагается

$$F^I_{ik} = \frac{1}{2}\big[F^I_k(Q_k) + F^I_k(Q_\infty) - |A_k|(Q_k - Q_\infty)\big],$$

где Q_∞ — вектор консервативных переменных на бесконечности.

Матрица A представляется в виде $A = R\,|\Lambda|\,L$, где Λ — диагональная матрица, составленная из собственных чисел якобиана, а R и L — матрицы, составленные из его правых и левых собственных векторов ($L = R^{-1}$).

5.3. Расчет псевдолапласиана. Псевдолапласиан представляет собой обобщение центрально-разностной производной второго порядка на неструктурированной сетке $L_i(Q) = \dfrac{1}{|E_i|}\sum\limits_{j\in E_i}(Q_j - Q_i)$, где $|E_i|$ — число элементов множества E_i [8].

Оценки показывают, что $L_i(Q) \sim O(h^2)\nabla^2 Q\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i}$, поэтому диссипативный член в (20) имеет порядок $O(h^3)$. После подстановки в соотношение (21) и деления на объем в (9), получается погрешность порядка $O(h^2)$.

Разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $\boldsymbol{x}_i$ дает

$$L_i(Q) = L_i(\boldsymbol{x})\nabla Q\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i} + O(h^2),$$

где $L_i(\boldsymbol{x}) = \{L_i x, L_i y, L_i z\}'$. Следовательно, на неравномерной сетке схема не имеет второго порядка точности. В случае, если Q является линейной функцией пространственных координат, то $L_i(Q) \neq 0$. Указанные обстоятельства приводят к потере точности решения, в связи с чем псевдолапласиан переопределяется следующим образом [9]:

$$L^*_i(Q) = L_i(Q) - \nabla Q_i L_i(\boldsymbol{x}). \tag{22}$$

Если $Q = a\boldsymbol{x} + c$, то $L_i(Q) = aL_i(\boldsymbol{x})$, $\nabla Q = a$, поэтому $L^*_i(Q) = 0$. Вместе с тем, представление псевдолапласиана в виде (22) допускает потерю устойчивости численного решения и дает неточные результаты на сильно растянутых сетках, используемых для расчета течения в пограничном слое [7]. Для обеспечения устойчивости решения вводится оператор масштабирования

$$\widehat{L}_i(Q) = \Big(\sum_{j\in E_i}\frac{1}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}\Big)^{-1}\sum_{j\in E_i}\frac{Q_j - Q_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}; \quad \widehat{L}_i(\boldsymbol{x}) = \Big(\sum_{j\in E_i}\frac{1}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}\Big)^{-1}\sum_{j\in E_i}\frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}.$$

После этого модифицированный псевдолапласиан находится из соотношения

$$\widehat{L}^*_i(Q) = \widehat{L}_i(Q) - \nabla Q_i\,\widehat{L}_i(\boldsymbol{x}). \tag{23}$$

Псевдолапласиан в виде (23) дает ноль на линейной функции и позволяет обеспечить точные результаты на сильно растянутых сетках [9]. Недостаток представления псевдолапласиана в виде (23) связан с анизотропным масштабированием, что приводит к демпфированию высокочастотных гармоник только в направлении наивысшего сеточного разрешения (поперек пограничного слоя).

5.4. Расчет градиента. Рассмотрим контрольный объем $abcde$, связанный с узлом i неструктурированной сетки (рис. 3). Учитывая, что $Q_i = \text{const}$ и $\nabla Q_i = 0$, и используя формулы Грина и теорему Стокса, получим

$$\nabla Q = \frac{1}{\Omega}\Big(\int_\Omega \nabla Q\, d\omega - \underbrace{\int_\Omega \nabla Q_i\, d\omega}_{=0} \Big) = \frac{1}{\Omega}\Big(\oint_L Q\, dl - \underbrace{\oint_L Q_i\, dl}_{=0} \Big). \tag{24}$$

Здесь Ω — расширенный контрольный объем 12345, участвующий в вычислении градиента; L — площадь граней расширенного контрольного объема; V — исходный контрольный объем $abcde$; S — площадь граней контрольного объема.

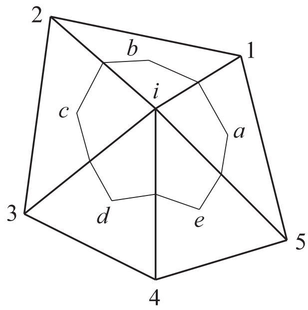

Рис. 3. Вычисление градиента

Интегралы, входящие в (24), представляются в виде

$$\oint_L Q\, dl = \sum_{1,2,3,4,5} \frac{Q_i + Q_j}{2}\, \boldsymbol{n}_{ij}, \qquad \oint_L Q_i\, dl = Q_i L.$$

При этом имеют место соотношения

$$S = S_{ab} + S_{bc} + S_{cd} + S_{de} + S_{ea}; \quad L = L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{45} + L_{51} = 3 \times S; \quad \Omega = 3 \times V.$$

Нормали к граням контрольного объема находятся из соотношений

$$\boldsymbol{n}_{ab} = \boldsymbol{n}_{51} + \boldsymbol{n}_{12}; \quad \boldsymbol{n}_{bc} = \boldsymbol{n}_{12} + \boldsymbol{n}_{23}; \quad \boldsymbol{n}_{cd} = \boldsymbol{n}_{23} + \boldsymbol{n}_{34}; \quad \boldsymbol{n}_{de} = \boldsymbol{n}_{34} + \boldsymbol{n}_{45}; \quad \boldsymbol{n}_{ea} = \boldsymbol{n}_{45} + \boldsymbol{n}_{51}.$$

Используя формулы Грина и учитывая (7), получим

$$(\nabla Q)_i = \frac{1}{V_i}\Big[\sum_{j\in E_i} \frac{1}{2}(Q_j - Q_i)\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} \Big]. \tag{25}$$

6. Вязкие потоки. Из соотношений (6) и (9) имеем

$$R_i^V(Q) = \frac{1}{V_i} \oint_{\partial V_i} F^V(\boldsymbol{n}, Q, \nabla Q)\, dS = \frac{1}{V_i}\Big(\sum_{j\in E_i} F_{ij}^V \boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} + \sum_{k\in B_i} F_{ik}^V \boldsymbol{n}_{ik}\Delta s_{ik} \Big). \tag{26}$$

Учитывая, что вследствие условий прилипания и непротекания на стенке $F_{ik}^V = 0\ \forall\, k \in B_i$, и пренебрегая вязкими силами на входной границе расчетной области, соотношение (26) можно переписать в следующем виде:

$$R_i^V = \frac{1}{V_i} \sum_{j\in E_i} F_{ij}^V \boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}. \tag{27}$$

Соотношение (27) используется для всех контрольных объемов, включая граничные.

