2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

doi 10.26089/NumMet.v27r446 УДК 519.6

Асимптотико-численный подход к решению обратной задачи по определению доли сгоревшей биомассы в лесных пожарах с данными о положении фронта горения в локальной двумерной области наблюдения

Р. Л. Аргун

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики, Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-3749-1811, e-mail: argun.rl14@physics.msu.ru

Аннотация: В работе рассматривается обратная задача по определению доли сгоревшей биомассы в лесных пожарах с данными о положении фронта горения. Математическая модель распространения пожара представляет собой задачу для системы сингулярно возмущенных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция для температуры и биомассы с малым параметром при старшей производной, решение которой характеризуется наличием движущегося внутреннего переходного слоя (фронта горения). Классические подходы к решению подобных обратных задач, основанные на градиентных методах минимизации целевого функционала, требуют значительных вычислительных ресурсов из-за необходимости многократного решения прямой и сопряженной задач на достаточно густых сетках. Для экономии вычислительных ресурсов предлагается асимптотико-численный подход, основанный на упрощении исходной постановки задачи с помощью методов асимптотического анализа. В рамках этого подхода исходная постановка сводится к редуцированной обратной задаче — алгебраическому уравнению, которое в явном виде связывает искомую функцию остаточной биомассы с функцией наблюдаемого положения фронта и не содержит малого параметра в явном виде. Приведены результаты вычислительных экспериментов для модельного набора параметров, демонстрирующие эффективность описанного подхода. Показано, что точность восстановления решения исходной обратной задачи зависит от величины малого параметра в постановке задачи.

Ключевые слова: обратная задача, асимптотические методы, уравнение с малым параметром, внутренний переходный слой, численные методы.

Благодарности: Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

Для цитирования: Аргун Р.Л. Асимптотико-численный подход к решению обратной задачи по определению доли сгоревшей биомассы в лесных пожарах с данными о положении фронта горения в локальной двумерной области наблюдения // Вычислительные методы и программирование. 2026. **27**, № 4. 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446.

© Р. Л. Аргун

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

An asymptotic-numerical approach to solving the inverse problem of determining the proportion of burned biomass in forest fires with data on the position of the combustion front in a local two-dimensional observation area

Raul L. Argun
Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Physics, Department of Mathematics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-3749-1811, e-mail: argun.rl14@physics.msu.ru

Abstract: The paper considers the inverse problem of determining the proportion of burned biomass in landscape forest fires using data on the position of the combustion front. The mathematical model of fire propagation is a problem for a system of singularly perturbed reaction-diffusion-advection type equations for temperature and biomass with a small parameter multiplying the highest derivative, whose solution is characterized by the presence of a moving internal transition layer (combustion front). Classical approaches to solving such inverse problems, based on gradient methods for minimizing a cost functional, require significant computational resources due to the need for repeated solutions of the direct and adjoint problems on sufficiently fine grids. To save computational resources, an asymptotic-numerical approach is proposed, which simplifies the original problem formulation using methods of asymptotic analysis. Within this approach, the original formulation is reduced to a reduced inverse problem — an algebraic equation that explicitly relates the desired residual biomass function to the observed front position function and does not contain the small parameter explicitly. The results of computational experiments for a model set of parameters are presented, demonstrating the effectiveness of the described approach. It is shown that the accuracy of recovering the solution of the original inverse problem depends on the magnitude of the small parameter in the problem statement.

Keywords: inverse problem, asymptotic methods, equation with a small parameter, internal transition layer, numerical methods.

Acknowledgements: The study was conducted under the state assignment of Lomonosov Moscow State University.

For citation: R. L. Argun, "An asymptotic-numerical approach to solving the inverse problem of determining the proportion of burned biomass in landscape forest fires with data on the position of the combustion front in a local two-dimensional observation area," Numerical Methods and Programming. **27** (4), 756–777 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r446.

1. Введение. Каждый год в мире происходят десятки тысяч лесных пожаров. Это является важной проблемой для человечества, поскольку лесные пожары могут непосредственно навредить людям, живущим в зонах распространения огня и дыма. Однако на тушение горящих лесов могут уходить колоссальные ресурсы даже тогда, когда пожары никак не угрожают людям и не наносят значительного ущерба лесным экосистемам. В этом случае возникает вопрос: насколько лесные пожары вредны для самих лесов и связанных с ними экосистем? Известно, что в результате лесных пожаров сгорает не вся лесная биомасса, а лишь ее часть [1]. Более того, в регионах, в которых регулярно происходят лесные пожары, общая биомасса лесов со временем может вырасти [2]. Это происходит благодаря тому, что лесные пожары являются естественным источником разложения древесины, а также служат причиной прогрева почвы в регионах, для которых типично промерзание земли. При этом намеренное тушение горящего леса может привести к накоплению сухой древесной биомассы и спровоцировать риск еще более обширных и интенсивных лесных пожаров в будущем. Естественным образом возникает вопрос о необходимости тушения лесных пожаров в тех случаях, когда они не представляют непосредственной угрозы для людей и для экосистемы. Для ответа на этот вопрос необходимо оценить ущерб, который может быть нанесен

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

лесу после обширного горения. При анализе лесных экосистем на полученный ущерб важными являются в первую очередь сведения о том, сколько именно биомассы сгорело в результате того или иного лесного пожара. Кроме того, информация о количестве сгоревшей биомассы поможет дать ответ на важный для экологии вопрос о выбросах углекислого газа в результате горения леса. Можно проводить измерения доли сгоревшей биомассы напрямую после каждого пожара во всей области, в которой происходило горение леса. Но такой способ является долгим и экономически затратным, особенно в случае, если пожар затронул большую площадь. Но можно ли оценить ущерб без непосредственных измерений количества сгоревшей биомассы?

Инструментальная оценка гибели лесов (доли сгоревшей биомассы) на основе данных спутниковых наблюдений со специальным оборудованием была выполнена, например, в работах [1, 3]. В отличие от инструментального подхода к оценке количества сгоревшей биомассы, в настоящей работе используется подход, основанный на исследовании детерминированных математических моделей распространения лесных пожаров. В частности, рассматриваемая в работе обратная задача основана на математической модели, которая содержит нелинейные дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной. Решения соответствующих прямых задач для таких уравнений могут содержать узкие переходные слои — движущиеся фронты. Фронт реакции представляет собой область, в которой значения функции, описывающей какую-либо характеристику среды, достаточно резко изменяются от значений функции, описывающей одно состояние среды (например, концентрация биомассы в области, в которой уже прошел лесной пожар), к значеням функции, описывающей другое состояние (например, концентрация биомассы в области, не затронутой пожаром). Классические постановки обратных задач для нелинейных сингулярно возмущенных уравнений предполагают использование в качестве входных данных только данные на границе области. Например, в работах [4, 5] рассматриваются коэффициентные обратные задачи, в которых в качестве входных данных используется информация о решении прямой задачи в финальный момент времени. В работе [6] исследуется обратная задача по восстановлению начального условия в системе сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с данными о решении прямой задачи в финальный момент времени. В ряде прикладных обратных задач математической физики могут использоваться и другие входные данные. Так, в работе [7] рассматривается обратная задача по восстановлению параметров источников выбросов оксида азота в атмосферу с известными данными об интегральных характеристиках решения соответствующей трехмерной по пространственным переменным прямой задачи. В работах [8, 9] исследуются обратные задачи эластографии (как двумерные, так и трехмерные), в качестве входных данных которых используется информация о функциях, соответствующих смещениям тканей. В работе [10] рассматривается граничная обратная задача с данными о решении прямой задачи при некотором фиксированном значении пространственной координаты. За последние годы получили известность постановки обратных задач для нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, где в качестве входных данных используется положение движущегося фронта решения прямой задачи [11, 12]. В частности, в работе [11] рассматривается постановка двумерной по пространственным переменным обратной задачи, решение которой восстанавливается по известной информации о положении фронта решения прямой задачи.

Важно отметить, что классические подходы к решению обратных задач для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром при старшей производной, основанные на минимизации целевого функционала, требуют решения прямой и сопряженной задач на каждом шаге метода минимизации [12–15]. При этом в силу наличия резких внутренних переходных слоев в решениях прямой и сопряженной задач при реализации численного алгоритма приходится выбирать очень густые сетки по пространственным переменным. Таким образом, из-за необходимости многократного решения прямой и сопряженной задач на сетках очень высокого разрешения решение рассматриваемой обратной задачи при помощи классических методов будет требовать чрезвычайно больших объемов вычислений. Поэтому важным является вопрос о разработке и реализации более эффективных (с точки зрения вычислительных затрат) подходов к решению рассматриваемой двумерной по пространственным переменным обратной задачи по определению количества сгоревшей биомассы в случае распространения лесного пожара. Для этого в данной работе предлагается идея использования методов асимптотического анализа [16–18] для получения более простых, редуцированных постановок обратных задач. Такой подход используется, например, при решении обратных задач эластографии [8, 9]. В этих работах решение редуцированной задачи называется “быстрым” решением исходной обратной задачи. Важно отметить, что редуцированные обратные задачи имеют меньшую размерность по сравнению с исходными, а также не со-

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

держат малого параметра в явном виде. Так, в работе [19] вместо исходной обратной задачи для уравнения в частных производных была получена редуцированная задача для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, в работе [20] редуцированная задача является интегральным уравнением, а редуцированная задача в работе [21] — краевая задача на собственные значения для дифференциального уравнения. Все полученные таким способом задачи можно решить с использованием существенно меньших вычислительных мощностей по сравнению с исходными обратными задачами.

Приведенные ниже результаты работы структурированы следующим образом. В разделе 2 описана рассматриваемая в работе математическая модель распространения лесного пожара. В разделе 3 приведена математическая постановка обратной задачи по определению доли сгоревшей биомассы по известной информации о распространении фронта горения. В разделе 4 представлен асимптотический анализ исходной задачи, получена ее редуцированная постановка и описан численный метод ее решения. В разделе 5 обсуждаются результаты модельных вычислительных экспериментов и рассматриваются проблемы, возникающие при численном решении прямой и обратной задач.

2. Рассматриваемая модель распространения лесного пожара. В литературе в основном встречаются два подхода к моделированию лесных пожаров: имитационные модели и математические модели на основе уравнений типа реакция-диффузия-адвекция.

Дискретно-событийные имитационные модели распространения лесных пожаров, такие как клеточные автоматы, модели дискретных частиц и методы симуляции периметра, использующие пошаговое распространение огня (см., например, [22]), позволяют достаточно реалистично определить границы охваченного пожаром участка и положение фронта горения. В современных исследованиях в этом направлении для уточнения различных параметров используемых моделей обращаются к данным со спутников [23, 24]. Однако, как правило, имитационные модели не связывают объем сгоревшей биомассы с законом движения положения фронта горения лесного пожара явным образом, и поставить с их помощью обратную задачу по определению объема сгоревшей биомассы затруднительно без включения дополнительного математического аппарата. Поэтому в настоящей работе нас будет интересовать второй подход — математическое моделирование распространения лесных пожаров на основе решения системы дифференциальных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция.

В качестве примера математической модели лесного пожара стоит упомянуть ставшую классической работу Р. О. Вебера [25]. В основу этой модели положено модифицированное уравнение Колмогорова–Фишера для получения распределения температуры. В работе [26] рассматривается система уравнений реакция-диффузия-адвекция для температуры различных химических компонент, участвующих в процессе горения древесины на бетонной подложке, с учетом их химических превращений в ходе реакций горения. В работе [27] схожая система использовалась для моделирования лесных пожаров. Система уравнений химической кинетики в сочетании с уравнениями переноса газообразных компонент, сопутствующих процессу горения, была использована в работе [28]. Модельные системы каждой из этих работ содержат уравнения для температуры, газообразных компонент и твердой фракции. Активатором в этих системах служит температура, и именно она является причиной изменения объемной доли твердой фракции.