После линеаризации соотношения (27) получим

$$R_i^V = \frac{1}{V_i}\Big[\sum_{i\in B_j} \frac{\partial F_{ij}^V}{\partial(\nabla Q_{ij})}\, \boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} \Big], \quad \frac{\partial F_{ij}^V}{\partial(\nabla Q_{ij})} = BM^{-1}\frac{\partial Q}{\partial l}\,, \tag{28}$$

где M — матрица перехода от консервативных переменных к примитивным.

Вязкий якобиан имеет вид $B = \dfrac{\partial F^V}{\partial Q} = \dfrac{\partial F^V}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial Q} = \dfrac{\partial F^V}{\partial V}M^{-1}$, где

$$\frac{\partial F^V}{\partial V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu n_{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu n_{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu n_{**} & 0 \\ -\dfrac{\gamma p}{\rho^2}\dfrac{\mu/\mathrm{Pr}}{\gamma-1}n_* & \mu u n_{**} & \mu v n_{**} & \mu w n_{**} & \dfrac{\gamma}{\rho}\dfrac{\mu/\mathrm{Pr}}{\gamma-1}n_* \end{pmatrix}.$$

Здесь $n_* = n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z$, $n_{**} = \dfrac{4}{3}n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z$, а $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y, n_z\}'$ и $\boldsymbol{l} = \{l_x, l_y, l_z\}'$ представляют собой единичный вектор нормали к грани (i,j) и единичный вектор, коллинеарный грани (i,j) и направленный от узла i к узлу j. На практике можно принять, что $n_* = 1$ и $n_{**} = 1$. При моделировании турбулентных течений вместо молекулярной вязкости μ и теплопроводности λ используются их эффективные значения.

Градиент находится из соотношения $\dfrac{\partial Q}{\partial l} = \dfrac{Q_j - Q_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}$.

В результате, соотношение (28) приобретает вид $R_i^V = \dfrac{1}{V_i}\sum\limits_{j\in E_i}\dfrac{Q_j - Q_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}BM^{-1}\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}$.

Для расчета градиента ∇Q в серединной точке каждой грани $\boldsymbol{x}_{ij} = (\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_j)/2$ в соотношении (28) используется полусумма соответствующих узловых значений $\overline{\nabla Q}_{ij} = \dfrac{1}{2}\big[(\nabla Q)_i + (\nabla Q)_j\big]$. Для расчета градиентов $(\nabla Q)_i$ и $(\nabla Q)_j$ в узлах сетки применяется соотношение (25). Однако среднее арифметическое центральных разностей не демпфирует высокочастотных гармоник решения [9]. Хотя выражение для расчета невязких потоков и включает диссипативные слагаемые, демпфирующие высокочастотные осцилляции решения, этого недостаточно в пограничном слое, где вязкие члены становятся доминирующими. Поэтому составляющая градиента в направлении наиболее короткой грани заменяется простыми разностями (edge derivative term) [7]

$$\nabla Q_{ij} = \overline{\nabla Q}_{ij} - \Big(\overline{\nabla Q}_{ij}\,\delta\boldsymbol{s}_{ij} - \frac{Q_j - Q_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}\Big)\delta\boldsymbol{s}_{ij}, \quad \delta\boldsymbol{s}_{ij} = \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}.$$

7. Дискретизация по времени. Перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{dQ}{dt} = L(Q), \tag{29}$$

где $L(Q)$ — дифференциальный оператор. После линеаризации уравнение (29) примет вид $\dfrac{dQ}{dt} = CQ$, где C — квадратная матрица.

Для дискретизации уравнения (29) используется k-шаговый метод Рунге–Кутта [10]

$$Q^{(n+1)} = \Lambda(kC)Q^{(n)}, \quad \Lambda(z) = \sum_{m=0}^{p} a_m z^m,$$

где $a_0 = a_1 = 1$ и $a_p \neq 0$. Область устойчивости $S = \Big\{z = x + iy \,:\, \big|\Lambda(z)\big| \leqslant 1\Big\}$ имеет вид окружности с радиусом r_c (для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы $\Delta t < r_c$). На комплексной плоскости область устойчивости представляется в виде круга $z = r\exp(i\,\theta)$. Радиус области устойчивости находится из соотношения [11] $r_c = \min\limits_{\theta} r(\theta)$ при $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

Многошаговый метод Рунге–Кутта можно записать в виде

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= Q^{(n)}; \\ Q^{(m)} &= Q^{(0)} + \lambda_m \Delta t L(Q^{(m-1)}), \quad m = 1, \ldots, k; \\ Q^{(n+1)} &= Q^{(k)}. \end{aligned}$$

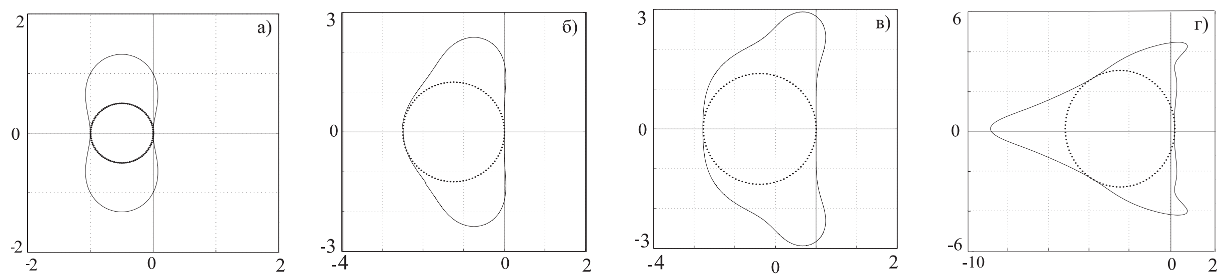

Рис. 4. Области устойчивости многошаговых методов Рунге–Кутта для $k = 2$ (а); 3 (б); 4 (в); 5 (г)

Структура методов Рунге–Кутта порядка $k = 1, \ldots, 5$

Одношаговый метод ($r_c = 0.25$)	$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(0)})$
Двухшаговый метод ($r_c = 0.5$)	$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(0)})$ $Q_i^{(2)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(1)})$
Трехшаговый метод ($r_c = 1.25$)	$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{3}\,\Delta t L(Q_i^{(0)})$ $Q_i^{(2)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{2}\,\Delta t L(Q_i^{(1)})$ $Q_i^{(3)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(2)})$
Четырехшаговый метод ($r_c = 1.39$)	$Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{4}\,\Delta t L(Q_i^{(0)})$ $Q_i^{(2)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{3}\,\Delta t L(Q_i^{(1)})$ $Q_i^{(3)} = Q_i^{(0)} + \frac{1}{2}\,\Delta t L(Q_i^{(2)})$ $Q_i^{(4)} = Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(3)})$
Пятишаговый метод ($r_c = 2.7$)	$Q_i^{(m)} = Q_i^{(0)} - \alpha_m \Delta t_i R_i^{(m-1)} \quad (m = 1, \ldots 5)$ $R_i^{(m-1)} = C_i(Q_i^{(m-1)}) - B_i^{(m-1)}$ $B_i^{(m-1)} = \beta_m D_i(Q_i^{(m-1)}) + (1 - \beta_m) B_i^{(m-2)}$

Индекс n соответствует слою по времени. Области устойчивости для методов Рунге–Кутта порядка $k = 2, 3, 4, 5$ показаны на рис. 4.

При этом $C_i\bigl(Q_i^{(m-1)}\bigr)$ представляет собой вклад конвективных слагаемых, $D_i\bigl(Q_i^{(m-1)}\bigr)$ учитывает вклад источниковых членов, а также физической и численной диссипации. Коэффициенты α_m и β_m имеют следующие значения [11]:

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_5 = 1;$$
$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \frac{14}{25}, \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = \frac{11}{25}.$$

Поскольку $\beta_2 = 0$ и $\beta_4 = 0$, то $D_i(Q_i^{(2)})$ и $D_i(Q_i^{(4)})$ не рассчитываются.

Шаг интегрирования по времени находится исходя из оценки невязких и вязких потоков

$$\frac{1}{\Delta t_i} = \frac{1}{\mathrm{CFL}} \max\left\{\frac{1}{\Delta t_i^I}, \frac{\varepsilon}{\Delta t_i^V}\right\},$$

где CFL — число Куранта–Фридрихса–Леви, $\varepsilon \sim 0.5$.

Шаг по времени Δt_i^I вычисляется исходя из спектрального радиуса якобиана дискретного невязкого

оператора
$$\frac{1}{\Delta t_i^I} = \frac{1}{V_i}\Big[\sum_{j\in E_i} \rho(A_{ij})\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} + \sum_{k\in B_i} \rho(A_{ik})\boldsymbol{n}_{ik}\Delta s_{ik}\Big],$$
где $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы $A = \partial F^I/\partial Q$.

Шаг по времени Δt_i^V вычисляется исходя из квазилинейной формы вязких потоков, записанных в примитивных переменных, и спектрального радиуса якобиана дискретного вязкого оператора. Полагая длину каждой грани равной $|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|$, получим
$$\frac{1}{\Delta t_i^V} = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in E_i} \rho(B_{ij})\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|}\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij},$$
где $\rho(B)$ — спектральный радиус матрицы $B = \partial F^V/\partial Q$.

8. Граничные условия. В момент времени $t = 0$ задаются начальные распределения скорости, температуры и давления.

При расчете невязких течений на непроницаемой стенке принимается граничное условие непротекания для нормальной составляющей скорости. Для моделирования вязких течений на непроницаемой стенке ставятся граничные условия непротекания и прилипания для нормальной и тангенциальной составляющих скорости. Для температуры задается температура стенки T_w. При постановке граничных условий для характеристик турбулентности на стенке используется метод пристеночных функций. Периодические граничные условия выставляются для всех искомых функций на противоположных границах расчетной области при расчете течений в области, обладающей свойством симметрии (повторяемости). Граничные условия на входной и выходной границах формулируются в зависимости от соотношения между скоростью потока и скоростью звука (знаков собственных чисел якобиана).

9. Многосеточный метод. Для ускорения сходимости используется многосеточный метод решения системы разностных уравнений, использующий несколько уровней дискретизации. Многосеточный подход позволяет разрешить конфликты между аппроксимацией гладких компонент решения, которые можно эффективно аппроксимировать на грубой сетке, но которые медленно сходятся на подробной сетке, и аппроксимацией высокочастотных компонент решения, которые необходимо аппроксимировать на подробной сетке. При этом объем вычислительной работы определяется реальным масштабом изменения решения.

9.1. Построение вложенных сеток. Для построения последовательности вложенных неструктурированных сеток используется метод схлопывающихся граней [12]. Два узла i и j неструктурированной сетки, связанных гранью, заменяются одним узлом, расположенным посередине между ними (рис. 5). Схлопывание ячейки производится в направлении наиболее короткой грани (рис. 6).

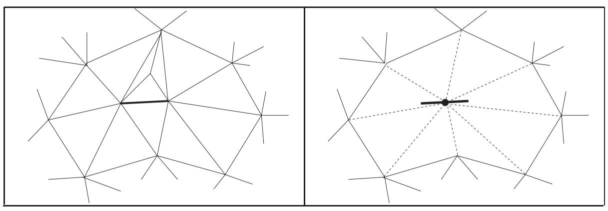

Рис. 5. Построение вложенной сетки

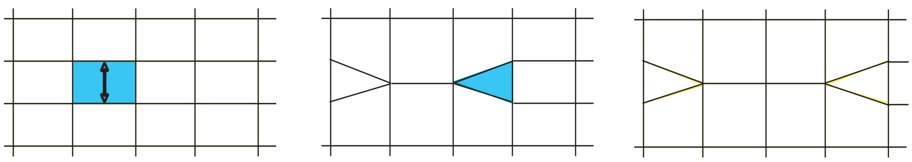

Рис. 6. Схлопывание ячейки в направлении наиболее короткой грани

9.2. Вычисление невязки. Для обеспечения сходимости необходимо, чтобы [13]
$$O_P + O_R > O_E,$$

где O_P и O_R — увеличенные на единицу наивысшие степени полиномов, которые интерполируются точно операторами продолжения и ограничения, а O_E — порядок дифференциального уравнения (равен двум для уравнений Навье–Стокса).

На шаге продолжения (с грубой сетки на подробную) для реконструкции решения используется линейная интерполяция

$$\Delta Q_i^h = \Delta Q_j^H + \left(\boldsymbol{x}_i^h - \boldsymbol{x}_j^H\right) \cdot \nabla \left(\Delta Q^H\right)_j \quad \forall\, i \in K_j,$$

где ΔQ представляет собой поправку решения. Индексы h и H относятся к подробной и грубой сетке.