В настоящей работе используется модель, состоящая из двух уравнений, описывающих движение фронта температуры и движение фронта сгоревшей биомассы. По аналогии с работами [25–28], температура описывается уравнением реакция-диффузия-адвекция с линейным источником, который после модификации задается в виде разрывной модульной нелинейности. Как известно [29, 30], уравнения с такой нелинейностью допускают решения вида движущегося фронта. Именно этим в рассматриваемой модели обусловлен выбор нелинейности в уравнении для температуры. К примеру, часто используемая в моделях горения [31, 32] экспоненциально растущая зависимость источника от температуры не приводит к образованию решения вида фронта, а кубическая нелинейность в модели Я. Б. Зельдовича [33], напротив, приводит к образованию такого решения. Однако использование кубической нелинейности для моделирования фронта сгоревшей биомассы имеет существенный недостаток: она допускает повторное прохождение фронта в области, через которую он уже однажды прошел. И хотя на практике прохождение фронта “в обратную” сторону на небольшое расстояние возможно (как раз в силу того, что при однократном прохождении пожара сгорает не вся биомасса), в рамках рассматриваемой модели физически это означало бы абсурдную ситуацию, когда биомасса мгновенно восстанавливается, если, например, направление ветра резко изменится на противоположное. Использование разрывной нелинейности исключает такой случай, так как источников в области, где уже прошел пожар, не наблюдается. Кроме того, модель горения [33] содержит только уравнение типа реакция-диффузия для биомассы, поэтому в ней

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

невозможно учесть направление ветра при распространении лесного пожара в силу того, что ветер может переносить только горячий воздух (что соответствует температуре), а не саму горящую биомассу. Поэтому в рассматриваемой модели предполагается, что пожар распространяется в сторону от одного изначального источника с учетом направления ветра, но без смены направления на обратное (к источнику) даже в случае встречного ветра.

Итак, в настоящей работе была использована математическая модель, состоящая из системы уравнений: уравнения типа реакция-диффузия-адвекция для температуры и уравнения типа реакция-диффузия для биомассы с разрывной нелинейностью в правой части. Эта система является двумерным по пространственным переменным аналогом системы, представленной в работе [34]. Рассмотрим ее:

$$\begin{cases} D_\theta \Delta\theta - \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \Big(\boldsymbol{V}(x,y), \nabla\Big)\theta = g(\theta,u), \quad x \in (-L,L), \quad y \in (-L,L), \quad t \in (0,T], \\ D_u \Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(u,q,x,y,t), \quad x \in (-L,L), \quad y \in (-L,L), \quad t \in (0,T], \\ \theta_x(-L,y,t) = 0, \quad \theta_x(L,y,t) = 0, \quad y \in (-L,L), \quad t \in (0,T], \\ \theta_y(x,-L,t) = 0, \quad \theta_y(x,L,t) = 0, \quad x \in (-L,L), \quad t \in (0,T], \\ u_x(-L,y,t) = 0, \quad u_x(L,y,t) = 0, \quad y \in (-L,L), \quad t \in (0,T], \\ u_y(x,-L,t) = 0, \quad u_y(x,L,t) = 0, \quad x \in (-L,L), \quad t \in (0,T], \\ \theta(x,y,0) = \theta_{\text{init}}(x,y), \quad x \in [-L,L], \\ u(x,y,0) = u_{\text{init}}(x,y), \quad x \in [-L,L]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\theta(x,y,t)$ — распределение температуры, $u(x,y,t)$ — концентрация активного вещества, участвующего в горении, L — размер наблюдаемой области в километрах, T — время наблюдения, D_θ — коэффициент температуропроводности активного вещества, D_u — коэффициент диффузии активного вещества, $\boldsymbol{V}(x,y)$ — известное распределение поля скорости ветра (адвекции), $\theta_{\text{init}}(x,y)$ — начальное распределение температуры, $u_{\text{init}}(x,y)$ — начальное распределение активного вещества. В силу того, что используемая модель не описывает процесса начала формирования пожара, а только его распространение, моделирование начинается с момента, когда пожар уже сформировался. Обычно начальное условие можно брать в виде ступеньки по типу изображенной на рис. 1.

Правая часть уравнения для температуры имеет вид разрывной функции:

$$g(\theta,u) = \begin{cases} \theta - \theta_{\text{n}}, & \theta < \theta_{\text{tr}}, \\ \theta - (\theta_{\text{tr}} + Ru), & \theta \geqslant \theta_{\text{tr}}. \end{cases}$$

Здесь θ_{n} — температура окружающей среды в нормальных условиях, θ_{tr} — температура, при которой происходит возгорание древесины, $R > 0$ — коэффициент пропорциональности в реакции горения.

Обозначим

$$\overline{Q}_L = \{(x,y) : x \in [-L,L],\ y \in [-L,L]\}.$$

Область $\overline{Q}_L$ — это вся рассматриваемая область наблюдения. Пусть $\Omega_{\text{front}}(t)$ — область (x,y), которую захватил фронт при прохождении от начального момента времени $t = 0$ к моменту времени t, $\Omega_{\text{front}}(t) \subset \overline{Q}_L$ при $t \in [0,T]$. Тогда правую часть уравнения для биомассы можно записать в виде следующей разрывной функции:

$$f(u,q,x,y,t) = \begin{cases} u - u_{\max}(x,y), & (x,y) \in \overline{Q}_L \setminus \Omega_{\text{front}}(t), \\ u - q(x,y), & (x,y) \in \Omega_{\text{front}}(t). \end{cases}$$

Здесь $u_{\max}$ — изначальное количество биомассы, $q(x,y) \equiv u_{\min}(x,y)$ — количество биомассы, оставшейся после прохождения фронта горения. Для определения области $\Omega_{\text{front}}(t)$ необходимо знать информацию о положении фронта горения в каждый момент времени $t \in [0,T]$. В общем случае в фиксированный момент времени $t = t_0$ уравнение кривой положения фронта горения на плоскости xy задается из равенства $\theta(x,y,t_0) = \theta_{\text{tr}}$. В зависимости от особенности постановки задачи и начальных условий такая кривая может быть как незамкнутой, так и замкнутой. В некоторых случаях, если известно, что кривая положения фронта горения является незамкнутой, при ориентации распространения пожара вдоль положительного направления оси y уравнение этой кривой в фиксированный момент времени $t = t_0$ можно получить в явном виде $y = y_{\text{front}}(x,t_0)$, как это показано на рис. 1. В этом случае $\Omega_{\text{front}}(t) = \{(x,y,t) : x \in [-L,L],\ y \in [-L, y_{\text{front}}(x,t)],\ t \in [0,T]\}$.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

Замечание. В рассматриваемой модели $u_{\max}(x,y)$ — количество биомассы до распространения лесного пожара. Обычно эта величина предполагается равной 1 (или 100%). В силу того, что в результате лесного пожара сгорает не вся биомасса, а только некоторая ее часть [23, 24], очевидно, что $0 < u_{\min} < u_{\max}$. Предполагается, что существует связь между долей сгораемой биомассы в пожаре и скоростью его распространения. Однако скорость движения фронта пожара связана не только с долей сгораемой биомассы, но и со свойствами сгораемого топлива (например, с породой древесины). За это в постановке задачи отвечают коэффициенты D_θ и D_u, которые на практике определяются эмпирически, т.е. на основе данных о скоростях распространения известных лесных пожаров для разных типов древесины.

Поскольку речь идет о больших участках наблюдения ($2L \gg 1$ км), можно перейти к малому параметру, положив

$$\varepsilon = \frac{1}{2L}, \quad x' = \frac{x}{2L} = \varepsilon x, \quad y' = \frac{y}{2L} = \varepsilon y.$$

Аналогичным образом отмасштабировав время $T' = \varepsilon T$, перейдем к переменной

$$t' = \varepsilon t.$$

В новых переменных система (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 D_\theta \Delta\theta - \varepsilon\dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \varepsilon\Big(\boldsymbol{V}(x,y),\nabla\Big)\theta = g(\theta,u), \quad x\in(-0.5,0.5), \quad y\in(-0.5,0.5), \quad t\in(0,T], \\ \varepsilon^2 D_u \Delta u - \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t} = f(u,q,x,y,t), \quad x\in(-0.5,0.5), \quad y\in(-0.5,0.5), \quad t\in(0,T], \\ \theta_x(-0.5,y,t)=0, \quad \theta_x(0.5,y,t)=0, \quad y\in(-0.5,0.5), \quad t\in(0,T], \\ \theta_y(x,-0.5,t)=0, \quad \theta_y(x,0.5,t)=0, \quad x\in(-0.5,0.5), \quad t\in(0,T], \\ u_x(-0.5,y,t)=0, \quad u_x(0.5,y,t)=0, \quad y\in(-0.5,0.5), \quad t\in(0,T], \\ u_y(x,-0.5,t)=0, \quad u_y(x,0.5,t)=0, \quad x\in(-0.5,0.5), \quad t\in(0,T], \\ \theta(x,y,0)=\theta_{\text{init}}(x,y), \quad x\in[-0.5,0.5], \\ u(x,y,0)=u_{\text{init}}(x,y), \quad x\in[-0.5,0.5]. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь для простоты записи все штрихованные переменные были обозначены снова как переменные без штрихов.

Таким образом, получена система уравнений типа реакция-адвекция-диффузия для температуры $\theta(x,y,t)$ и биомассы $u(x,y,t)$.

3. Постановка обратной задачи. Рассматриваемая в работе обратная задача состоит в определении функции $q(x,y) = u_{\min}(x,y)$ в области $\overline{Q} = \{(x,y) : x\in[-0.5,0.5],\ y\in[-0.5,0.5]\}$ из системы (2) по известной дополнительной информации о положении кривой фронта горения. Зная информацию о $q(x,y)$ — количестве биомассы, оставшейся после пожара, можно будет оценить количество сгоревшей биомассы в наблюдаемой области как $u_{\max}(x,y) - q(x,y)$. Таким образом, будет получена оценка повреждения леса в результате лесного пожара как отношение количества сгоревшей биомассы к количеству всей биомассы до пожара.

При исследовании лесных пожаров с точки зрения наблюдаемых данных о положении фронта горения рассматриваемые обратные задачи по определению количества сгоревшей биомассы можно разделить на два вида: локальные и глобальные. В случае относительно небольшой области наблюдения видимый фронт горения представляет собой незамкнутую кривую, и рассматривается так называемая локальная постановка задачи. В случае же наблюдения за лесным пожаром в большой области (например, с использованием данных спутникового наблюдения) видимый фронт горения будет представлять собой замкнутую кривую, и соответствующая обратная задача будет рассматриваться уже в глобальной постановке. В данной работе будет рассматриваться обратная задача только в локальной области наблюдения.

Вернемся к постановке прямой задачи (2). Рассмотрим случай наблюдения распространения лесного пожара в “локальной” квадратной области $[-L,L]\times[-L,L]$ такой, что фронт распространения лесного пожара представляет собой незамкнутую кривую, задающуюся в явном виде, например функцией

$$y_{\text{front}} = h(x,t). \tag{3}$$

Если известна температура $\theta(x,y,t)$, то положение фронта горения $y(x,t)$ в данном случае определяются из равенства $\theta(x,y_{\text{front}}(x,t),t) = \theta_{\text{tr}}$, $t\in[0,T]$ (рис. 1).