На шаге ограничения (с хорошей сетки на грубую) вычисляется среднеобъемная невязка

$$R_j^H = \sum_{i\in K_j} V_i^h R_i^h \Big/ \sum_{i\in K_j} V_i^h. \tag{30}$$

Для большинства сеток выполняется условие $V_j^H = \sum\limits_{i\in K_j} V_i^h$. Однако около границы возможно, что $V_j^H > \sum\limits_{i\in K_j} V_i^h$, поэтому вместо (30) используется модифицированное соотношение

$$R_j^H = \sum_{i\in K_j} V_i^h R_i^h \Big/ \max\Big\{V_j^H, \sum_{i\in K_j} V_i^h\Big\}.$$

9.3. Решение системы разностных уравнений. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$N(Q) = f, \tag{31}$$

где N — дискретный оператор.

Решение проводится на последовательности сеток $h_1 > h_2 > \ldots > h_{M-1} > h$, начиная с самой грубой сетки. Решение на грубых сетках используется для коррекции аппроксимации решения на подробной сетке. На каждой сетке $k = 1, \ldots, M$ имеется свое разностное уравнение вида $N^k(Q) = f^k$. В отсутствие согласованного решения получается относительная погрешность аппроксимации порядка $O(h_k^p)$ на k-й сетке. Хорошая аппроксимация достигается тогда, когда вектор Q^{l-1} оказывается близким к Q^l по крайней мере с точностью порядка $O(h_{l-1}^p)$. Решение на более грубой сетке Q^l служит начальным приближением для решения на подробной сетке Q^{l-1}.

Для решения системы нелинейных уравнений (31) применяется схема полной аппроксимации (Full Approximation Scheme, FAS) [14]. В отличие от методов линеаризации по Ньютону с адаптацией числа многосеточных итераций на каждой итерации или с фиксированным числом многосеточных итераций на каждом шаге, схема полной аппроксимации позволяет избежать глобальной линеаризации (линеаризация проводится внутри цикла на самой грубой сетке) и не выполнять расчета больших якобианов, а также использовать разнообразные алгоритмы сглаживания. Согласования внутренних и внешних итераций не требуется.

Итерационную процедуру для системы (31) можно записать в виде

$$Q^{n+1} = Q^n + J^{-1}\big[f - N(Q^n)\big] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где J — якобиан, а $R = f - N(Q^n)$ представляет собой невязку.

В дискретном виде на подробной сетке имеем $N^h(\widehat{Q}^h) = f^h$, где $\widehat{Q}^h$ — точное решение дискретной системы. Выбирая Q^h в качестве начального приближения, определим погрешность решения $E^h = \widehat{Q}^h - Q^h$, поэтому

$$N^h(Q^h + E^h) = f^h. \tag{32}$$

Вычитая $N^h(Q^h)$ из обеих частей уравнения (32), получим

$$N^h(Q^h + E^h) - N^h(Q^h) = f^h - N^h(Q^h) = R^h(Q^h).$$

Ограничим невязку и решение на более грубую сетку

$$N^H(E^H) = I_h^H R^h(Q^h); \quad N^H(I_h^H Q^h + E^H) - N^H(I_h^H Q^h) = I_h^H\left[f^h - N^h(Q^h)\right].$$

Под I_h^H и I_H^h понимаются операторы ограничения на грубую сетку и переноса (интерполяции) на подробную сетку, в частности $Q^H = I_h^H R^h$, $Q^h = I_H^h R^H$. На подробную сетку переносится погрешность и невязка, а не решение, поскольку именно погрешность и невязка являются гладкими функциями.

При этом на грубой сетке

$$f^H = I_h^H\big[f^h - N^h(Q^h)\big] + N^H(I_h^H Q^h).$$

Для решения системы уравнений $N^H(Q^H) = f^H$ делается n_c сглаживающих итераций на грубой сетке (обычно $n_c \sim 10$).

Поправка при переходе с подробной на грубую сетку имеет вид

$$T_h^H = N^H(I_h^H Q^h) - I_h^H N^h(Q^h).$$

Поправка к уравнению на грубой сетке делается для того, чтобы решение на грубой сетке совпадало с решением на подробной сетке.

Алгоритм решения системы разностных уравнений реализуется в виде следующей итерационной последовательности шагов [12, 13].

1. Делается μ_1 приближений решения на подробной сетке при помощи метода Гаусса–Зейделя (предварительное сглаживание):

$$Q^h := Q^h + J_h^{-1}\big[f^h - N^h(Q^h)\big].$$

После расчета невязки $R^h = f^h - N^h(Q^h)$ производится ее ограничение на более грубую сетку $R^H = I_h^H R^h$. Точное решение на грубой сетке находится из соотношения $N^H(Q^H) = N^H(I_h^H Q^h) + R^H$, после чего осуществляется перенос погрешности на более подробную сетку $E^H = Q^H - I_h^H Q^h$.

2. Коррекция аппроксимации решения на более подробной сетке (ограничение на грубую сетку и интерполяция на подробной сетке):

$$Q^h := Q^h + E^h = Q^h + I_H^h\left(Q^H - I_h^H Q^h\right).$$

3. Делается μ_2 приближений решения на подробной сетке (постсглаживание):

$$Q^h := Q^h + J_h^{-1}\big[f^h - N^h(Q^h)\big].$$

Число многосеточных итераций составляет γM_k. Под γ понимается рекурсивный параметр, влияющий на качество коррекции на грубой сетке (используются разные значения для сеток различного уровня). Обычно полагается $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и используется либо V-цикл ($\gamma = 1$), либо W-цикл ($\gamma = 2$).

10. Предобусловливание. При моделировании низкоскоростных течений на основе сжимаемых уравнений Навье–Стокса возможно возникновение неустойчивости численного решения и уменьшение скорости сходимости из-за малой разницы между скоростями акустических и конвективных волн [11]. При этом шаг интегрирования по времени определяется скоростью наиболее быстрой волны, а достижение стационарного состояния зависит от скорости наиболее медленной волны. Цель предобусловливания состоит в модификации скоростей распространения волн (собственных чисел якобиана) таким образом, чтобы они имели одинаковый порядок величины. Для этого используется метод блочного предобусловливания Якоби [7].

10.1. Частный случай. Рассмотрим модифицированное уравнение конвективного переноса

$$P^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{33}$$

В дискретном виде уравнение (33) примет вид

$$P_i^{-1}\frac{\Delta Q_i}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x_i} = 0. \tag{34}$$

Потоки в уравнении (34) находятся из соотношений

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}\big[F(Q_i) + F(Q_{i-1})\big] - \frac{1}{2}P_i^{-1}|PA|(Q_i - Q_{i-1});$$
$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}\big[(F(Q_{i+1}) + F(Q_i)\big] - \frac{1}{2}P_i^{-1}|PA|(Q_{i+1} - Q_i).$$

Матрица предобусловливания P строится таким образом, чтобы новые скорости волн, которые определяются собственными числами матрицы PA, имели одинаковый порядок величины. Матрица предобусловливания представляется в симметричной форме [11]

$$P = N\Gamma N^{-1},$$

где матрица N перехода от симметризованных к консервативным переменным [15] и матрица Γ [16] имеют вид

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho}{c} & 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho u}{c} & \rho & 0 \\ \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho E}{c} & \rho u & \sqrt{\dfrac{\gamma}{\gamma-1}}\,\dfrac{p}{c} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец dU симметризованных переменных представляется в форме $dU = \big(dp/\rho c, du, dp - c^2 d\rho\big)^T$, при этом $Q = NU$, $U = N^{-1}Q$.

Очевидно, что $\varepsilon \sim 1$ при $\mathrm{M} \gg 1$, где M — число Маха. Матрица PA имеет собственные значения

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\,(1+\varepsilon)u \pm \frac{1}{2}\,\tau, \quad \text{где} \quad \tau = \sqrt{(1-\varepsilon)^2 u^2 + 4\varepsilon c^2},$$

а ее собственные вектора образуют столбцы матрицы

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{u(1-\varepsilon)+\tau}{2\varepsilon} & \dfrac{u(1-\varepsilon)-\tau}{2\varepsilon} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для получения устойчивого решения задачи необходимо, чтобы $\varepsilon = O(\mathrm{M}^2)$. Такой выбор гарантирует, что амплитуды акустических и конвективных волн имеют одинаковый порядок величины, пропорциональный скорости потока. Принимается, что [11] $\varepsilon = \min\{1, \eta \mathrm{M}^2_{\max}\}$, где $1 \leqslant \eta \leqslant 4$. Для нахождения $\mathrm{M}_{\max}$ проводится цикл по всем граням неструктурированной сетки. Находится максимальное число Маха для двух узлов, связанных с гранью, и сохраняется для обоих узлов. Процедура повторяется несколько раз, в результате чего находятся области с общим максимальным значением числа Маха. Такой подход гарантирует, что конвективные и акустические волны имеют одинаковый порядок величины, сравнимый со скоростью потока. Сделанная оценка является локальной и обеспечивает гладкое поведение ограничителя потока. Однако он неприменим при моделировании внутренних течений, в которых число Маха на входе в расчетную область обычно неизвестно, а также в случае высокоскоростных течений, в которых имеются застойные зоны. Предобусловливание осуществляется, когда $\mathrm{M} < 1/\sqrt{3}$.

10.2. Общий случай. Для ускорения сходимости вместо глобального и локального шага по времени используется шаг по времени, вычисленный на основе характеристических переменных. Уравнение (3) модифицируется следующим образом:

$$P^{-1}\,\frac{\partial Q}{\partial t} + R(Q) = 0. \tag{35}$$

Дискретизируя уравнение (35), получим

$$P_i^{-1}\,\frac{\Delta Q_i}{\Delta t} + R_i(Q_i) = 0. \tag{36}$$

С учетом расщепления потока на вязкую и невязкую составляющие матрица предобусловливания в узле i представляется в виде

$$P_i^{-1} = (P_i^I)^{-1} + (P_i^V)^{-1}.$$

Рассмотрим построение матрицы предобусловливания для невязких потоков. Поскольку интеграл от постоянного вектора по замкнутой поверхности равен нулю:

$$R_i^I(Q) = \frac{1}{V_i} \oint\limits_{\partial V_i} F^I(\boldsymbol{n}, Q)\, dS = 0,$$

то имеют место соотношения $\sum\limits_{j \in E_i} A_{ij} Q_i \boldsymbol{n}_{ij} \Delta s_{ij} = 0$, $\sum\limits_{j \in E_i} |A_{ij}| Q_i \boldsymbol{n}_{ij} \Delta s_{ij} = 0$. С учетом (21) получим

$$(P_i^I)^{-1} = \frac{1}{2V_i}\Big(\sum_{j \in E_i} |A_{ij}|\, \frac{1+2\varphi}{3}\, \boldsymbol{n}_{ij} \Delta s_{ij} + \sum_{k \in B_i} |A_{ik}|\, \frac{1+2\varphi}{3}\, \boldsymbol{n}_{ik} \Delta s_{ik} \Big).$$

Матрица предобусловливания оказывается различной для схем второго ($\varphi = 1$) и четвертого ($\varphi = 0$) порядков, в то время как на структурированной сетке матрица предобусловливания имеет одинаковый вид для обеих разностных схем [17]. При $\varphi = 1$ для внутренних и граничных узлов имеем

$$(P_i^I)^{-1} = \frac{1}{2V_i}\Big(\sum_{j\in E_i} |A_{ij}|\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} + \sum_{k\in B_i} |A_{ik}|\boldsymbol{n}_{ik}\Delta s_{ik}\Big).$$

При M $\ll 1$ вводится модификация невязких потоков [17]:

$$F_{ij}^I = \frac{1}{2}\Big\{ \big[F_{ij}^I(Q_j) + F_{ij}^I(Q_i)\big] - \Gamma_{ij}^{-1}|\Gamma_{ij}A_{ij}|\Big[\frac{1}{3}\,(1-\varphi)\big(\widehat{L}_j^*(Q) - \widehat{L}_i^*(Q)\big) + \varphi(Q_j - Q_i)\Big]\Big\}.$$

В результате матрица предобусловливания для невязких потоков имеет вид

$$(P_i^I)^{-1} = \frac{1}{2V_i}\,\Big(\sum_{j\in E_i} \Gamma_{ij}^{-1}|\Gamma_{ij}A_{ij}|\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} + \sum_{k\in B_i} \Gamma_i^{-1}|\Gamma_i A_{ik}|\boldsymbol{n}_{ik}\Delta s_{ik}\Big).$$

Матрица предобусловливания может быть представлена в симметричной форме [11]

$$P = N\Gamma N^{-1},$$

где матрица N перехода от симметризованных к консервативным переменным [15] и матрица Γ [16] имеют вид