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

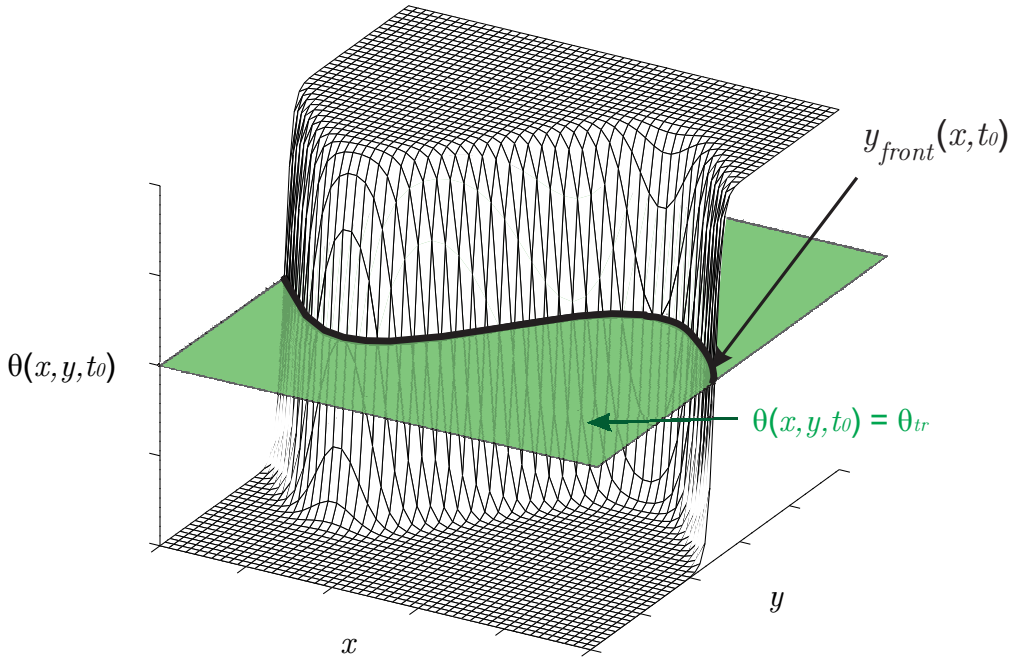


Рис. 1. Определение положения кривой локализации фронта лесного пожара $y_{\text{front}}(x,t)$ в фиксированный момент времени $t = t_0$ в случае локальной постановки обратной задачи

Fig. 1. Determination of the position of the localization curve of the forest fire front $y_{\text{front}}(x,t)$ at a fixed time $t = t_0$ in the case of a local formulation of the inverse problem

Распространение такого фронта можно заметить при наблюдении пожара с высоты полета исследовательских дронов или небольших самолетов (как показано на рис. 2). Таким образом, получена следующая "локальная" постановка обратной задачи.

Обратная задача состоит в определении в области $\overline{Q} = \{(x,y) : x \in [-0.5, 0.5],\ y \in [-0.5, 0.5]\}$ функции $q(x,y)$ по известной дополнительной информации о положении фронта горения (3). В рассматриваемой постановке $q(x,y) \in W_2^1(\overline{Q})$, $h(x,t) \in L_2([-0.5, 0.5]) \times L_2([0,T])$.

4. Асимптотический анализ. Обозначим

$$\overline{D} = \{(x,y,t) : x \in [-0.5, 0.5],\ y \in [-0.5, 0.5],\ t \in [0,T]\},$$
$$\overline{D}^- = \{(x,y,t) : x \in [-0.5, 0.5],\ y \in [-0.5, h(x,t)],\ t \in [0,T]\},$$
$$\overline{D}^+\{(x,y,t) : x \in [-0.5, 0.5],\ y \in [h(x,t), 0.5],\ t \in [0,T]\}.$$

Решением прямой задачи (2) в настоящей работе называется пара $\big(\theta(x,y,t), u(x,y,t)\big)$ функций класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^{2,2,1}(D^- \cup D^+)$, удовлетворяющих уравнениям системы (2) в каждой из областей D^- и D^+, а также граничным и начальным условиям задачи. Доказательство существования решения задачи (2) в одномерном по пространственной переменной случае, а также построение ее асимптотического приближения содержатся в работе [34].

Будем строить асимптотическое приближение $\big(\Theta(x,y,t), U(x,y,t)\big)$ решения задачи (2) отдельно в области $\overline{D}^-$, где прошел фронт, и в области $\overline{D}^+$ до прохождения фронта. В зоне, где фронт уже прошел, будем обозначать функции верхним индексом m, а в области до прохождения фронта — верхним индексом p:

$$\Theta(x,y,t) = \begin{cases} \Theta^m(x,y,t), & (x,y,t) \in D^-, \\ \Theta^p(x,y,t), & (x,y,t) \in D^+, \end{cases} \quad U(x,y,t) = \begin{cases} U^m(x,y,t), & (x,y,t) \in D^-, \\ U^p(x,y,t), & (x,y,t) \in D^+. \end{cases}$$

Для детального описания переходного слоя перейдем в окрестности кривой $y_{\text{front}} = h(x,t)$ к координатам Вишика–Люстерника (l,r) (как это было сделано в работах [35, 36]), где l — абсцисса кривой, r — расстояние до кривой от точки из ее окрестности вдоль нормали, проведенной из точки $(l, h(l,t))$.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

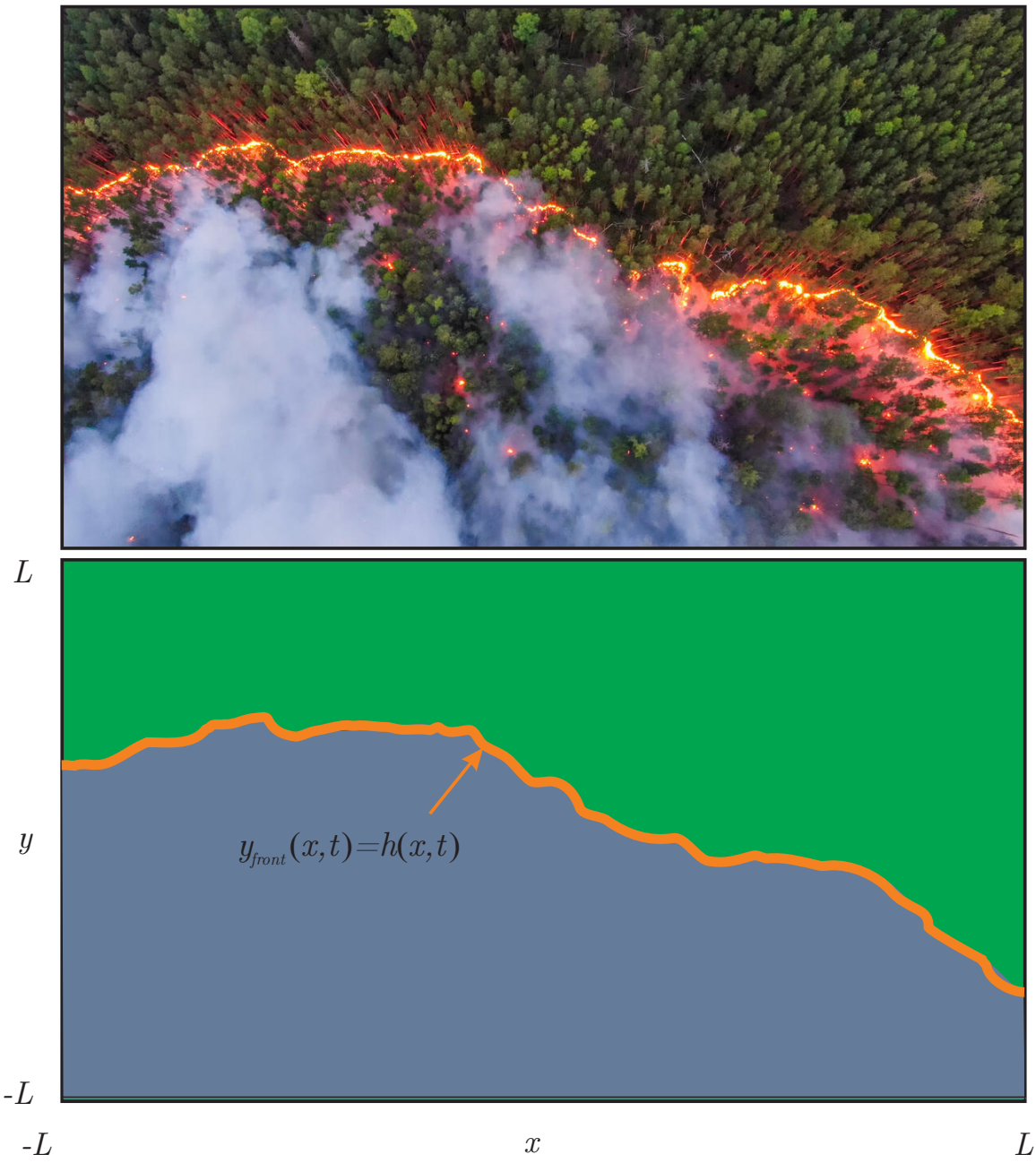


Рис. 2. Фронт горения леса в “локальной” области. Наблюдаемый фронт горения является незамкнутой кривой. Фото взято с официального сайта МЧС России [42]

Fig. 2. Forest fire front in a “local” region. The observed fire front is an open curve. Photo is taken from the official website of the Russian Ministry of Emergency Situations [42]

Декартовы координаты точки в окрестности кривой связаны с координатами (l, r) с помощью формул

$$x = l - r\,\frac{h_x(l,t)}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}, \qquad y = h(l,t) + r\,\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}},$$

где $h_x(x,t) = \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$.

В полуокрестности кривой, лежащей в области $\overline{D}^-$, считаем $r \leqslant 0$; тогда в полуокрестности кривой, лежащей в области $\overline{D}^+$, выполняется $r \geqslant 0$.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

Выпишем дифференциальные операторы, входящие в уравнения системы (2), в координатах (l, r):

$$\nabla = \left\{ -\frac{h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1+h_x^2}}{r\,h_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial l},\ \frac{1}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{h_x\sqrt{1+h_x^2}}{r\,h_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial l} \right\},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{h_{xx}}{rh_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial r} + \\ + \frac{1+h_x^2}{\left(rh_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}\right)^3}\left(2rh_xh_{xx}^2 + h_xh_{xx}(1+h_x^2)^{3/2} - rh_{xxx}(1+h_x^2)\right)\frac{\partial}{\partial l} + \\ + \frac{(1+h_x^2)^2}{\left(r\,h_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial l^2},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{rh_{xt} - h_th_x\sqrt{1+h_x^2}}{r\,h_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial l}.$$

Введем растянутую переменную $\xi = r/\varepsilon$. Перепишем дифференциальные операторы, выделяя старшие слагаемые:

$$\nabla = \left\{ -\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + O(1), \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + O(1) \right\},$$

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial \xi} + O(1).$$

Здесь все производные функции $h(x,t)$ берутся при $x = l$.

В соответствии с методом Васильевой–Бутузова [16–18] будем строить асимптотическое приближение в виде суммы регулярной части и функции переходного слоя:

$$\Theta^{m,p} = \bar\theta^{m,p}(x,y,t) + Q^{m,p}\theta(\xi,l,t),$$
$$U^{m,p} = \bar u^{m,p}(x,y,t) + Q^{m,p}u(\xi,l,t),$$

где $\bar\theta^{m,p}(x,y,t)$ и $\bar u^{m,p}(x,y,t)$ — функции регулярной части асимптотического приближения, $Q^{m,p}\theta(\xi,l,t)$ и $Q^{m,p}u(\xi,l,t)$ — функции переходного слоя.

Представим здесь каждое слагаемое в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$\bar\theta^{m,p} = \bar\theta_0^{m,p} + \varepsilon\bar\theta_1^{m,p} + \varepsilon^2\bar\theta_2^{m,p} + \dots,$$
$$Q^{m,p}\theta = Q^{m,p}\theta_0 + \varepsilon Q^{m,p}\theta_1 + \varepsilon^2 Q^{m,p}\theta_2 + \dots,$$
$$\bar u^{m,p} = \bar u_0^{m,p} + \varepsilon\bar u_1^{m,p} + \varepsilon^2\bar u_2^{m,p} + \dots,$$
$$Q^{m,p}u = Q^{m,p}u_0 + \varepsilon Q^{m,p}u_1 + \varepsilon^2 Q^{m,p}u_2 + \dots.$$

Кривую $y_{\text{front}} = h(x,t)$ также представим в виде разложения по степеням ε:

$$h(x,t) = h_0(x,t) + \varepsilon h_1(x,t) + \varepsilon^2 h_2(x,t) + \dots. \tag{4}$$

Будем строить асимптотическое приближение нулевого порядка, опуская все слагаемые порядка ε и выше:

$$\bar\theta^{m,p} = \bar\theta_0^{m,p} + O(\varepsilon),$$
$$Q^{m,p}\theta = Q^{m,p}\theta_0 + O(\varepsilon),$$
$$\bar u^{m,p} = \bar u_0^{m,p} + O(\varepsilon),$$
$$Q^{m,p}u = Q^{m,p}u_0 + O(\varepsilon),$$
$$h(x,t) = h_0(x,t) + O(\varepsilon).$$

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

Левая и правая части асимптотического представления сшиваются на кривой фронта до непрерывности:

$$\Theta^m(x,h(x,t),t)=\Theta^p(x,h(x,t),t)=\theta_{\text{tr}},$$
$$U^m(x,h(x,t),t)=U^p(x,h(x,t),t)=c(x,t).$$

Здесь $c(x,t)$ — уровень сшивания функций U^m и U^p. Эта функция связывает динамику кривой локализации фронта $y=h(x,t)$ с искомой функцией $q(x,y)$ и определяется из условий равенства производных по направлению нормали $\boldsymbol{n}$ к кривой $y=h(x,t)$ в каждый момент времени:

$$\frac{\partial\Theta^m}{\partial n}(x,h(x,t),t)=\frac{\partial\Theta^p}{\partial n}(x,h(x,t),t),$$
$$\frac{\partial U^m}{\partial n}(x,h(x,t),t)=\frac{\partial U^p}{\partial n}(x,h(x,t),t).$$

Регулярная часть асимптотического приближения будет являться решением вырожденной системы (2) (т.е. системы при $\varepsilon=0$), откуда можно получить:

$$\bar\theta^m=\theta_{\text{tr}}+Rq(x,y),\ \bar\theta^p=\theta_{\text{n}},$$
$$\bar u^m=q(x,y),\ \bar u^p=u_{\max}(x,y).$$

Чтобы получить задачу для функции переходного слоя $Q^mu(\xi,l,t)$, подставим асимптотическое приближение $U^m\equiv\bar u^m(x,y,t)+Q^mu(\xi,l,t)=q(x,y)+Q^mu(\xi,l,t)$ в уравнение для u из исходной системы (2) с учетом записи дифференциальных операторов в новых переменных и опуская слагаемые порядка ε и выше:

$$\varepsilon^2\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\big(q(x,y)+Q^mu(\xi,l,t)\big)-\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\big(q(x,y)+Q^mu(\xi,l,t)\big)=\big(q(x,y)+Q^mu(\xi,l,t)\big)-q(x,y).$$

Здесь правая часть уравнения не имеет разрыва, а содержит только источник вида $u-q(x,y)$ в силу того, что уравнение рассматривается только в области $\overline{D}^-$. Для сокращения выкладок здесь и далее постоянные коэффициенты D_u и D_θ принимаются равными 1.

Рассмотрим теперь производные функции $q(x,y)$ по переменной ξ. Для этого вспомним, что $q(x,y)=q\big(x(r,l),y(r,l)\big)$, а $r=\varepsilon\xi$, поэтому

$$\frac{\partial q(x(\varepsilon\xi,l),y(\varepsilon\xi,l))}{\partial\xi}=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x(\varepsilon\xi,l)}{\partial\xi}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y(\varepsilon\xi,l)}{\partial\xi}=q_x\varepsilon\left(-\frac{h_x(l,t)}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\right)+q_y\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\right)=O(\varepsilon).$$

Здесь производные x и y были получены дифференцированием формул преобразования координат. Аналогичным образом можно доказать, что

$$\frac{\partial^2q\big(x(\varepsilon\xi,l),y(\varepsilon\xi,l)\big)}{\partial\xi^2}=O(\varepsilon^2).$$

Тогда после отбрасывания всех членов порядка ε и выше получим для $Q^mu(\xi,l,t)$следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2Q^mu(\xi,l,t)}{\partial\xi^2}-\frac{h_t(l,t)}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\frac{\partial Q^mu(\xi,l,t)}{\partial\xi}=Q^mu(\xi,l,t).$$

С учетом граничных условий (в том числе типичного для функции переходного слоя условия на бесконечности) получим задачу для определения $Q^mu(\xi,l,t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2Q^mu}{\partial\xi^2}-\dfrac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\dfrac{\partial Q^mu}{\partial\xi}=Q^mu,\ \ \xi<0,\ \ 0<t\leqslant T,\\ Q^mu(0,l,t)=c(l,t)-q(l,h(l,t)),\\ Q^mu(-\infty,l,t)=0.\end{cases}\tag{5}$$

Обозначим

$$W(l,t)=\frac{h_t(l,h(l,t))}{\sqrt{1+h_x^2(l,h(l,t))}}.\tag{6}$$

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

Тогда решение задачи (5) можно записать в явном виде:

$$Q^m u(\xi,l,t) = \big[c(l,t) - q(l,h(l,t))\big] \exp\left(\frac{1}{2}\left(-W(l,t) + \sqrt{W^2(l,t)+4}\right)\xi\right).$$

Аналогично функция $Q^p u(\xi,l,t)$ будет определяться как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Q^p u}{\partial \xi^2} + W(l,t)\dfrac{\partial Q^p u}{\partial \xi} = Q^p u, \;\; \xi > 0, \;\; 0 < t \leqslant T, \\ Q^p u(0,l,t) = c(l,t) - u_{\max}, \\ Q^p u(+\infty,l,t) = 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи также можно записать в явном виде:

$$Q^p u(\xi,l,t) = \big[c(l,t) - u_{\max}\big] \exp\left(\frac{1}{2}\left(-W(l,t) - \sqrt{W^2(l,t)+4}\right)\xi\right).$$

Из условия сшивания производных

$$\frac{\partial Q^m u}{\partial \xi}(0,l,t) = \frac{\partial Q^p u}{\partial \xi}(0,l,t)$$

получаем равенство, связывающее $c(l,t)$ и $q(l,t)$:

$$\big[c(l,t) - q(l,h(l,t))\big]\left(-W(l,t) + \sqrt{W^2(l,t)+4}\right) = \big[c(l,t) - u_{\max}\big]\left(-W(l,t) - \sqrt{W^2(l,t)+4}\right),$$

откуда можно явным образом выразить $c(l,t)$:

$$c(l,t) = \frac{u_{\max}\left(W(l,t) + \sqrt{W^2(l,t)+4}\right) - q\big(l,h(l,t)\big)\left(W(l,t) - \sqrt{W^2(l,t)+4}\right)}{2\sqrt{W^2(l,t)+4}}. \tag{7}$$

Выпишем теперь задачу для функции $Q^m\theta$ с учетом записи дифференциальных операторов в новых переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Q^m\theta}{\partial \xi^2} + \left(-\dfrac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}} + V_1(l,h(l,t))\dfrac{h_x}{1+h_x^2} - V_2(l,h(l,t))\dfrac{1}{1+h_x^2}\right)\dfrac{\partial Q^m\theta}{\partial \xi} = Q^m\theta - RQ^m u(\xi,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi < 0, \;\; 0 < t \leqslant T, \\ Q^m\theta(0,l,t) + \theta_{\text{tr}} + Rq(l,h(l,t)) = \theta_{\text{tr}}, \\ Q^m\theta(-\infty,l,t) = 0. \end{cases}$$

Здесь V_1 и V_2 — x- и y-компоненты скорости адвекции соответственно.

Обозначим

$$V(l,t) = \frac{h_t(l,h(l,t))}{\sqrt{1+h_x^2(l,h(l,t))}} + V_1(l,h(l,t))\frac{h_x(l,h(l,t))}{1+h_x^2(l,h(l,t))} - V_2(l,h(l,t))\frac{1}{1+h_x^2(l,h(l,t))}. \tag{8}$$

Подставив функцию $Q^m u(\xi,t)$ в явном виде, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Q^m\theta}{\partial \xi^2} + V(l,t)\dfrac{\partial Q^m\theta}{\partial \xi} = Q^m\theta - R\big[c(l,t) - q\big(l,h(l,t)\big)\big]\exp\left(\dfrac{1}{2}\left(-W(l,t) + \sqrt{W^2(l,t)+4}\right)\xi\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi < 0, \;\; 0 < t \leqslant T, \\ Q^m\theta(0,l,t) = -Rq(l,h(l,t)), \\ Q^m\theta(-\infty,l,t) = 0. \end{cases}$$

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

Решение этой задачи можно записать в явном виде для двух разных случаев (ненулевая и нулевая скорости адвекции):

$$Q^m\theta(\xi,l,t)=\begin{cases}-\dfrac{2R\big[c(l,t)-q(l,h(l,t))\big]}{(V-W)\left(-W+\sqrt{W^2+4}\right)}\exp\left(\dfrac{1}{2}\left(-W+\sqrt{W^2+4}\right)\xi\right)+\big[-Rq(l,h(l,t))\big]+ \\ +\dfrac{2R\big[c(l,t)-q(l,h(l,t))\big]}{(V-W)\left(-W+\sqrt{W^2+4}\right)}\exp\left(\dfrac{1}{2}\left(-V+\sqrt{V^2+4}\right)\xi\right), & \boldsymbol{V}\neq\{0,0\}, \\ \left(-Rq(l,h(l,t))-\dfrac{R\big[c(l,t)-q(l,h(l,t))\big]}{\sqrt{W^2+4}}\xi\right)\exp\left(\dfrac{1}{2}\left(-W+\sqrt{W^2+4}\right)\xi\right), & \boldsymbol{V}=\{0,0\}.\end{cases}$$

Аналогично функция $Q^p\theta(\xi,l,t)$ определяется как решение следующей задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 Q^p\theta}{\partial\xi^2}+V(l,t)\dfrac{\partial Q^p\theta}{\partial\xi}=Q^p\theta, \quad \xi>0, \quad 0<t\leqslant T,\\ Q^p\theta(0,l,t)=\theta_{\text{tr}}-\theta_{\text{n}},\\ Q^p\theta(+\infty,l,t)=0.\end{cases}$$

Решение этой задачи в явном виде:

$$Q^p\theta(\xi,l,t)=\left(\theta_{\text{tr}}-\theta_{\text{n}}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left(-V(l,t)-\sqrt{V^2(l,t)+4}\right)\xi\right).$$

Запишем условие сшивания производных

$$\frac{\partial Q^m\theta}{\partial\xi}(0,l,t)=\frac{\partial Q^p\theta}{\partial\xi}(0,l,t)$$

и подставим в него явные выражения для производных функций $Q^{m,p}\theta(\xi,t)$.