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho u}{c} & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho v}{c} & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho w}{c} & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho E}{c} & \rho u & \rho v & \rho w & \sqrt{\dfrac{\gamma}{\gamma-1}}\,\dfrac{p}{c} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец dU симметризованных переменных представляется в форме

$$dU = \big(dp/\rho c, du, dv, dw, dp - c^2 d\rho\big)^T,$$

при этом $Q = NU$, $U = N^{-1}Q$. Матрица T перехода от симметризованных к примитивным переменным [15] задается следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma}\,\dfrac{\rho}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\rho c}{\sqrt{\gamma}} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{\gamma}{\gamma-1}}\,\rho c \end{pmatrix}.$$

При этом $V = TU$, $U = T^{-1}V$. Якобиан в симметризованных переменных находится из соотношения

$$\widetilde{A} = N^{-1}AN = N^{-1}(R\,\Lambda\,L^{-1})N.$$

Матрица предобусловливания для вязких потоков записывается в виде

$$(P_i^V)^{-1} = \frac{1}{V_i}\,\Big(\sum_{i\in B_j} BM^{-1}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}\Big) = \frac{1}{V_i}\sum_{i\in E_j} B_{ij}\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}.$$

При этом рассматриваются только внутренние грани контрольного объема, поскольку на границе расчетной области $F_{ik}^V = 0\ \ \forall\, k\in B_i$ вследствие условий непротекания и прилипания.

11. Модель турбулентности. В расчетах используется однопараметрическая модель турбулентности Спаларта–Аллмареса (SA-модель), уравнение которой для рабочей переменной $\widetilde{\nu}$ имеет вид [18]

$$\frac{\partial \rho\widetilde{\nu}}{\partial t} + (\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\widetilde{\nu} = \frac{1}{\sigma}\Big\{\nabla\big[(\mu+\rho\widetilde{\nu}\,)\nabla\widetilde{\nu}\,\big] + c_{b2}\rho(\nabla\widetilde{\nu}\,)^2\Big\} + S. \tag{37}$$

Источниковый член S учитывает порождение и диссипацию турбулентности.

Дискретизация уравнения (37) проводится так же, как и уравнений Навье–Стокса. Отличие заключается в дискретизации диффузионного члена, который имеет неконсервативную форму. Слагаемое $c_{b2}(\nabla\widetilde{\nu}\,)^2$ представляется в форме $c_{b2}\nabla\widetilde{\nu}^{\,n+1}\nabla\widetilde{\nu}^{\,n}$. При этом учитывается, что

$$\frac{1}{\sigma}\Big\{\nabla\big[(\mu+\rho\widetilde{\nu}\,)\nabla\widetilde{\nu}\,\big] + c_{b2}\rho(\nabla\widetilde{\nu}\,)^2\Big\} = \frac{1}{\sigma}\,\nabla\Big\{\big[\mu+(1+c_{b2})\rho\widetilde{\nu}\,\big]\nabla\widetilde{\nu}\,\Big\} - \frac{c_{b2}}{\sigma}\,\rho\widetilde{\nu}\,\nabla^2\widetilde{\nu}.$$

Невязкие потоки

$$\int\limits_{V_i}(\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\widetilde{\nu}\,dS =$$

$$\sum_{j\in E_i}\frac{1}{2}\Big\{\underbrace{\rho(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_{ij})(\widetilde{\nu}_j+\widetilde{\nu}_i)}_{\text{невязкий поток}} - \underbrace{|\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_{ij}|\Big[(1-\varphi)\underbrace{\rho\big(\widehat{L}^*_i(\widetilde{\nu}_j)-\widehat{L}^*_j(\widetilde{\nu}_i)\big)}_{\text{4-й порядок}} + \varphi\underbrace{\rho(\widetilde{\nu}_j-\widetilde{\nu}_i)}_{\text{2-й порядок}}\Big]}_{\text{диссипативный член}}\Big\}\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}.$$

Вязкие потоки

$$\int\limits_{V_i}\frac{1}{\sigma}\Big\{\nabla\big[(\mu+\rho\widetilde{\nu}\,)\nabla\widetilde{\nu}\,\big] + c_{b2}\rho(\nabla\widetilde{\nu}\,)^2\Big\}\,d\Omega = \sum_{j\in E_i}\frac{1}{\sigma}\Big[(\mu+\rho\widetilde{\nu}\,) + \frac{1}{2}\,c_{b2}\rho(\widetilde{\nu}_j-\widetilde{\nu}_i)\Big]\nabla\widetilde{\nu}\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}.$$

Источниковый член

$$\int\limits_{V_i}\rho S\,d\Omega = \rho\sum_{j\in E_i}\Big[\widetilde{S}\,\widetilde{\nu} - \Big(c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{\varkappa^2}\,f_{t2}\Big)\Big(\frac{\widetilde{\nu}}{d}\Big)^2 + f_{t1}(\Delta U)^2\Big]\,V_i. \tag{38}$$

Полагается, что $f_{t1}=f_{t2}=0$.

В данном случае $|A|$ заменяется абсолютной величиной скорости жидкости на грани (i,j) контрольного объема $|\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_{ij}|$, поэтому матрица предобусловливания для невязких потоков имеет следующий вид:

$$(P^I_i)^{-1} = \frac{1}{2V_i}\,\Big(\sum_{j\in E_i}|\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_{ij}|\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} + \sum_{i\in B_k}|\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{n}_{ik}|\boldsymbol{n}_{ik}\Delta s_{ik}\Big).$$

Матрица предобусловливания для вязких потоков представляется в форме

$$(P^V_i)^{-1} = \frac{1}{V_i}\,\sum_{j\in E_i}\frac{1}{\sigma}\,(\mu+\mu_t)\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|}\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}.$$

Шаг интегрирования по времени в узле i находится из соотношения

$$\frac{1}{\Delta t_i} = \frac{1}{2V_j}\,\Big[\sum_{j\in E_i}\rho|\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_{ij}|\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij} + \frac{2(\mu+\rho\widetilde{\nu}\,)}{\sigma}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|}\,\boldsymbol{n}_{ij}\Delta s_{ij}\Big].$$

Для предотвращения появления отрицательных значений рабочей переменной $\widetilde{\nu}$ ее приращение $\Delta\widetilde{\nu}$ во времени вычисляется по формуле $\Delta\widetilde{\nu} = \alpha_m\Delta t_\nu R^{(m-1)}$. Для того чтобы гарантировать положительность $\widetilde{\nu}$, полагается

$$\Delta\widetilde{\nu}_{\text{lim}} = \begin{cases}\Delta\widetilde{\nu}, & \text{если}\quad \Delta\widetilde{\nu}\leqslant 0,\\[4pt] \dfrac{(\widetilde{\nu}^{\,n}-\widetilde{\nu}_{\min})\Delta\widetilde{\nu}}{(\widetilde{\nu}^{\,n}-\widetilde{\nu}_{\min})+\Delta\widetilde{\nu}}, & \text{если}\quad \Delta\widetilde{\nu}>0.\end{cases}$$

На практике $\widetilde{\nu}_{\min} = \widetilde{\nu}_\infty = 10\,\nu_\infty$.