В случае ненулевой скорости адвекции $\boldsymbol{V}\neq\{0,0\}$:

$$\begin{aligned}&-\frac{2R\big[c(l,t)-q(l,h(l,t))\big]}{V-W}+\\ &+\left(-Rq(l,h(l,t))+\frac{2R\big[c(l,t)-q(l,h(l,t))\big]}{(V-W)\left(-W+\sqrt{W^2+4}\right)}\right)\left(-V+\sqrt{V^2+4}\right)=\left(\theta_{\text{tr}}-\theta_{\text{n}}\right)\left(-V-\sqrt{V^2+4}\right).\end{aligned}\tag{9}$$

В случае нулевой скорости адвекции $\boldsymbol{V}=\{0,0\}$:

$$-\frac{1}{2}\left(-W+\sqrt{W^2+4}\right)Rq(l,h(l,t))-\frac{R\big[c(l,t)-q(l,h(l,t))\big]}{\sqrt{W^2+4}}=\left(\theta_{\text{tr}}-\theta_{\text{n}}\right)\frac{1}{2}\left(-V-\sqrt{V^2+4}\right).\tag{10}$$

Таким образом, зная выражения (6), (7), (8) для W, c, V соответственно, из уравнения (9) (или (10) в случае нулевой скорости адвекции) можно получить явную связь функции положения переходного слоя $h(x,t)$ и искомого решения обратной задачи $q(x,y)=q(x,h(x,t))$ при известных остальных параметрах. Уравнение (9) называется редуцированной обратной задачей по определению неизвестной величины q. Данная задача представляет собой алгебраическое уравнение относительно неизвестной величины q. Зная функцию $h(x,t)$, можно выразить неизвестную функцию $q(x,y)$ из этого уравнения в явном виде:

$$q=\frac{u_{\max}\left[\dfrac{\left(W+\sqrt{W^2+4}\right)^2}{4\sqrt{W^2+4}}\left(-V+\sqrt{V^2+4}\right)-\dfrac{W+\sqrt{W^2+4}}{\sqrt{W^2+4}}\right]-\dfrac{\left(\theta_{\text{tr}}-\theta_{\text{n}}\right)\left(-V-\sqrt{V^2+4}\right)}{R}(V-W)}{\dfrac{\left(W+\sqrt{W^2+4}\right)^2}{4\sqrt{W^2+4}}\left(-V+\sqrt{V^2+4}\right)-\dfrac{W+\sqrt{W^2+4}}{\sqrt{W^2+4}}+\left(-V+\sqrt{V^2+4}\right)(V-W)},\tag{11}$$

где W и V определяются из (6) и (8) соответственно.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

В данном выражении учитывается, что для второго аргумента функции $q(x,y)$ выполняется равенство $y = h(x,t)$, т.е. координата y всегда будет соответствовать координате положения фронта. Это означает, что при используемом подходе восстановить функцию $q(x,y)$ можно будет только в тех точках (x,y), где проходил фронт, т.е. в области $\overline{D}^+$ в каждый момент времени t.

Замечание. Ввиду того, что было найдено асимптотическое приближение нулевого порядка, уравнение (9) связывает искомую величину q именно с $h_0(x,t)$ — членом нулевого порядка в разложении (4) функции положения переходного слоя. Формально исходная обратная задача (2), (3) в операторном виде может быть записана как

$$A\big(q(x,y)\big) = h(x,t). \tag{12}$$

После применения асимптотического анализа эта задача была заменена на другую, редуцированную задачу (9) вида

$$A_\varepsilon\big(q(x,y)\big) = h(x,t). \tag{13}$$

Здесь A_ε — оператор редуцированной задачи. Эта задача была получена в предположении о том, что $h(x,t) \approx h_0(x,t)$ и при последующей замене $h_0(x,t)$ на $h(x,t)$, однако из (4) следует, что

$$|h(x,t) - h_0(x,t)| = O(\varepsilon), \quad x \in [-0.5, 0.5], \quad t \in [0,T].$$

Поэтому решение редуцированной задачи (13) будет тем ближе к решению исходной обратной задачи (12), чем меньше значение малого параметра ε. Таким образом, точность аппроксимации исходного оператора A оператором редуцированной задачи A_ε должна зависеть от величины малого параметра ε (несмотря на то, что сам малый параметр в редуцированную задачу (9) в явном виде не входит).

5. Некоторые примеры расчетов. Рассмотрим эффективность работы предложенного подхода на примере решения обратной задачи (2), (3) для следующего набора модельных параметров:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = 10^{-1.5}, \quad V_x(x,y) = 0.5, \quad V_y(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\cdot(0.3)^2}\right),\\
&T = 0.25, \quad \theta_{\text{n}} = 1, \quad \theta_{\text{tr}} = 15, \quad R = 60, \quad D_\theta = 1, \quad D_u = 1,\\
&q(x,y) \equiv u_{\min} = 0.4, \quad u_{\max} = 1,\\
&\theta_{\text{init}}(x,y;\varepsilon) = 0.5\,(\theta_{\text{n}} - Ru_{\min})\tanh\left(\frac{y+0.25}{2\varepsilon}\right) + 0.5\,(Ru_{\min} + \theta_{\text{n}}),\\
&u_{\text{init}]}(x,y;\varepsilon) = 0.5\,(u_{\max} - u_{\min})\tanh\left(\frac{y+0.25}{2\varepsilon}\right) + 0.5\,(u_{\min} + u_{\max}).
\end{aligned} \tag{14}$$

Для решения обратной задачи (2), (3) с модельными параметрами (14) нам нужно будет симулировать входные данные (3). При известном решении прямой задачи $\theta(x,y,t)$ функция $h(x,t)$, описывающая положение фронта реакции, может быть найдена в процессе решения системы (2) как решение следующего уравнения (см. рис. 1):

$$\theta(x,h(x,t),t) = \theta_{\text{tr}}, \quad x \in [-0.5, 0.5], \quad t \in [0,T].$$

С целью симуляции входных данных $h(x,t)$ сначала необходимо решить прямую задачу (2). Для численного решения системы (2) применяется жесткий метод прямых (SMOL) [37], и задача для уравнений в частных производных сводится к задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для реализации этого подхода нам требуется ввести сетки как по временно́й, так и по пространственным переменным. Введем равномерные сетки X_{N_x} и Y_{N_y} по пространственным переменным x и y с N_x и N_y отрезками разбиения соответственно:

$$\begin{aligned}
X_{N_x} &= \left\{x_i,\ 0 \leqslant i \leqslant N_x :\ x_i = -0.5 + is_x,\ s_x = \frac{0.5-(-0.5)}{N_x}\right\},\\
Y_{N_y} &= \left\{y_j,\ 0 \leqslant j \leqslant N_y :\ y_j = -0.5 + js_y,\ s_y = \frac{0.5-(-0.5)}{N_y}\right\}.
\end{aligned}$$

Также введем по временно́й переменной t равномерную сетку T_M, которая имеет M отрезков разбиения:

$$T_M = \left\{t_k,\ 0 \leqslant k \leqslant M :\ t_k = 0 + ks_t,\ s_t = \frac{T}{M}\right\}.$$

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

Конечно-разностная аппроксимация пространственных производных в системе (2) дает нам дифференциально-алгебраическую систему, из которой требуется определить неизвестные значения функций $\theta_{i,j} \equiv \theta_{i,j}(t) \equiv \theta(x_i, y_j, t)$, $u_{i,j} \equiv u_{i,j}(t) \equiv u(x_i, y_j, t)$, $i = \overline{0, N_x}$, $j = \overline{0, N_y}$. Затем полученная система дифференциально-алгебраических уравнений может быть эффективно решена с помощью одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом CROS1 [38]. Выбор этой схемы обусловлен тем, что, несмотря на то, что она является одностадийной, она обладает вторым порядком точности $O(\tau^2)$ и L_2-устойчивостью.

Таким образом, для рассматриваемого набора модельных параметров была симулирована функция $h(x,t)$ при использовании равномерных сеток X_{N_x}, Y_{N_y} и T_M с числом отрезков разбиения $N_x = 50$, $N_y = 2000$ и $M = 5000$.

На рис. 3 представлен результат восстановления функции $q^{\text{inv}}(x,y)$ — решения редуцированной задачи (9). Обратим внимание на то, что искомая функция $q(x,y)$ в каждый момент времени t восстанавливается только в той области, где проходил фронт. На графике видно, что полученное решение хорошо согласуется с модельным всюду, кроме границ. Такое поведение решения можно объяснить следующим. На начальной границе (в данном случае вблизи значения $y = -0.25$ — там, где фронт начал двигаться) большое отклонение обусловлено тем, что решение прямой задачи принимает вид устойчивой ступеньки не мгновенно, а за время порядка $|\ln \varepsilon|$ [39, 40]. До этого момента решению доверять нельзя, так как асимптотический анализ применим только в случае рассмотрения устойчивого решения типа ступеньки. Отклонение решения от модельного на правой границе по x (там, где $x = 0.5$) может быть обусловлено ошибкой в конечно-разностной аппроксимации правого граничного условия по координате x при решении прямой задачи.

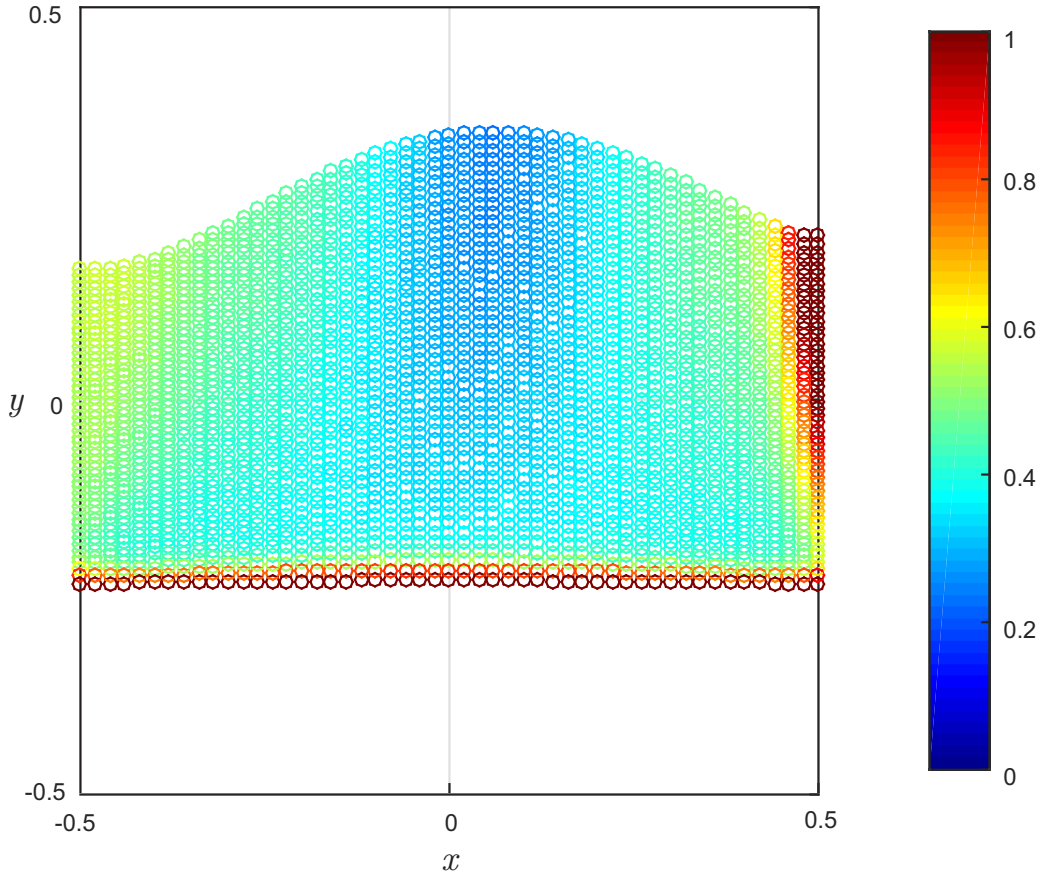


Рис. 3. Решение $q^{\text{inv}}(x,y)$ обратной задачи (2), (3) с набором модельных параметров (14) и симулированными на их основе входными данными (3). Шкала цвета соответствует найденному значению q^{inv} в точке с координатами (x,y)

Fig. 3. Solution $q^{\text{inv}}(x,y)$ of the inverse problem (2), (3) with a set of model parameters (14) and input data (3) simulated on their basis. The color scale corresponds to the found value of q^{inv} at the point with coordinates (x,y)

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

Исследуем вопрос об устойчивости решения обратной задачи в зависимости от уровня ошибки δ ее входных данных для разных значений параметра ε. Для этого во входные данные обратной задачи (т.е. функцию переходного слоя $h(x,t)$) вносится случайная ошибка δ:

$$h_\delta(x,t) = h(x,t) \cdot \left(1 + \frac{\delta}{100} \cdot P\right).$$

Здесь δ — желаемая относительная ошибка в процентах, P — случайное число, равномерно распределенное на отрезке $[-1,1]$. Задавая ошибку таким образом для двух фиксированных значений ε ($\varepsilon = 10^{-1.5}$ и $\varepsilon = 10^{-2}$) и разных значений δ, найдем приближенное решение обратной задачи $q_\delta^{\mathrm{inv}}(x,y)$ в явном виде (11), полученном из редуцированной обратной задачи (9). Для каждого такого эксперимента будем вычислять относительную ошибку решения обратной задачи в процентах по формуле

$$E_{\mathrm{rel}}(\delta) = \frac{\|q_\delta^{\mathrm{inv}}(x,y) - q^{\mathrm{model}}(x,y)\|_{W_2^1(\hat{Q})}}{\|q^{\mathrm{model}}(x,y)\|_{W_2^1(\hat{Q})}} \times 100\%. \tag{15}$$

Относительная ошибка (15) решения обратной задачи оценивается в области $\hat{Q}$, в которой можно доверять решению. В данном наборе численных экспериментов для проведения расчетов была выбрана область $\hat{Q} = \{(x,y) : x \in [-0.5, 0.44], y \in [h(x,t_\varepsilon), h(x,T)]\}$, где $t_\varepsilon = 0.05$.

На рис. 4 представлена зависимость относительной ошибки $E_{\mathrm{rel}}(\delta)$ от уровня ошибки входных данных δ в процентах. Графики получены для значений $\delta = 1$–10% с шагом 1% после проведения 10 численных экспериментов отдельно для каждого из двух параметров ε в указанном диапазоне ошибок и усреднения полученных результатов. На графиках видно, что с уменьшением ошибки δ растет точность восстановления функции $q^{\mathrm{inv}}(x,y)$. Кроме того, меньшие значения ε приводят к более точному восстановлению искомой функции $q(x,y)$.

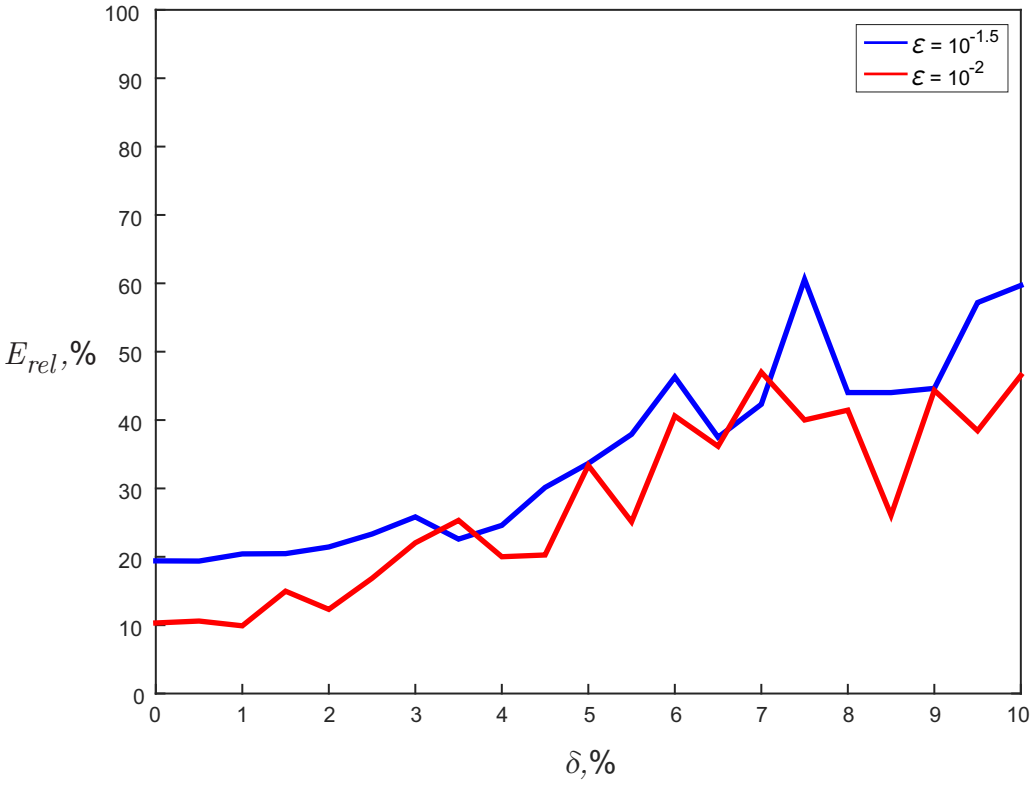


Рис. 4. Зависимость относительной ошибки $E_{\mathrm{rel}}(\delta)$ решения обратной задачи от уровня ошибки δ входных данных обратной задачи для разных параметров ε

Fig. 4. Dependence of the relative error $E_{\mathrm{rel}}(\delta)$ of the inverse problem solution on the error level δ of the input data of the inverse problem for different parameters ε

Таким образом, численные эксперименты показывают, что решение исходной обратной задачи восстанавливается более точно для меньших значений параметра ε.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

6. Обсуждение. Обратим особое внимание на следующие важные вопросы.

Существуют ли более точные модели горения леса? Современные модели лесных пожаров, как правило, получаются из ранее известных моделей путем учета множества дополнительных параметров. Так, например, в работе [41] детально рассмотрено влияние влажности почвы на процесс распространения лесного пожара. Очевидно, что модели, учитывающие большее количество параметров, являются более точными. Однако было бы затруднительно решать обратную задачу по восстановлению доли сгоревшей биомассы на основе таких моделей, так как понадобилась бы еще дополнительная информация, к примеру, о влажности почвы, которую по одним только спутниковым данным получить на данный момент невозможно. На практике при решении обратной задачи по восстановлению доли сгоревшей биомассы рассматриваются данные, которые получены со спутников или фотографий (динамика фронта горения) и с помощью прямых измерений (такие как данные о скорости ветра). Предполагается, что в качестве входных данных для решения обратной задачи берутся те, которые можно наиболее просто и достоверно получить из открытых источников. Таким образом, при выборе используемой модели при постановке обратной задачи важно соблюдать баланс между точностью модели и доступностью получения входных данных.

В чем физический смысл коэффициента диффузии активного вещества D_u? Коэффициент D_u в системе (1) необходим в первую очередь для регуляризации системы, иначе уравнение для биомассы будет уравнением переноса, имеющим разрывное решение. Это сделало бы постановку исходной задачи некорректной. С физической точки зрения коэффициент D_u следует воспринимать не в прямом смысле (действительно, деревья не могут непосредственно диффундировать), а как некоторый эффективный коэффициент диффузии. Поскольку модель является макроскопической, лесной массив моделируется как сплошная пористая среда, где в каждой точке есть доля газа и доля биомассы. Диффузионный член описывает не перемещение стволов деревьев, а связность горящей древесины (например, при перекидывании пожара на соседние кроны деревьев в рассматриваемом масштабе.)

Какой параметр ε можно считать достаточно малым при решении задачи? Существуют различные способы выделения малого параметра в исходной системе (1). Например, если для простоты рассматривать аналогичное уравнение диффузии

$$D\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = k(u - q),$$

где k [с$^{-1}$] – размерный коэффициент пропорциональности (он соответствует времени реакции), то чтобы сделать задачу безразмерной, можно ввести малый параметр $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{D}{k(2L)^2}}$ (физический смысл — отношение времени реакции $\dfrac{1}{k}$ ко времени диффузии $\dfrac{(2L)^2}{D}$) и перейти к новым безразмерным переменным $x' = \dfrac{x}{2L}$, $y' = \dfrac{y}{2L}$, $t' = \varepsilon k t = \dfrac{\sqrt{Dk}}{2L} t$ (переход к “медленному” времени по сравнению со временем реакции). В новых переменных уравнение также примет вид

$$\varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = u - q.$$

В настоящей статье при переходе к новым переменным малый параметр также является безразмерным: берется характерная величина $l = 1$ [км] и делится на размер всей области $2L$ в километрах. Таким образом, $\varepsilon = \dfrac{l}{L} = \dfrac{1}{L}$ — безразмерная величина. Характерный размер $l = 1$ [км] связан с минимальным типичным размером области, на котором процесс распространения лесного пожара можно рассматривать с помощью системы дифференциальных уравнений типа реакция-адвекция-диффузия в сплошной среде. На меньших пространственных масштабах (порядка десятков или даже сотен метров) необходимо уже учитывать влияние отдельно стоящих деревьев, как это делается в дискретно-событийных имитационных моделях (например, клеточного автомата), упомянутых в работе [22]. Через этот же параметр осуществляется переход к новым переменным $x' = \varepsilon x$, $y' = \varepsilon y$ и к “медленному” времени $t' = \varepsilon t$, где коэффициент k принимается численно равным 1. При таком преобразовании задача действительно остается размерной, однако ее вид совпадает с системой в безразмерных переменных. Поэтому с математической точки зрения методика получения редуцированной задачи, которой посвящена настоящая статья, не изменится.

Следует также упомянуть, что от малости параметра напрямую зависит толщина переходного слоя (фронта пожара): чем меньше параметр, тем меньше наблюдаемая толщина (из теории контрастных

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

структур известно, что в исследуемых уравнениях она пропорциональна $\varepsilon|\ln\varepsilon|$) и тем более точным является асимптотическое разложение. В случае наблюдения за лесными пожарами наглядно видно, что чем больше рассматриваемая область, тем тоньше наблюдаемая линия (фронт) пожара. Случай, когда наблюдаемая область является настолько большой, что наблюдаемая линия пожара является замкнутой кривой, в статье не рассматривается, такую область предлагается называть "глобальной". Логично, что если рассматривать характерные размеры порядка метров или даже десятков метров, то фронт пожара будет уже не узким, а занимать значительную часть области, и в таком случае асимптотические методы будут неприменимы ввиду отсутствия наблюдаемой контрастной структуры. Если же речь идет о простом переходе к другим единицам измерения (без изменения размера наблюдаемой области), то пропорционально изменятся размерные коэффициенты в рассматриваемой системе уравнений.