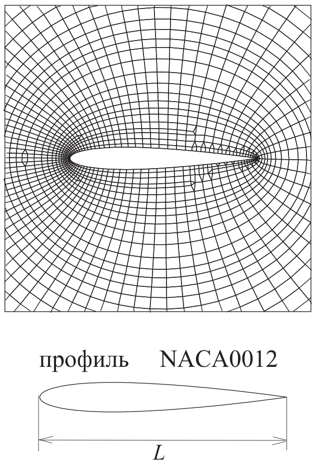

Рис. 7. Структурированная сетка для расчета обтекания

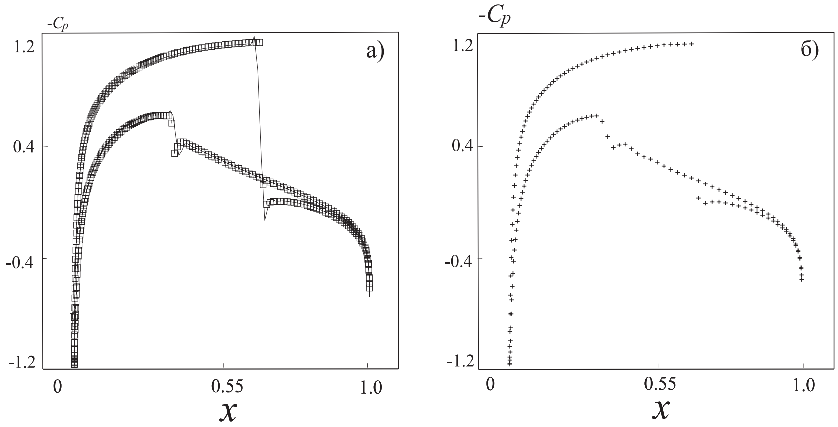

Рис. 8. Распределения коэффициента давления по поверхности профиля при $M_\infty = 0.8$, $\alpha = 1.25°$ в случае профиля невязкого (фрагмент а) и вязкого (фрагмент б, при этом $C_x = 0.0227$, $C_y = 0.3527$) обтекания. Значки $\square$ соответствуют расчету на структурированной сетке

Для сохранения положительности $\widetilde{\nu}$ во времени необходимо модифицировать процедуру Рунге–Кутта. Вклад источникового члена вычисляется при помощи неявной схемы, что эквивалентно в данном случае явной процедуре с уменьшенным шагом по времени:

$$\Delta t_\nu = \frac{\Delta t}{1 - \left| \dfrac{\partial S}{\partial \widetilde{\nu}} \right| \Delta t}.$$

12. Численные расчеты. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения ряда модельных задач.

12.1. Обтекание профиля. Рассмотрим ламинарное обтекание профиля NACA0012 потоком невязкой/вязкой жидкости. Расчеты проводились как на структурированной сетке типа O размерности 320×64 (фрагмент сетки показан на рис. 7), так и на неструктурированной сетке (четыре вложенные сетки). Неструктурированная сетка наилучшего разрешения содержала 156 000 узлов и 847 000 ячеек.

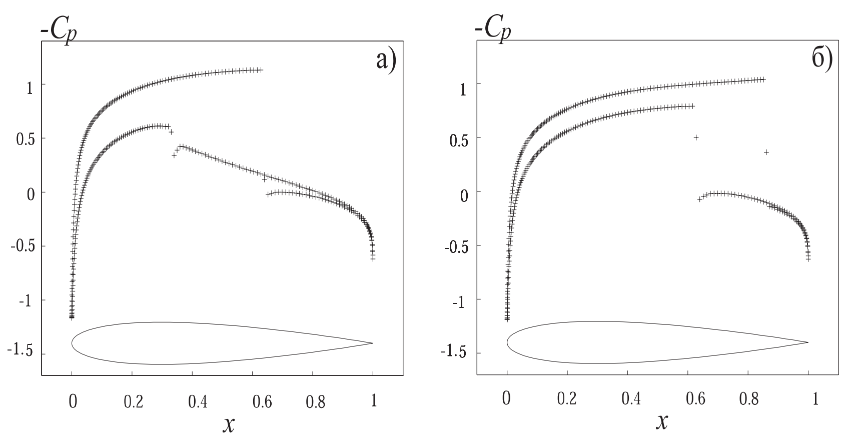

Рис. 9. Распределения коэффициента давления по поверхности профиля при $M = 0.85$, $\alpha = 1.25°$ (фрагмент а, при этом $C_x = 0.0225$, $C_y = 0.3536$) и $\alpha = 1.0°$ (фрагмент б, при этом $C_x = 0.0572$, $C_y = 0.3721$)

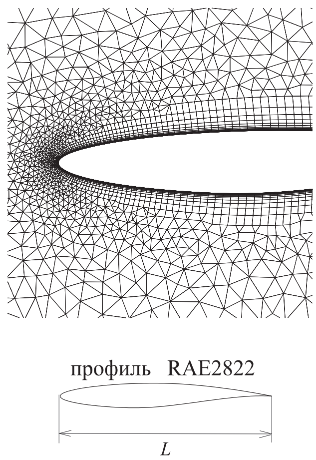

Рис. 10. Сгущение ячеек неструктурированной сетки около профиля

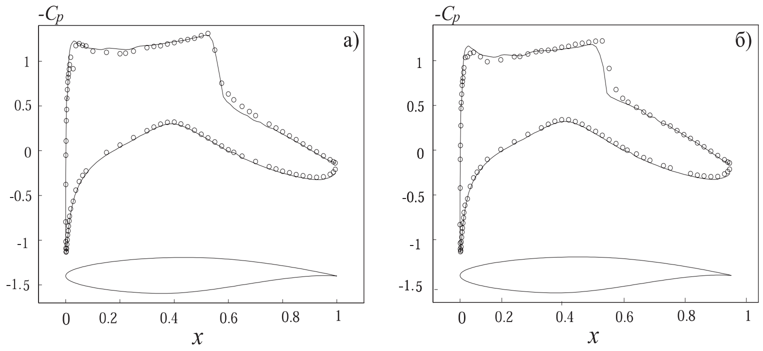

Рис. 11. Сравнение расчетного распределения (сплошная линия) коэффициента давления по поверхности профиля при $\mathrm{M} = 0.73$, $\alpha = 2.8°$ (фрагмент а) и $\alpha = 2.4°$ (фрагмент б, при этом $C_x = 0.8388$, $C_y = 0.0197$, $x/L = 0.03$) с данными физического эксперимента [19] (значки $\circ$)