Можно ли получить решение модельной обратной задачи для более малых значений параметра ε? Разные ошибки решения на рис. 4 для двух параметров ε обусловлены моделированием входных данных обратной задачи. Для каждого рассмотренного параметра ε необходимо получить кривую $y_{\text{front}} = h(x,t)$. Как было указано выше, для этого требуется численно решить прямую задачу (2) при заданном фиксированном параметре ε. Свойства решения рассматриваемой прямой задачи таковы, что чем меньше малый параметр, тем более узкий переходный слой наблюдается в решении, и для получения устойчивого численного решения необходимо брать больше узлов для расчетов, причем их количество значительно возрастает с уменьшением ε (обратно пропорционально ширине переходного слоя, т.е. $\varepsilon|\ln\varepsilon|$). Так, если в случае $\varepsilon = 10^{-1.5}$ использовалась сетка с числом узлов $N_x = 50$, $N_y = 2000$, $M = 5000$, то при $\varepsilon = 10^{-2}$ потребовалось взять уже $N_x = 50$, $N_y = 4000$, $M = 7500$ узлов, чтобы получить устойчивое решение. В случае, например, $\varepsilon = 10^{-3}$ эта двумерная задача становится намного сложнее с вычислительной точки зрения, и для ее решения понадобится уже более мощное вычислительное устройство или кластер. Таким образом, более полное численное исследование сходимости по малому параметру — это крайне объемная задача с вычислительной точки зрения, в то время как настоящее исследование было ограничено возможностями домашнего персонального компьютера. Ожидается, что ошибка решения с уменьшением параметра ε будет уменьшаться, но, к сожалению, ввиду технических ограничений в работе удалось рассмотреть только два таких примера, которые соответствуют ожидаемой тенденции.

Обратим внимание на то, что эти сложности касаются только моделирования входных данных для решения модельных обратных задач. На практике предполагается, что входные данные $y_{\text{front}} = h(x,t)$ получены из данных наблюдений за распространением лесных пожаров. При этом редуцированная задача, которой посвящена работа, требует минимальных вычислительных затрат (так как ее решение выражается явно из входных данных), и даже на густых сетках ее решение занимает не больше нескольких минут.

Является ли обратная задача в полной постановке корректной? Теоретическое исследование корректности рассматриваемой коэффициентной обратной задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных (2) в полной постановке на данный момент не представляется возможным в связи с тем, что соответствующий инструментарий исследования для нелинейных задач рассматриваемого класса еще не разработан. В работе заведомо предполагается существование решения обратной задачи в полной постановке, что было подтверждено численными экспериментами. В отличие от корректности обратной задачи в полной постановке, корректность полученной редуцированной задачи (9) является очевидной в силу явного выражения ее решения (11): решение существует, единственно и является устойчивым по отношению к входным данным (при условии достаточной гладкости функции $h(x,t)$ для определения скорости $\boldsymbol{V}$ движения фронта). В случае наличия сильных шумов во входных данных применяется стандартный подход на основе их сглаживания, что является стандартной практикой при работе с такими входными данными.

7. Заключение. Представлен асимптотико-численный подход к решению обратной задачи по определению доли сгоревшей биомассы в лесных пожарах с данными о положении фронта горения в локальной двумерной области наблюдения. Предложенный подход позволяет свести исходную обратную задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных к редуцированной задаче для алгебраического уравнения. Описанный метод значительно уменьшает объем вычислений по сравнению с классическими методами решения обратных задач такого типа на основе минимизации целевого функционала. Обладая вычислительной простотой, асимптотико-численный подход имеет ряд ограничений: точность полученного решения зависит от того, насколько малым является параметр ε в рамках рассматриваемой задачи, и может сильно ухудшиться при его увеличении. При этом полученный алгоритм

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

построения редуцированной задачи можно применить и для случая наблюдения фронта горения в глобальной области (например, при использовании данных спутниковых наблюдений), когда фронт горения представляет собой замкнутую кривую. Кроме того, предложенный подход может быть применен и к ряду других прикладных задач для дифференциальных уравнений с малым параметром в двумерной области наблюдения.

Список литературы

1. *Барталев С.А., Стыценко Ф.В., Егоров В.А., Лупян Е.А.* Спутниковая оценка гибели лесов России от пожаров // Лесоведение. 2015. № 2. 83–94.
2. *Schepaschenko D., Moltchanova E., Fedorov S., et al.* Russian forest sequesters substantially more carbon than previously reported // Scientific Reports. 2021. **11**. Article Number 12825. doi 10.1038/s41598-021-92152-9.
3. *Барталев С.А., Стыценко Ф.В.* Спутниковая оценка гибели древостоев от пожаров по данным о сезонном распределении пройденной огнем площади // Лесоведение. 2021. № 2. 115–122.
4. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. **54**. 233–247. doi 10.1016/j.cnsns.2017.06.002.
5. *Лукьяненко Д.В., Волков В.Т., Нефедов Н.Н., Ягола А.Г.* Применение асимптотического анализа для решения обратной задачи определения коэффициента линейного усиления в уравнении типа Бюргерса // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2019. № 2. 38–43.
6. *Денисов А.М.* Аппроксимация решения обратной задачи для сингулярно возмущенной системы уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 2023. **59**, № 6. 746–751. doi 10.31857/S0374064123060055.
7. *Zakharova S.A., Davydova M.A., Lukyanenko D.V.* Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere // Inverse Problems in Science and Engineering. 2021. **29**, N 3. 365–377. doi 10.1080/17415977.2020.1785443.
8. *Леонов А.С., Нефедов Н.Н., Шаров А.Н., Ягола А.Г.* Решение двумерной обратной задачи квазистатической эластографии с помощью метода малого параметра // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. **62**, № 5. 854–860.
9. *Леонов А.С., Нефедов Н.Н., Шаров А.Н., Ягола А.Г.* "Быстрое" решение трехмерной обратной задачи квазистатической эластографии с помощью метода малого параметра // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. **63**, № 3. 449–464. doi 10.31857/S0044466923030092.
10. *Denisov A.M., Solov'eva S.I.* Approximate solution of the inverse boundary value problem for a singularly perturbed system of partial differential equations // Differential Equations. 2024. **60**, N 7. 916–924. doi 10.1134/S0012266124070073.
11. *Lukyanenko D.V., Grigorev V.B., Volkov V.T., Shishlenin M.A.* Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction–diffusion equation with the location of moving front data // Computers & Mathematics with Applications. 2019. **77**, N 5. 1245–1254. doi 10.1016/j.camwa.2018.11.005.
12. *Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A.* Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. **99**. Article Number 105824. doi 10.1016/j.cnsns.2021.105824.
13. *Argun R.L., Gorbachev A.V., Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A.* Features of numerical reconstruction of a boundary condition in an inverse problem for a reaction–diffusion–advection equation with data on the position of a reaction front // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2022. **62**, N 3. 441–451. doi 10.1134/S0965542522030022.
14. *Argun R., Levashova N., Lukyanenko D., et al.* Modeling the dynamics of negative mutations for a mouse population and the inverse problem of determining phenotypic differences in the first generation // Mathematics. 2023. **11**, N 14. Article Number 3180. doi 10.3390/math11143180.
15. *Lukyanenko D.V., Argun R.L., Borzunov A.A., et al.* On the features of numerical solution of coefficient inverse problems for nonlinear equations of the reaction–diffusion–advection type with data of various types // Differential Equations. 2023. **59**, N 12. 1734–1757. doi 10.1134/S0012266123120133.
16. *Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Kalachev L.V.* The boundary function method for singular perturbation problems. Philadelphia: SIAM, 1995.
17. *Butuzov V.F., Vasilieva A.B.* Singularly perturbed problems with boundary and interior layers: theory and applications // Advances in Chemical Physics. 1997. **97**, 47–179. doi 10.1002/9780470141564.ch2.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

18. *Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.* Singularly perturbed problems with boundary and internal layers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. **268**, N 1. 258–273. doi 10.1134/S0081543810010189.
19. *Levashova N., Gorbachev A., Argun R., Lukyanenko D.* The problem of the non-uniqueness of the solution to the inverse problem of recovering the symmetric states of a bistable medium with data on the position of an autowave front // Symmetry. 2021. **13**, N 5. Article Number 860. doi 10.3390/sym13050860.
20. *Argun R., Gorbachev A., Levashova N., Lukyanenko D.* Inverse problem for an equation of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front: features of the solution in the case of a nonlinear integral equation in a reduced statement // Mathematics. 2021. **9**, N 18. Article Number 2342. doi 10.3390/math9182342.
21. *Argun R., Gorbachev A., Lukyanenko D., Shishlenin M.* On some features of the numerical solving of coefficient inverse problems for an equation of the reaction-diffusion-advection-type with data on the position of a reaction front // Mathematics. 2021. **9**, N 22. Article Number 2894. doi 10.3390/math9222894.
22. *Sullivan A.L.* Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 3: Simulation and mathematical analogue models // International Journal of Wildland Fire. 2009. **18**, N 4. 387–403. doi 10.1071/WF06144.
23. *Хвостиков С.А., Барталев С.А.* Методы прогнозного моделирования развития природных пожаров с использованием данных спутникового мониторинга // Информационные технологии в дистанционном зондировании Земли — RORSE 2018. Москва: ИКИ РАН, 2019. pp. 42–47. doi 10.21046/rorse2018.42.
24. *Хвостиков С.А., Барталев С.А.* Возможности применения данных спутникового мониторинга для моделирования динамики развития природных пожаров // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2021. **18**, № 5. 9–27. doi 10.21046/2070-7401-2021-18-5-9-27.
25. *Weber R.O.* Toward a comprehensive wildfire spread model // International Journal of Wildland Fire. 1991. **1**, N 4. 245–248.
26. *Гришин А.М., Якимов А.С.* Математическое моделирование процесса зажигания древесины // Теплофизика и аэромеханика. 2013. **20**, № 4. 473–486.
27. *Кулешов А.А.* Математические модели лесных пожаров // Математическое моделирование. 2002. **14**, № 11. 33–42. https://www.mathnet.ru/rus/mm525. Дата обращения: 9 ноября 2026.
28. *Morvan D., Dupuy J.L.* Modeling the propagation of a wildfire through a Mediterranean shrub using a multiphase formulation // Combustion and Flame. 2004. **138**, N 3. 199–210. doi 10.1016/j.combustflame.2004.05.001.
29. *Volpert A.I., Volpert V.A.* Traveling-wave solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinear terms // Nonlinear Analysis.: Theory, Methods and Applications. 2002. **49**, N 1. 113–139. doi 10.1016/S0362-546X(01)00103-1.
30. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О.* Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа // Дифференциальные уравнения. 2022. **58**, № 6. 763–776.
31. *Голодова Е.С., Щепакина Е.А.* Моделирование безопасных процессов горения с максимальной температурой // Математическое моделирование. 2008. **20**, № 5. 55–68. https://www.mathnet.ru/rus/mm2390. Дата обращения: 9 ноября 2026.
32. *Bürger R., Gavilán E., Inzunza D., et al.* Exploring a convection–diffusion–reaction model of the propagation of forest fires: computation of risk maps for heterogeneous environments // Mathematics. 2020. **8**, N 10. Article Number 1674. doi 10.3390/math8101674.
33. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
34. *Аргун Р.Л., Левашова Н.Т., Полежаева Е.В.* Асимптотика решения системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в модели распространения лесного пожара // Теоретическая и математическая физика. 2025. **224**, № 2. 243–256. doi 10.4213/tmf10919.
35. *Антипов Е.А., Волков В.Т., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н.* Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. **24**, № 3. 259–279. doi 10.18255/1818-1015-2017-3-259-279.
36. *Орлов А.О., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н.* Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками // Дифференциальные уравнения. 2018. **54**, № 5. 673–690. doi 10.1134/S0374064118050114.
37. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
38. *Rosenbrock H.H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // The Computer Journal. 1963. **5**, N 4. 329–330. doi 10.1093/comjnl/5.4.329.
39. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Шнайдер К.Р.* О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2005. № 1, 9–13.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

40. *Волков В.Т., Грачев Н.Е., Нефедов Н.Н., Николаев А.Н.* О формировании резких переходных слоев в двумерных моделях реакция-диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. **47**, № 8. 1356–1364. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=264&option_lang=rus. Дата обращения: 10 ноября 2026.
41. *Or D., Furtak-Cole E., Berli M., et al.* Review of wildfire modeling considering effects on land surfaces // Earth-Science Reviews. 2023. **245**. Article Number 104569. doi 10.1016/j.earscirev.2023.104569.
42. МЧС России. Штормовое предупреждение по чрезвычайной пожароопасности леса. 2021. https://07.mchs.gov.ru/deyatelnost/press-centr/vse_novosti/4515813. Дата обращения: 10 ноября 2026.

Получена *20 апреля 2026 г.*
Принята *26 сентября 2026 г.*
Опубликована *25 ноября 2026 г.*

Информация об авторе

Рауль Ларикович Аргун — математик 1 категории; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 1, стр. 2, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. S. A. Bartalev, F. V. Stytsenko, V. A. Egorov, and E. A. Lupyan, “Satellite-Based Assessment of Forest Mortality due to Fires in Russia,” Lesovedenie No 2, 83–94 (2015).
2. D. Schepaschenko, E. Moltchanova, S. Fedorov, et al., “Russian forest sequesters substantially more carbon than previously reported,” Scientific Reports **11**, Article Number 12825 (2021). doi 10.1038/s41598-021-92152-9.
3. S. A. Bartalev and F. V. Stytsenko, “Satellite-Based Assessment of Forest Stand Mortality from Fires Based on Data on the Seasonal Distribution of Burned Area,” Lesovedenie No 2, 115–122 (2021).
4. D. V. Lukyanenko, M. A. Shishlenin, and V. T. Volkov, “Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **54**, 233–247 (2018). doi 10.1016/j.cnsns.2017.06.002.
5. D. V. Lukyanenko, V. T. Volkov, N. N. Nefedov, and A. G. Yagola, “Application of Asymptotic Analysis for Solving the Inverse Problem of Determining the Linear Gain Coefficient in a Burgers-Type Equation,” Vestnik Moskov. Univer. Ser. 3. Fiz. Asronom. No 2, 38–43 (2019).
6. A. M. Denisov, “Approximation of the Solution of the Inverse Problem for a Singularly Perturbed System of Partial Differential Equations,” Differ. Urav. **59** (6), 746–751 (2023). doi 10.31857/S0374064123060055.
7. S. A. Zakharova, M. A. Davydova, and D. V. Lukyanenko, “Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere,” Inverse Problems in Science and Engineering **29** (3), 365–377 (2021). doi 10.1080/17415977.2020.1785443.
8. A. S. Leonov, N. N. Nefedov, A. N. Sharov, and A. G. Yagola, “Solution of the Two-Dimensional Inverse Problem of Quasistatic Elastography with the Help of the Small Parameter Method,” Zh. Vychsi. Mat. Mat. Fiz. **62** (5), 854–860 (2022) [Computational Mathematics and Mathematical Physics **62** (5), 827–833 (2022)]. doi 10.1134/S0965542522050074.
9. A. S. Leonov, N. N. Nefedov, A. N. Sharov, and A. G. Yagola, “"Fast" Solution of the Three-Dimensional Inverse Problem of Quasi-Static Elastography with the Help of the Small Parameter Method,” Zh. Vychsi. Mat. Mat. Fiz. **63** (3), 449–464 (2023) [Computational Mathematics and Mathematical Physics **63** (3), 425–440 (2023)]. doi 10.1134/S0965542523030090.
10. A. M. Denisov and S. I. Solov’eva, “Approximate Solution of the Inverse Boundary Value Problem for a Singularly Perturbed System of Partial Differential Equations,” Differential Equations **60** (7), 916–924 (2024). doi 10.1134/S0012266124070073.
11. D. V. Lukyanenko, V. B. Grigorev, V. T. Volkov, and M. A. Shishlenin, “Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction–diffusion equation with the location of moving front data,” Computers & Mathematics with Applications **77** (5), 1245–1254 (2019). doi 10.1016/j.camwa.2018.11.005.
12. D. V. Lukyanenko, A. A. Borzunov, and M. A. Shishlenin, “Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **99**, Article Number 105824 (2021). doi 10.1016/j.cnsns.2021.105824.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

13. R. L. Argun, A. V. Gorbachev, D. V. Lukyanenko, and M. A. Shishlenin, "Features of Numerical Reconstruction of a Boundary Condition in an Inverse Problem for a Reaction–Diffusion–Advection Equation with Data on the Position of a Reaction Front," Computational Mathematics and Mathematical Physics **62** (3), 441–451 (2022). doi 10.1134/S0965542522030022.
14. R. Argun, N. Levashova, D. Lukyanenko, et al., "Modeling the Dynamics of Negative Mutations for a Mouse Population and the Inverse Problem of Determining Phenotypic Differences in the First Generation," Mathematics **11** (14), Article Number 3180 (2023). doi 10.3390/math11143180.
15. D. V. Lukyanenko, R. L. Argun, A. A. Borzunov, et al., "On the Features of Numerical Solution of Coefficient Inverse Problems for Nonlinear Equations of the Reaction–Diffusion–Advection Type with Data of Various Types," Differential Equations **59** (12), 1734–1757 (2023). doi 10.1134/S0012266123120133.
16. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, and L. V. Kalachev, *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems* (SIAM, Philadelphia, 1995).
17. V. F. Butuzov and A. B. Vasilieva, "Singularly Perturbed Problems with Boundary and Interior Layers: Theory and Applications," Advances in Chemical Physics **97**, 47–179 (1997). doi 10.1002/9780470141564.ch2.
18. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, and N. N. Nefedov, "Singularly perturbed problems with boundary and internal layers," Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **268** (1), 258–273 (2010). doi 10.1134/S0081543810010189.
19. N. Levashova, A. Gorbachev, R. Argun, and D. Lukyanenko, "The Problem of the Non-Uniqueness of the Solution to the Inverse Problem of Recovering the Symmetric States of a Bistable Medium with data on the Position of an Autowave Front," Symmetry **13** (5), Article Number 860 (2021). doi 10.3390/sym13050860.
20. R. Argun, A. Gorbachev, N. Levashova, and D. Lukyanenko, "Inverse Problem for an Equation of the Reaction-Diffusion-Advection Type with Data on the Position of a Reaction Front: Features of the Solution in the Case of a Nonlinear Integral Equation in a Reduced Statement," Mathematics **9** (18), Article Number 2342 (2021). doi 10.3390/math9182342.
21. R. Argun, A. Gorbachev, D. Lukyanenko, and M. Shishlenin, "On Some Features of the Numerical Solving of Coefficient Inverse Problems for an Equation of the Reaction-Diffusion-Advection-Type with Data on the Position of a Reaction Front," Mathematics **9** (22), Article Number 2894 (2021). doi 10.3390/math9222894.
22. A. L. Sullivan, "Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 3: Simulation and mathematical analogue models," Int. J. Wildland Fire **18** (4), 387–403 (2009). doi 10.1071/WF06144.
23. S. A. Khvostikov and S. A. Bartalev, "Methods for Wildfire Spread Prediction and Their Integration With Remote Sensing Data," in *Information Technologies in Remote Sensing of the Earth—RORSE 2018* (IKI RAS, Moscow, 2019), pp. 42–47. doi 10.21046/rorse2018.42.
24. S. A. Khvostikov and S. A. Bartalev, "Possibilities of using satellite monitoring data for modeling the dynamics of wildfire development," Sovremen. Probl. Distan. Zondir. Zemli iz Kosmosa **18** (5), 9–27 (2021). doi 10.21046/2070-7401-2021-18-5-9-27.
25. R. O. Weber, "Toward a Comprehensive Wildfire Spread Model," Int. J. Wildland Fire **1** (4), 245–248 (1991).
26. A. M. Grishin and A. S. Yakimov, "Mathematical Modeling of Wood Ignition Process," Teplofiz. Aeromech. **20** (4), 473–486 (2013).
27. A. A. Kuleshov, "Mathematical Models of Forest Fires," Matem. Model. **14** (11), 33–42 (2002). https://www.mathnet.ru/rus/mm525. Cited November 9, 2026.
28. D. Morvan and J. L. Dupuy, "Modeling the propagation of a wildfire through a Mediterranean shrub using a multiphase formulation," Combust. Flame **138** (3), 199–210 (2004). doi 10.1016/j.combustflame.2004.05.001.
29. A. I. Volpert and V. A. Volpert, "Traveling-wave solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinear terms," Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Applicat. **49** (1), 113–139 (2002). doi 10.1016/S0362-546X(01)00103-1.
30. N. N. Nefedov, E. I. Nikulin, and A. O. Orlov, "Front motion in a problem with weak advection in the case of a continuous source and a modular-type source," Differ. Urav. **58** (6), 763–776 (2022).
31. E. S. Golodova and E. A. Shchepakina, "Modeling of safe combustion at the maximum temperature," Matem. Model. **20** (5), 55–68 (2008) [Math. Models Comput. Simul. **1** (2), 332–334 (2009)]. doi 10.1134/S207004820902015X.
32. R. Bürger, E. Gavilán, D. Inzunza, et al., "Exploring a Convection–Diffusion–Reaction Model of the Propagation of Forest Fires: Computation of Risk Maps for Heterogeneous Environments," Mathematics **8** (10), Article Number 1674 (2020). doi 10.3390/math8101674.
33. Ya. B. Zeldovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich, and G. M. Makhviladze, *The Mathematical Theory of Combustion and Explosion* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
34. R. L. Argun, N. T. Levashova, and E. V. Polezhaeva, "Asymptotics of the solution of a system of singularly perturbed differential equations in the forest fire spread models," Teor. Matem. Fizika **224** (2), 243–256 (2025) [Theor. Math. Phys. **224** (2), 1311–1323 (2025)]. doi 10.1134/S004057792508001X.
35. E. A. Antipov, V. T. Volkov, N. T. Levashova, and N. N. Nefedov, "Moving Front Solution of the Reaction-Diffusion Problem," Model. Anal. Inform. Syst. **24** (3), 259–279 (2017). doi 10.18255/1818-1015-2017-3-259-279.

2026, **27** (4), 756–777. doi 10.26089/NumMet.v27r446

36. A. O. Orlov, N. T. Levashova, and N. N. Nefedov, "Solution of contrast structure type for a parabolic reaction-diffusion problem in a medium with discontinuous characteristics," Differ. Urav. **54** (5), 669–686 (2018). doi 10.1134/S0012266118050105.
37. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
38. H. H. Rosenbrock, "Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations," Comput. J. **5** (4), 329–330 (1963). doi 10.1093/comjnl/5.4.329.
39. V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, and K. R. Schneider, "Formation and Propagation of Steep Transition Layers in Parabolic Problems," Vest. Mosk. Univer. Ser. 3. Fiz. Astron. No 1, 9–13 (2005).
40. V. T. Volkov, N. E. Grachev, N. N. Nefedov, and A. N. Nikolaev, "On the formation of sharp transition layers in two-dimensional reaction-diffusion models," J. Vychisl. Matem. Matem. Fiz. **47** (8), 1356–1364 (2007) [Comput. Math. Math. Phys. **47** (8), 1301–1309 (2007)]. doi 10.1134/S0965542507080088.
41. D. Or, E. Furtak-Cole, M. Berli, et al., "Review of Wildfire Modeling Considering Effects on Land Surfaces," Earth-Science Reviews **245**, Article Number 104569 (2023). doi 10.1016/j.earscirev.2023.104569.
42. EMERCOM of Russia. Storm warning on extreme forest fire danger. 2021. https://07.mchs.gov.ru/deyatelnost/press-centr/vse_novosti/4515813. Cited November 10, 2026.

Received *April 20, 2026*
Accepted *September 26, 2026*
Published *November 25, 2026*

Information about the author

Raul L. Argun — Mathematician, Category 1; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Department of Mathematics, Leninskie Gory, 1, building 2, 119991, Moscow, Russia.