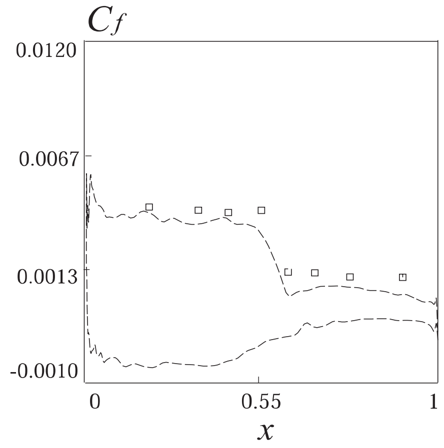

Рис. 12. Сравнение расчетного распределения (пунктирная линия) коэффициента трения по поверхности профиля при $\mathrm{M} = 0.73$, $\alpha = 2.4°$ с данными физического эксперимента [19] (значки $\square$)

Результаты расчетов приведены на рис. 8 и 9. В случае вязкого обтекания полагается, что $\mathrm{Re}_L = 500$ (число Рейнольдса Re_L рассчитывается по хорде профиля, под C_x и C_y понимаются коэффициент сопротивления и коэффициент подъемной силы).

12.2. Обтекание лопатки турбины. Рассмотрим турбулентное обтекание профиля RAE2822 при $\mathrm{Re}_L = 6.5 \cdot 10^6$. Расчеты проводились как на структурированной сетке типа O размерности 256×64, так и на гибридной сетке (структурированная область сетки находится около поверхности профиля), содержащей 19 100 узлов. Максимальное отношение сторон ячеек сетки достигает 5238 у стенки, а первый узел сетки располагается на расстоянии $y^+ < 1$ от поверхности профиля (рис. 10).

Результаты расчетов, относящиеся к распределениям коэффициента давления и коэффициента поверхностного трения по поверхности профиля, приведены на рис. 11 и 12.

13. Заключение. Разработан подход к дискретизации нестационарных уравнений Навье–Стокса на структурированных и неструктурированных сетках в рамках метода контрольного объема применительно к двух- и трехмерным задачам механики жидкости и газа. Предлагаемый подход использует разностные схемы высокого порядка по времени и пространственным переменным, среднемедианный контрольный объем и модифицированные соотношения для расчета градиента и псевдолапласиана, позволяющие получить более точные результаты на сильно растянутых сетках в пограничном слое, и одинаковые выражения для расчета потоков через грани внутренних и граничных контрольных объемов, что обеспечивает его более простую программную реализацию, позволяет легко реализовать стратегию адаптации сеток в соответствии с особенностями конкретных течений и дает обширные возможности для параллелизации процессов вычислений. Возможности разработанного подхода показаны на примере решения ряда практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barth T.J.* Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier–Stokes equations // VKI Lecture Series of Von Karman Institute for Fluid Dyanmics. N 1994-04, Belgium, 1994.
2. *Jameson A., Mavripils D.* Finite volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh // AIAA Paper. 1985. N 85–0435.
3. *Morgan K., Perire J., Peiro J., Hassan O.* The computation of three dimensional flows using unstructured grids // Computational Methods in Applied Mechanics Engineering. 1991. **87**. 335–352.
4. *Hirsch C.* Numerical computation of internal and external flows. New York: John Wiley & Sons, 1990.
5. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // Journal of Computational Physics. 1981. **43**. 357–372.
6. *Luo H., Baum J.D., Lohner R.* Edge-based finite element scheme for the Euler equations // AIAA Journal. 1994. **32**. N 6. 1183–1190.

7. *Crumpton P.I., Moinier P., Giles M.B.* An unstructured algorithm for high Reynolds number flows on highly stretched grids // Proceedings of the 10th International Conference on Numerical Methods for Laminar and Turbulent Flows, 21 – 25 July 1997, University of Wales. United Kingdom, Swansea, 1997.
8. *Jameson A.* Transonic aerofoil calculations using the Euler equations // Proceedings of the IMA Conference on Numerical Methods in Aeronautical Fluid Dynamics, March 1981, Reading, United Kingdom / Edited by P.L. Roe. Academic Press, 1982. 289–308.
9. *Crumpton P.I.* A cell vertex method for 3D Navier–Stokes solutions // Technical Report of the Oxford University Computing Laboratory. 1993. N NA–93/09.
10. *Moinier P., Giles M.B.* Stability analysis of preconditioned approximations of the Euler equations on unstructured meshes // Journal of Computational Physics. 2002. **178**. 498–519.
11. *Moinier P., Giles M.B.* Compressible Navier–Stokes equations for low Mach number applications // Proceedings of the ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, 4 – 7 September 2001. United Kingdom, Swansea, 2001.
12. *Crumpton P.I., Giles M.B.* Implicit time accurate solutions on unstructured dynamic grids // AIAA Paper. 1995. N 95–1671.
13. *Hackbusch W.* Multi-grid convergence theory // Lecture Notes in Mathematics. N 960. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 177–219.
14. *Brandt A.* Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Mathematics of Computation. 1977. **31**. 46–50.
15. *Abarbanel S., Gottlieb D.* Optimal time splitting for two- and three-dimensional Navier–Stokes equations with mixed derivatives // Journal of Computational Physics. 1981. **41**. 1–33.
16. *Turkel E.* Preconditioning-squared methods for multidimensional aerodynamics // AIAA Paper. 1997. N 97–2025.
17. *Pierce N.A., Giles M.B.* Preconditioning compressible flow calculations on stretched meshes // AIAA Paper. 1996. N 96–0889.
18. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1992. N 92–0439.
19. *Cook P.H., McDonald M.A., Firmin G.N.* Aerofil RAE 2822 — pressure distribution and boundary layer and wake measurements // Experimental Data Base for Computer Program Assessment. Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group (AGARD-AR). 1979. N 138. 36–64.

Поступила в редакцию
18.01.2005